Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 12 (1930)

Artikel: Géodésie et précession
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741231

GÉODÉSIE ET PRÉCESSION[1]

PAR

R. WAVRE

---

§ 11. — Le désaccord signalé par Poincaré.

L'aplatissement terrestre est donné, d'une part, par les mesures géodésiques. Ces dernières donnent un aplatissement dont l'inverse était estimé être d'environ:

$$293{,}5 \ .$$

Mais l'aplatissement terrestre peut aussi se déterminer à partir des mesures précessionnelles. On obtient par cette seconde méthode le chiffre:

$$297{,}3 \ ,$$

dont la différence avec le premier est trop grande pour être imputable à l'imprécision des mesures tant géodésiques que précessionnelles.

Ce désaccord a été relevé, sous une autre forme, et souligné par Poincaré aux pages 92 et 96 de son livre sur les « Figures d'Equilibre ». L'illustre savant procédait en première approximation, il négligeait, comme Clairaut et Laplace, les termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire. Il y a plus: se fondant sur une étude de Callandreau, Poincaré estimait que la seconde approximation n'expliquerait pas cette divergence.

[1] Suite de l'article: Sur les figures d'équilibre et la géodésie, paru dans le fascicule précédent, *Archives* (5), 11, p. 295 (1929).

Nous allons démontrer que ce désaccord disparaît, au contraire, en seconde approximation et que les mesures précessionnelles donnent un aplatissement dont l'inverse est voisin du chiffre 293,5 fourni par la géodésie. M. Helbronner[1] indique aujourd'hui 293,3.

Il est intéressant de constater que l'aplatissement de Clarke, 293,5, avait été abandonné pour des raisons de mécanique céleste et que l'ellipsoïde de Hayford, 297, avait été érigé en ellipsoïde international, tandis que, nous venons de le dire, l'aplatissement de Clarke convient mieux à la théorie de la précession. Mais il y a plus: M. E. Brown[2] a montré que le chiffre voisin 294 satisfait à la théorie de la lune. Il faut en conclure que l'aplatissement de Clarke est plus voisin de la réalité que celui de Hayford et que le premier s'accorde, en dernière analyse, avec les données astronomiques.

§ 12. — La relation entre J et u[3].

Les moments d'inertie C et A se calculent aisément en première approximation. Ils sont exprimés par les deux formules de Clairaut:

$$\left.\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}\right\} = \frac{8\pi}{3} \int_0^1 \rho \tau^4 \, d\tau + \left.\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right\} \times \frac{8\pi}{15} \omega^2 \int_0^1 \rho \, d(a\tau^5) \, . \tag{111}$$

4 convient à C et 3 à A. La différence C — A est de l'ordre de ω^2:

$$C - A = \frac{8\pi}{15} \omega^2 \int_0^1 \rho \, d(a\tau^5) \, . \tag{112}$$

Introduisons le rapport J suivant:

$$J = \frac{C - A}{C} \, . \tag{113}$$

[1] *Revue générale des Sciences*, 1929.
[2] E. Brown, *London Astr. Soc. Month. Not.*, 75, p. 508 (1915).
[3] Pour les notations voir l'article précédent paru dans le fascicule novembre-décembre 1929.

Comme C — A il est de l'ordre de ω^2, nous poserons donc:

$$J = \omega^2 J' . \tag{114}$$

Les dernières formules donnent facilement la relation:

$$\frac{8\pi}{15}\int_0^1 \rho\, d(a\tau^5) = CJ' , \tag{115}$$

et l'expression (111) de C donne par (115):

$$C = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho\tau^4 d\tau + 4\omega^2 J'C ,$$

d'où au premier ordre en ω^2:

$$C = (1 + 4\omega^2 J') . \frac{8\pi}{3}\int_0^1 \rho\tau^4\, d\tau . \tag{116}$$

La constante u est égale, dans notre système d'unité à:

$$u = \frac{3i}{\omega^2}(C - A) = 3i\, J'C ,$$

d'où, en remplaçant C par son expression (116):

$$u = 8\pi i\, J'(1 + 4\omega^2 J')\int_0^1 \rho\tau^4\, d\tau . \tag{117}$$

Dans les formules (94) ... (109), donnant l'aplatissement et les variations de la pesanteur, u est toujours multiplié par Λ c'est-à-dire par ω^2. La formule précédente donnera donc ces expressions jusqu'à l'ordre ω^4, donc en seconde approximation. En première approximation, la parenthèse de (117) se réduirait à l'unité.

§ 13. — L'ARTIFICE DE RADAU.

L'intégrale qui s'est présentée depuis le début de la théorie des figures planétaires:

$$\int_0^1 \rho \tau^4 \, d\tau ,$$

peut être calculée avec une faible erreur sans faire intervenir la manière dont la densité se répartit à l'intérieur de l'astre. Ce résultat remarquable est dû à Radau. Remplaçons, en effet, ρ par sa valeur en D sous le signe somme

$$\rho = D + \frac{1}{3} t D'$$

et intégrons le second terme par partie; on trouve:

$$\int_0^1 \rho \tau^4 \, d\tau = \frac{1}{3} D_1 - \frac{2}{3} \int_0^1 D \tau^4 \, d\tau . \tag{118}$$

Or, l'équation de Clairaut-Radau peut s'écrire comme on le vérifie directement:

$$\left(D \tau^5 \sqrt{1 + \eta}\right)' = 5 D \tau^4 \psi(\eta) , \tag{119}$$

avec:

$$\psi(\eta) = \frac{1 + \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{10}}{\sqrt{1 + \eta}} .$$

En intégrant les deux membres de (119) entre $\tau = 0$ et $\tau = 1$ et appliquant au second la formule de la moyenne on trouve:

$$D_1 \sqrt{1 + \eta_1} = 5 \psi(\eta^+) \int_0^1 D \tau^4 \, d\tau , \tag{120}$$

η^+ étant une valeur convenable de η correspondant à une valeur τ^+ telle que $0 \leq \tau^+ \leq 1$.

Les formules (118) et (120) donnent:

$$\int_0^1 \rho\tau^4 \, d\tau = \frac{1}{3} D_1 \left(1 - \frac{2}{5} \frac{1}{\psi(\eta^+)} \sqrt{1 + \eta_1}\right) . \qquad (121)$$

Les valeurs η_1 sont liées à la constante u par les relations:

$$\eta_1 = \frac{3 - 2u}{1 + u} \quad (122) , \qquad u = \frac{3 - \eta_1}{2 + \eta_1} . \quad (123)$$

La fonction $\psi(\eta)$ varie très peu lorsque η varie de zéro aux valeurs η_1 qui répondent aux figures planétaires peu aplaties:

$u = 1{,}5$	$\eta_1 = 0$	$\psi(\eta_1) = 1$
$u = \frac{8}{7}$	$\eta_1 = \frac{1}{3}$	$\psi(\eta_1) = 1{,}00075$ max.
$u = 1$	$\eta_1 = 0{,}5$	$\psi(\eta_1) = 1{,}0002$
$u = 0{,}9763$	$\eta_1 = 0{,}53$	$\psi(\eta_1) = 1$
$u = 0{,}94$	$\eta_1 = 0{,}577$	$\psi(\eta_1) = 0{,}99901$

On verra plus loin que c'est l'intervalle suivant:

$$0{,}94 \leq u < 0{,}99 ,$$

qui intervient dans le cas de la terre et, pour de telles valeurs de u, la fonction ψ reste comprise entre:

$$0{,}99901 < \psi < 1{,}00075 .$$

La quantité $\psi(\eta^+)$ est donc égale à l'unité à moins d'un millième près.

La formule (121) montre alors, que l'intégrale du premier membre est, à peu de chose près, stokienne, puis qu'elle ne dépend que des éléments D_1 et η_1 c'est-à-dire u.

§ 14. — La fonction $f(u)$ et ses limites.

Reproduisons les équations (117), (121) et (123):

$$u = 8\pi i\, J'(1 + 4\omega^2 J') \int_0^1 \rho\tau^4\, d\tau \,, \qquad (117')$$

$$\int_0^1 \rho\tau^4\, d\tau = \frac{1}{3} D_1 \left(1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{1 + \eta_1}\right) , \qquad (121')$$

$$\eta_1 = \frac{3 - 2u}{1 + u} \,, \qquad (123')$$

et remplaçons dans (117′) l'intégrale par sa valeur (121′) et dans cette dernière expression η_1 par sa valeur (123′) en u. On trouvera:

$$u = \frac{8\pi i}{3} J'(1 + 4\omega^2 J')\, D_1 \left(1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4 - u}{1 + u}}\right) ,$$

relation qui peut encore s'écrire sous la forme:

$$\frac{8\pi i}{3} J'(1 + 4\omega^2 J')\, D_1 = f(u) \,, \qquad (124)$$

avec:

$$f(u) = \frac{u}{1 - \frac{2}{5}\frac{1}{\psi}\sqrt{\frac{4 - u}{1 + u}}} \,. \qquad (125)$$

La densité moyenne D_1 qui figure dans (124) est celle des sphères chargées des densités $\rho(\tau)$. Soit, alors, M_s la masse totale de ces sphères. On peut écrire

$$f(u) = 2 i J'(1 + 4\omega^2 J')\, M \,.\, \frac{M_s}{M} \,. \qquad (126)$$

En calculant la masse totale M, on trouve au premier ordre:

$$M = M_s + \omega^2 \frac{2}{3} \int_0^1 \rho\, d(a\tau^3) \,, \qquad (127)$$

et, au même ordre:

$$\frac{M_s}{M} = 1 - \omega^2 P \ , \tag{128}$$

avec:

$$P = \frac{2}{3} \frac{\int_0^1 \rho \tau^2 (3a + \tau a') \, d\tau}{\int_0^1 \rho \tau^2 \, d\tau} \ . \tag{129}$$

Appliquons la formule de la moyenne à l'intégrale numérateur:

$$\int_0^1 \rho \tau^2 (3a + \tau a') \, d\tau = (3a + \tau a)'_{\tau^+} \int_0^1 \rho \tau^2 \, d\tau \ ;$$

la quantité entre parenthèse du second membre, à prendre pour une valeur τ^+ intermédiaire entre 0 et 1 représente une fonction croissante supérieure ou égale à $3\,a\,(0)$, inférieure ou égale à $3\,a\,(1) + a'(1)$. La relation (128) donne les relations suivantes en vertu de l'article précédent, § 2, page 297:

$$0 \leq \frac{15}{8\pi i} \frac{1}{D(0)} \leq 2a(0) \leq P \leq 2a(1) + \frac{2}{3} a'(1) \leq 2a(1) + a'(1) \ .$$

Cette dernière expression est égale par les formules (57) et (58) à $5\lambda t^3_*$. En prenant, donc, les limites les plus larges de P on peut écrire:

$$0 \leq \omega^2 P \leq 5\Lambda \ . \tag{130}$$

Les formules (126), (127), (128), (129) et (130) donnent:

$$f(u) = 2iMJ'(1 + 4\omega^2 J')(1 - \omega^2 P) \ ,$$

ou aux termes en ω^4 près:

$$f(u) = 2iMJ'(1 + 4\omega^2 J' - \omega^2 P) \ .$$

Remplaçons maintenant J' par sa valeur en J et introduisons Λ:

$$f(u) = \frac{J}{\Lambda}(1 + 4J - \omega^2 P) \ .$$

Les inégalités (130) donnent deux limites pour $f(u)$:

$$\frac{J}{\Lambda}(1 + 4J) \geq f(u) \geq \frac{J}{\Lambda}(1 + 4J - 5\Lambda) . \qquad (131)$$

Pratiquement, on prendra les logarithmes vulgaires des trois termes, ce qui donne:

$$LJ - L\Lambda + L(1 + 4J) \geq Lf(u) \geq LJ - L\Lambda + L(1 + 4J - 5\Lambda) . \qquad (132)$$

§ 15. — Quelques valeurs de la fonction $Lf(u)$ et de la constante ν.

Dans le cas où ψ est égal à l'unité, les valeurs de $Lf(u)$ sont:

$u = 0{,}94$	$Lf(u) = 0{,}27649$
$0{,}95$	$0{,}27898$
$0{,}96$	$0{,}28171$
$0{,}97$	$0{,}28440$
$0{,}98$	$0{,}28708$
$0{,}99$	$0{,}28972$

pour les valeurs de u concernant le cas de la terre.

Pour de telles valeurs de u les inégalités (90):

$$-\frac{9}{28} + \frac{1}{14}u - \frac{3}{14}u^2 \leq \nu \leq \frac{3}{14} - \frac{2}{7}u - \frac{3}{14}u^2 \qquad (90')$$

montrent que la constante ν reste comprise entre les limites:

$$-0{,}465 < \nu < -0{,}243 .$$

La fonction $f(u)$ ainsi que son logarithme croissent avec u.

§ 16. — Constante Λ et rapport φ.

Introduisons le rapport φ de la force centrifuge à l'équateur, à la pesanteur à l'équateur.

En première approximation, ce rapport s'écrit:

$$\varphi = \frac{\omega^2 t_1}{g} = \frac{\omega^2 t_1^3}{iM} = 2\Lambda .$$

En seconde approximation, il faut prendre le rayon équatorial et non le rayon moyen et la pesanteur $g_{\frac{\pi}{2}}$ à l'équateur et non une pesanteur moyenne et approximative. Il faut écrire:

$$\varphi = \frac{\omega^2 t_1 (1 + e_{\frac{\pi}{2}})}{g_{\frac{\pi}{2}}} .$$

Développons $e_{\frac{\pi}{2}}$ et $g_{\frac{\pi}{2}}$ par les formules (99) et (107) limitées aux termes en ω^2 et nous obtiendrons :

$$\varphi = 2\Lambda[1 + \Lambda(5 + 2u)] .$$

Cette équation peut se résoudre en Λ, elle donne :

$$\Lambda = \frac{\varphi}{2}\left[1 - \frac{\varphi}{2}(5 + 2u)\right] . \tag{133}$$

Au premier ordre le terme φ^2 disparaît et l'on retrouve:

$$\Lambda = \frac{\varphi}{2} .$$

La valeur Λ et $\frac{\varphi}{2}$ ne se confondent qu'au premier ordre. Voici deux valeurs attribuées à cette unique constante:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{288,38} \quad \text{(Poincaré)} \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{288,4} \quad \text{(Pizzetti)} .$$

En seconde approximation, il importe de distinguer Λ et $\frac{\varphi}{2}$. Nous prendrons la valeur de Poincaré 1° pour Λ et 2° pour $\frac{\varphi}{2}$ ce qui nous donnera une nouvelle valeur de Λ.

§ 17. — L'aplatissement en première approximation.

Les valeurs employées par Poincaré pour J et Λ sont les suivantes:

$$J = \frac{1}{305,31} \qquad \Lambda = \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{576,76} .$$

La relation qui donne $\mathrm{L}f(u)$ est en première approximation:

$$\mathrm{L}f(u) = \mathrm{LJ} - \mathrm{L}\Lambda \, .$$

Elle donne $\mathrm{L}f(u) = 0{,}27626$ d'où $u = 0{,}94$. La formule (99) réduite au premier ordre:

$$m_1 = \Lambda(1 + u) \tag{134}$$

donne pour l'inverse de l'aplatissement le chiffre:

$$\frac{1}{m_1} = 297{,}3 \, ,$$

tandis que la géodésie, suivant Poincaré, donnerait le chiffre:

$$\frac{1}{m_1} = 293{,}5 \, .$$

C'est sous une autre forme le désaccord signalé par l'illustre savant.

§ 18. — L'aplatissement en seconde approximation.

1° Prenons:

$$\mathrm{J} = \frac{1}{305{,}31} \qquad \text{et} \qquad \Lambda = \frac{1}{576{,}76} \, ,$$

et calculons par (132) les deux limites de $\mathrm{L}f(u)$, puis les limites correspondantes de u:

$$0{,}961 > u > 0{,}947 \, .$$

L'aplatissement est ensuite donné par la formule (99):

$$m_1 = \Lambda(1 + u) + \Lambda^2\left(3 + 3u + v - \frac{2}{7}u^2\right) \, . \tag{135}$$

Les limites pour l'inverse de l'aplatissement sont alors:

$$292{,}75 < \frac{1}{m_1} < 294{,}9 \, .$$

Elles contiennent l'aplatissement 293,5 géodésiquement probable.

2° Prenons:

$$J = \frac{1}{305,31} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{576,76} \quad \text{d'où} \quad \Lambda = \frac{1}{583,3} ,$$

alors:

$$0,981 > u > 0,967$$

et:

$$293,36 < \frac{1}{m_1} < 295,5 ,$$

ces deux limites contiennent encore les chiffres 293,5 de Clarke et 294 de Brown.

En résumé:

La seconde approximation diminue de quelques unités le chiffre obtenu en première approximation pour l'inverse de l'aplatissement.

Pour donner plus de poids à cette proposition, nous déterminerons la constante Λ à partir des quantités les mieux connues, en tenant compte, aussi, des erreurs possibles dans l'estimation de ces dernières. Mais avant rapportons la variation de g à la latitude géographique.

§ 19. — Passage a la latitude géographique.

L'angle θ représentait le complément de la latitude géocentrique. Soit θ' la latitude géographique et ν l'angle de la normale à la surface ou verticale avec le rayon prolongé. On a:

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \theta' - \nu .$$

La formule qui termine le § 2 II peut s'écrire maintenant:

$$\frac{1}{c^2 \nu} = 1 + \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 .$$

Dans l'estimation de l'angle ν, nous négligerons les termes en ω^4. On trouve alors:

$$s\nu = 2\omega^2 a \, s\theta \, c\theta ,$$

puis, en négligeant toujours les termes en ω^4:

$$c^2\theta = s^2\theta'(1 - 4\omega^2 a\, c^2\theta') ,$$
$$s^2\theta = c^2\theta'(1 + 4\omega^2 a\, s^2\theta') .$$

La variation de g avec θ était donnée par la formule (107). Incorporons Λ à X et Λ^2 à Y pour simplifier l'écriture et représentons par g_P la pesanteur au pôle, par g_E la pesanteur à l'équateur. La relation (107) s'écrit:

$$\frac{g}{g_P} = 1 - \mathrm{X} s^2\theta + \mathrm{Y} s^2\theta\, c^2\theta ,$$

X est de l'ordre de ω^2, Y de l'ordre de ω^4. En passant à θ', on trouve à ω^6 près:

$$\frac{g}{g_P} = 1 - \mathrm{X} c^2\theta' + (\mathrm{Y} - 4\omega^2 a \mathrm{X}) s^2\theta'\, c^2\theta' .$$

Enfin en comparant g à g_E on trouve facilement:

$$\frac{g}{g_E} = 1 + \alpha s^2\theta' + \beta s^2\theta'\, c^2\theta' . \tag{136}$$

Les coefficients α et β se calculent à partir des relations (108) et (109), ils ont les deux valeurs stokiennes:

$$\alpha = \Lambda(4 - u) + 3\Lambda^2\left(7 + 2u + v - \frac{2}{7}u^2\right) , \tag{137}$$

$$\beta = \Lambda^2(-9 + 2u + 5u^2 + 21v) . \tag{138}$$

Les inégalités (90) montrent que le coefficient β est toujours négatif, tandis que α est toujours positif.

La variation de la pesanteur avec la latitude géographique θ' *s'exprime ainsi, à la surface d'une planète:*

$$\frac{g}{g_E} = 1 + \alpha s^2\theta' + \beta s^2\theta'\, c^2\theta' , \tag{139}$$

le nombre α *est positif, le nombre* β *négatif.*

Le résultat du § 10 se rapportait à la colatitude géocentrique θ; il est intéressant de les rapprocher. Différents auteurs donnent, pour la terre, une formule *analogue* à (138) avec des valeurs numériques de α et de β[1]. Mais le coefficient β y est quelquefois mentionné avec un écart possible supérieur à sa valeur absolue, par exemple:

$$-\underset{\pm 52}{0{,}000008} \; ,$$

de sorte qu'il paraîtrait pouvoir être positif.

La formule (138) montre qu'il est, pour la terre, compris entre les limites:

$$-0{,}00004 < \beta < -0{,}00002 \; .$$

Puisque nous en sommes à ces évaluations numériques, disons aussi que la différence entre la surface des océans et l'elliproïde de comparaison qui lui est tangent au pôle et à l'équateur atteint son maximum à 45°. Cette différence est au plus de 17 mètres. On le voit par (83) et (89). L'océan est au-dessous de l'ellipsoïde fictif comme Callandreau l'a remarqué, mais le chiffre de 9 mètres indiqué par cet auteur me paraît difficile à vérifier par ma méthode.

§ 20. — Rappel de quelques formules.

La pesanteur au pôle de la surface libre était donnée par les formules du § 12, II dont on déduit:

$$g_P t_1^2 = i M h \; , \tag{140}$$

h est une constante stokienne qui a la valeur:

$$h = 1 - 2\Lambda u + 8\Lambda^2\left(\frac{2}{7}u^2 - v\right) \; . \tag{141}$$

La constante Λ s'est introduite par l'équation:

$$2\Lambda i M = \omega^2 t_1^3 \; . \tag{142}$$

[1] *Encycl. der Math. Wiss.* Bd. VI, 1 b. H 2. 1910, p. 95.

Divisons membre à membre les équations (140) et (142):

$$2\Lambda g_{\mathrm{P}} = h t_1 \omega^2 \,, \tag{143}$$

et posons:

$$r = \frac{2}{7} u^2 - v \,. \tag{144}$$

Les formules (100), (137), (141), donnant l'aplatissement m, les coefficients α et h, s'écrivent:

$$m = \Lambda(1 + u) + \Lambda^2(3 + 3u - r) \,, \tag{145}$$

$$\alpha = \Lambda(4 - u) + 3\Lambda^2(7 + 2u + r) \,, \tag{146}$$

$$h = 1 - 2\Lambda u + 8\Lambda^2 r \,. \tag{147}$$

§ 21. — Evaluation de trois termes du second ordre.

La constante Λ est de l'ordre de ω^2, elle a pour inverse le nombre 583 à une unité près, tandis que u reste compris entre 0,94 et 0,99. Les termes en Λ^2, c'est-à-dire en ω^4, des expressions précédentes de m, α, h sont faciles à calculer, on trouve:

$$m = \Lambda(1 + u) + \underset{\pm 5}{0{,}0000155} \,, \tag{148}$$

$$\alpha = \Lambda(4 - u) + \underset{\pm 20}{0{,}0000840} \,, \tag{149}$$

$$h = 1 - 2\Lambda u + \underset{\pm 30}{0{,}0000150} \,. \tag{150}$$

Pour simplifier, nous calculerons la valeur h:

$$\mathrm{L}h = - \underset{\pm 3}{0{,}00144} \,. \tag{151}$$

et nous décomposerons les relations (148) et (149) comme il suit:

$$m' = m - \underset{\pm 5}{0{,}0000155} \,, \qquad m' = \Lambda(1 + u) \,, \tag{152}$$

$$\alpha = \alpha' + \underset{\pm 20}{0{,}0000840} \,, \qquad \alpha' = \Lambda(4 - u) \,. \tag{153}$$

§ 22. — Les éléments fondamentaux.

Les éléments les mieux déterminés par les mesures astronomiques et géodésiques, j'entends, ceux pour lesquels l'erreur relative possible est la plus faible sont:

la vitesse angulaire ω,
la constante p de la précession générale dont on déduit J,
la pesanteur g que nous prendrons au pôle,
le rayon terrestre moyen; nous prendrons le rayon polaire t_1.

Nous déterminerons Λ à partir de là.

Nous affecterons d'une croix une valeur possible de chacun de ces éléments et nous introduirons des coefficients d'incertitude θ:

$$t_1 = t_1^+ \theta_t \,, \qquad J = J^+ \theta_J \,, \qquad g_P = g_P^+ \theta_g \,. \qquad \Lambda = \Lambda^+ \theta_\Lambda \,.$$

La valeur ω^2 est connue avec précision en temps sidéral, il est inutile d'introduire son θ.

J'espère que les géodésiens admettraient les chiffres suivants:

$$t_1 = \underset{\pm 5}{6356\,5} \quad \text{d'où} \quad t_1^+ = 6356{,}5 \,. \qquad L\theta_J = \pm\, 0.00003 \;;$$

$$g_P = \underset{\pm 5}{983.20} \quad \text{d'où} \quad g_P^+ = 983{,}20 \,. \qquad L\theta_g = \pm\, 0{,}00003 \,.$$

Rappelons aussi les chiffres, dont le second sera discuté plus loin:

$$L\omega^2 = \bar{9}.72571 \,, \qquad J^+ = \frac{1}{305{,}31} \,, \qquad L\theta_h = \pm\, 0{,}00003 \,.$$

Ceci étant admis, la relation (143) donne lieu à deux équations

$$L\Lambda^+ = Lt_1^+ + L\omega^2 + Lh - L2 - Lg_P^+ \,. \tag{154}$$

$$L\theta_\Lambda = L\theta_t + L\theta_h - L\theta_g \,. \tag{155}$$

On obtient ainsi une valeur possible de Λ et son écart:

$$\frac{1}{\Lambda^+} = 583{,}7 \,. \quad (156) \qquad L\theta_\Lambda = \pm\, 0{,}00009 \,. \quad (157)$$

relations qui se résument en les inégalités très resserrées:

$$583{,}55 < \frac{1}{\Lambda} < 583{,}8 \ . \qquad (158)$$

La relation (132) déterminera une valeur possible de u:

$$\mathrm{L\,J}^{+} - \mathrm{L}\Lambda^{+} + \mathrm{L}(1 + 4\mathrm{J}^{+}) \geqq \mathrm{L}f(u)$$
$$\geqq \mathrm{L\,J}^{+} - \mathrm{L}\Lambda^{+} + \mathrm{L}(1 + 4\mathrm{J} - 4{,}66\Lambda^{+}) \ , \qquad (159)$$

et l'on trouve, en introduisant les θ et faisant passer $\mathrm{L}\theta_{\mathrm{J}}$ entre les signes d'inégalités:

$$\underset{\pm 11}{0{,}28709} \geqq \mathrm{L}f(u) - \mathrm{L}\theta_{\mathrm{J}} \geqq \underset{\pm 11}{0{,}28365} \ . \qquad (160)$$

Pour simplifier la discussion, envisageons maintenant différents aplatissements m, ils fournissent des valeurs de u par les équations (152), et portons ces valeurs de u dans (160). Passant ensuite la valeur $\mathrm{L}f(u)$ dans les deux termes extrêmes, nous aurons autant de limites pour le facteur d'incertitude θ_{J}. Certaines limites de θ_{J} seront rejetées par l'astronomie, ainsi que les aplatissements correspondants.

§ 23. — Deux tableaux.

Mettons en regard: l'inverse de l'aplatissement supposé, les valeurs correspondantes de u par les relations (152) et (153) de $\mathrm{L}f(u)$ et de α:

$\frac{1}{m}$	u	$\mathrm{L}f(u)$	α
299	0,943	0,27705	0,005321
298	0,949	0,27862	0,005311
297	0,956	0,28061	0,005299
296	0,960	0,28146	0,005292
295	0,9695	0,28425	0,005275
294	0,976	0,28601	0,005265
293	0,983	0,28787	0,005253

Transportons ces valeurs de $\mathrm{L}f(u)$ dans la relation (160).

Nous reproduisons de part et d'autre le dernier chiffre de l'inverse de l'aplatissement:

$$
\begin{array}{rlcrl}
9 & +0{,}01004 & & +0{,}00660 & 9 \\
8 & +0{,}00847 & & +0{,}00503 & 8 \\
7 & +0{,}00648 & & +0{,}00304 & 7 \\
6 & +0{,}00533 & \geqq -L\theta_J \geqq & +0{,}00189 & 6 \\
5 & +0{,}00284 & & -0{,}00060 & 5 \\
4 & +0{,}00108 & & -0{,}00236 & 4 \\
3 & -0{,}00078 & & -0{,}00422 & 3
\end{array}
$$

Si l'on suppose $L\theta_J = 0$, c'est-à-dire si l'on prend $J = J^+$, il faut que sur une même ligne le premier chiffre soit positif, le second négatif.

Les chiffres 295 et 294 *conviennent, les autres sont exclus.* Les valeurs correspondantes de α rendent compte assez exactement des variations de g avec la latitude.

La relation (139) donne pour $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = 1 - \frac{g_P}{g_E} .$$

La valeur $\alpha = 0{,}005265$ qui correspond à 294 donne pour la pesanteur à l'équateur le chiffre:

$$g_E = \underset{\pm 5}{978.05} ,$$

que les mesures confirment. Helmert donnait autrefois $\alpha = 0{,}005302$, mais en 1915, il indiquait 0,005285. Le chiffre 0,005265 serait mieux en accord avec la précession.

Mais, avant tout, il faut discuter l'erreur possible sur J.

§ 24. — L'ÉCART POSSIBLE DANS LES MESURES DE PRÉCESSION.

La constante J représente dans ce mémoire le rapport:

$$J = \frac{C - A}{C} .$$

Cette valeur J est liée à une autre J_1, par la relation:

$$J = \frac{J_1}{1 - \frac{2}{3} J_1} .$$

La constante J_1 est proportionnelle à la valeur p de la précession générale et l'on a:

$$866135 \frac{\mu}{1 + \mu} + 4871,05 = \frac{p}{J_1} .$$

La constante μ représente le rapport de la masse de la lune à celle de la terre.

D'après MM. Hinks et Brown on a:

$$\mu = \frac{1}{\underset{\pm 5}{81,53}} .$$

et la veleur p est exprimée en seconde d'arc par année au moyen de la relation bien connue de Newcomb:

$$p = 50'',2564 + 0'',000222 \, (T - 1900) .$$

1° Prenons T = 1900. On obtient, alors,

$$J_1 = \frac{1}{\underset{\pm 13}{305.75}} . \qquad J = \frac{1}{\underset{\pm 14}{305.08}} ,$$

ce qui donne:

$$0,00016 < L\theta_J < 0,00051 .$$

2° M. de Sitter estime que p est déterminé par les observations astronomiques à 0'',1 près par siècle, c'est-à-dire à 0'',001 près par année, ce qui donne:

$$- 0,00001 < L\theta_J < 0,00001 .$$

3° Suivant M. de Sitter, la théorie d'Einstein apporte à la précession générale calculée par la théorie newtonienne une correction de 1'',91 par siècle, soit 0'',0191 par année. Prenons 2'',

$$- 0,00020 < L\theta_J < + 0,00020 .$$

4° Il faut tenir compte de ce que les valeurs de L $f(u)$ ont été calculées dans l'hypothèse $\psi = 1$; si ce coefficient a ses valeurs extrêmes 0,99901 et 1,00075, cela apporte au chiffre du tableau une correction de $\pm$ 0,00043 au plus.

5° Il faut ajouter $\pm$ 0,00011 à ces mêmes chiffres à cause des coefficients d'incertitude θ_Δ, ... Si l'on ajoute $+ \mathrm{L}\,\theta_\mathrm{J}$ dans les nombres du tableau, on trouve, en fin de compte, pour ceux-ci une altération comprise entre:

$$-\,0{,}00075 \quad \text{et} \quad +\,0{,}000126\ ,$$

tandis que le terme $-\,\mathrm{L}\,\theta_\mathrm{J}$ est remplacé par zéro. Un examen du tableau montre que le chiffre 294 reste en tout état de cause possible, mais 295 pourrait être impossible et 293 possible.

Voici quelques aplatissements admis au cours des cent dernières années. Nous indiquons l'inverse de l'aplatissement:

Bessel	299	en	1841,
Clarke	293,5	»	1880,
Helmert	298,3	»	1907,
Hayford	297	»	1909,
Helmert	296	»	1915.

Puis M. E. Brown, après avoir admis le chiffre 297, a montré en 1915 que 294 convenait mieux à la théorie de la lune.

Si je ne fais erreur, l'aplatissement de Clarke avait été abandonné pour des raisons de mécanique céleste. Ces raisons étaient-elles décisives ?

§ 25. — Conclusion.

Si l'on s'en tient aux nombres entiers, l'aplatissement:

$$\frac{1}{294}$$

est, en tout état de cause, compatible avec les mesures fondamentales. Les chiffres:

293 et 295

pourraient éventuellement convenir aussi. Les autres nombres sont exclus.

L'accord entre la théorie de la précesion et la géodésie se réalise en seconde approximation et le désaccord que soulignait Poincaré s'explique par l'influence des termes en la quatrième puissance de la vitesse angulaire.

Il n'est pas nécessaire de renoncer à l'hypothèse de la fluidité du globe considéré dans son ensemble pour expliquer la divergence en question, il n'est pas nécessaire non plus de tout reprendre dans la gravifique d'Einstein.

Le problème posé par d'Alembert, de l'accord entre les mesures géodésiques et les mesures précessionnelles, semble donc aujourd'hui résolu par le chiffre 294.

Poincaré, il est vrai, aimait à répéter qu'il n'y a pas de problème important qui soit résolu, mais qu'il y a des problèmes plus ou moins résolus.

Cette recherche dont l'intérêt est avant tout mathématique n'a visé qu'à mieux résoudre le problème des figures d'équilibre dont dépendent les figures planétaires et la géodésie supérieure.

Prise dans son ensemble, la terre est un cosmos, elle n'a que les apparences d'un chaos. Sa théorie mathématique, plus poussée encore, permettra un jour, nous le croyons, de débrouiller l'écheveau des questions géologiques primordiales[1].

[1] Je remercie M[lles] Danoz et Neumann, MM. Pittet et Kaiser qui ont établi des tables de la fonction $\mathrm{L}\,f\,(u)$ à 7 décimales pour les 51 valeurs de u: 0,940, 0,941, ..., 0,989, 0,990 et cela dans les trois hypothèses sur ψ du § 13. J'ai fait le reste des calculs avec la table de logarithmes Dupuis à 5 décimales. Il serait bon que mes calculs numériques fussent repris à 7 décimales en guise de vérification.