Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 11 (1929)

Artikel: Sur une nouvelle méthode en géodésie supérieure
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740998

elle marque une reprise atténuée et plus tardive de la poussée orogénique.

OUVRAGES CITÉS:

1. D. HOLLANDE. *Géologie de la Corse.* Bull. Soc. Sc. hist. et nat. de la Corse Bastia, XXXV^e année, Grenoble, Allier frères, 1918.
2. Carte géologique au 80.000^e, feuille Corte, 1924. Terrains sédimentaires par E. Maury.
3. P. TERMIER et E. MAURY. *Nouvelles observations dans la Corse Orientale.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 186, p. 1077, 1168, 1247, 1324, 1393; 23, 30 avril, 7, 14, 21 mai 1928.
4. R. STAUB. *Der Deckenbau Korsikas und sein Zusammenhang mit Alpen und Apennin.* Vierteljschr. d. Naturf. Ges. Zurich. LXXIII, 1928.

Laboratoire de Géologie de l'Université de Genève.

R. Wavre. — *Sur une nouvelle méthode en géodésie supérieure.*

Dans plusieurs notes antérieures nous avons exposé quelques résultats généraux, nouveaux à notre connaissance, pour l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton. Notre méthode consiste essentiellement à séparer les conditions relatives à l'intérieur de l'astre, qui se traduisent par une équation différentielle, et les conditions relatives à la surface libre. Ces dernières s'expriment par deux relations intégrales.

Si l'on considère une planète de faible aplatissement la relation différentielle donne en première approximation l'équation de Clairaut-Radau relative à la géodésie comme nous l'avons montré dans notre dernière note [1].

Nous allons faire voir, ici, sommairement, que les deux relations intégrales permettent de coordonner quelques résultats classiques et d'en obtenir de nouveaux.

Soient: S la surface libre, T le volume, M la masse totale, ω la vitesse angulaire d'une planète. Soient, encore, l la distance d'une particule à l'axe polaire, r la distance d'un point potentié

[1] C. R. Soc. phys. Genève. Vol. 45, n° 3, août-décembre 1928, p. 143.

P à un point potentiant P′, puis g l'intensité de la pesanteur sur S, U^0 le potentiel newtonien au pôle de la surface libre et, enfin, i la constante de l'attraction universelle. Une des relations intégrale est celle de Poincaré:

$$\int\int g\,dS + 2\omega^2 T - 4\pi i M = 0 \,. \tag{1}$$

L'autre est nouvelle à notre connaissance:

$$\int\int \frac{g}{r}\,dS + 2\pi\omega^2 l^2 - 4\pi U^0 + 2\omega^2 \int\int\int \frac{dT}{r} = 0 \,. \tag{2}$$

Cette relation vraie sur S *est encore vraie lorsque le point, potentié est intérieur à* S. *Elle est vraie aussi en remplaçant* S *par toute autre surface* S′ *équipotentielle pour le champ de la pesanteur et tout entière extérieure à l'astre.*

Nous pouvons donc développer $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de la distance du point potentié au centre de l'astre et annuler les coefficients de toutes ces puissances dans le développement du premier membre de l'équation (2), cela nous fournira une suite dénombrable d'équations qui seront toutes, comme la relation (2), indépendantes de la manière dont les densités se répartissent à l'intérieur de l'astre. Nous avons conduit ce calcul en première approximation dans le cas intéressant pour la géodésie où l'aplatissement est faible et la rotation lente. Soit donc τ le rayon d'une sphère entièrement intérieure à S et centrée au centre de l'astre. Soient t le rayon polaire d'une surface d'égale densité et $t + \varepsilon$ un rayon quelconque de la même couche. Dans ce qui suit t se rapportera toujours à S.

En appelant X_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre, l'inverse de la distance des points P et P′ est

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t+\varepsilon}\left[X_0 + X_1\frac{\tau}{t+\varepsilon} + \ldots + X_n\left(\frac{\tau}{t+\varepsilon}\right)^n + \ldots\right]$$

et en négligeant les termes du second ordre en ε, $\frac{d\varepsilon}{dt}$, ω^2, on peut écrire aussi,

$$g = g_0\left(1 - \frac{d\varepsilon}{dt}\right), \qquad dS = (t+\varepsilon)^2\, d\Sigma \,,$$

l'indice ^{0} affectant g se rapportera au pôle tandis que l'indice $_1$ affectant g ou ε se rapportera à l'équateur; $d\Sigma$ est ici l'élément de la sphère unité.

On a, à cet ordre d'approximation, comme on le vérifie aisément

$$\omega^2 \iiint \frac{dT}{r} = 2\pi\omega^2 t^2 - \frac{2\pi}{3}\omega^2\tau^2 .$$

Aucune difficulté de convergence du développement de $\frac{1}{r}$ *ne se présente puisque le rapport*

$$\frac{\tau}{t+\varepsilon}$$

est toujours inférieur à un et c'est là un des avantages de cette méthode.

L'identification des mêmes puissances de t donne tout d'abord les équations suivantes

$$\iint \left[(n-1)\frac{\varepsilon}{t} + \frac{d\varepsilon}{dt}\right] X_n \, d\Sigma = 0 \qquad (3)$$

pour $n = 1, 3, 4, 5, \ldots$.

Mais en se plaçant sur une surface extérieure S', en introduisant l'aplatissement $e = \frac{\varepsilon}{t}$ et le polynôme harmonique P_n associé à X_n

$$P_n = t^n X_n$$

les équations (3) s'écrivent sous la forme suggestive

$$\iint \frac{\partial (e P_n)}{\partial t} d\Sigma = 0 .$$

On en tire très facilement le théorème de Laplace sous la forme suivante: *Si la surface libre est de révolution, elle est ellipsoïdale.*

En supposant la stratification ellipsoïdale, les équations relatives à τ^0 et τ^2 et à la relation de Poincaré donnent, comme on le vérifie aisément:

$$2\frac{\varepsilon_1}{t} = t\frac{\omega^2}{g_0} + \frac{iM}{g_0 t^2} - 1 \tag{4}$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = 2t\frac{\omega^2}{g_0} + 1 - \frac{iM}{g_0 t^3} \tag{5}$$

$$3U^0 t = g_0 t^2 + 2iM\ . \tag{6}$$

L'équation (4) donne *une valeur exacte de l'aplatissement* $\frac{\varepsilon_1}{t}$ complètement indépendante de la manière dont la matière est répartie à l'intérieur de l'astre.

L'équation (5) donne la variation de l'aplatissement des couches d'égale densité au voisinage de la surface libre.

Enfin, l'équation (6), vraie au même ordre d'approximation, lie t, U^0, M, g_0 quel que soit ω très petit.

Le théorème de Clairaut s'obtient en additionnant membre à membre (4) et (5)

$$\frac{\varepsilon_1}{t} + \frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g_0}\ . \tag{7}$$

Cette équation s'écrit encore

$$e_1 + \frac{g_0 - g_1}{g_0} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g_0} \tag{8}$$

elle est très utile en géodésie, mais nous venons de le voir, les équations (4) et (5) entrent plus dans le détail de l'équilibre.

Remarque: 1° Une étude en seconde approximation est aussi facilitée par cette méthode.

2° L'équation (2) dérivée suivant la normale intérieur à S au point potentié donne *l'équation de Fredholm*, où ψ est l'angle de la normale avec le rayon r

$$g - \frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\cos\psi}{r^2}g\,dS = 2\omega^2 l\frac{dl}{dn} + \frac{\omega^2}{\pi}\frac{d}{dn}\int\int\int\frac{dT}{r}\ . \tag{9}$$

c'est l'équation que l'on rencontre dans le problème intérieur de Neumann. $\lambda = \frac{1}{2\pi}$ est une valeur fondamentale.

3° Cette méthode satisfait au desideratum formulé par Tisserand[1] à l'égard de la théorie de Laplace, car le développement en polynômes de Legendre est toujours convergent. Poincaré employait encore un développement divergent.

W.-H. Schopfer. — *Remarques théoriques sur la question du métabolisme des sexes.*

En 1880, Geddes et Thompson (The evolution of sex) furent les premiers, semble-t-il, à rechercher une distinction générale des sexes en disant que le ♂ est généralement plus catabolique, destructeur que la ♀, chez laquelle les phénomènes d'anabolisme, de synthèse dominent. Cette théorie, très séduisante dans sa généralité fut acceptée par des nombreux biologistes et le plus souvent elle est rappelée sans citation d'auteur. Dans notre travail [2] nous l'avons exposée, estimant que même présentée d'une façon générale et vague, elle contient une part de vérité que l'expérimentation ne peut que confirmer. Nous voulons ici préciser notre point de vue.

Dans ses « Eléments de biologie générale », 1928, p. 204, E. Rabaud, en étudiant la nature et l'origine de la sexualité, conteste la valeur de cette théorie en disant que les deux sexes ne diffèrent pas toujours d'une façon marquée par l'intensité de leur métabolisme, preuve en seraient par exemple les Mucorinées.

Il est évident qu'exprimée d'une façon catégorique, en insistant sur une opposition de caractères, la théorie de Geddes et Thompson aboutit à un non sens. La matière vivante est le siège de phénomènes d'anabolisme et de catabolisme, s'équilibrant ou non, et *cela chez les individus des deux sexes.* Ce problème du métabolisme des sexes rappelle, dans une certaine mesure, celui de la dualité des êtres vivants (Dumas et Boussingault, 1841) alors que l'on voulait opposer la plante, réductrice, anabolique, à l'animal, catabolique et désassimilateur, les deux se complétant. Cette théorie, vivement combattue

[1] TISSERAND. *Traité de mécanique céleste*, T. II, p. 317.
[2] Bull. Soc. Bot. Genève, t. 20, p. 150 (1928).