Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 11 (1929)

Artikel: Sur les figures d'équilibre et la géodésie

Autor: Wavre, Rolin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740994

SUR
LES FIGURES D'ÉQUILIBRE ET LA GÉODÉSIE

PAR

Rolin WAVRE

§ 1. — INTRODUCTION.

Dans deux articles antérieurs [1] j'ai développé une méthode de résolution du problème des figures planétaires en première et seconde approximation. Je cherchais avant tout à satisfaire au besoin de rigueur et de généralité qu'on éprouve dans toute recherche mathématique. Cette rigueur a conduit, chose intéressante, a plus de simplicité.

Je vais tendre maintenant vers les applications à la géodésie en mettant les équations obtenues sous une forme telle que leur sens concret apparaisse facilement. Il faudra faire ressortir les quantités physiquement mesurables et comparer la solution théorique obtenue avec les mesures empiriques de la géodésie. Il s'agira de voir s'il est possible de coordonner les mesures de l'aplatissement terrestre, celles des variations de la pesanteur, avec la théorie de la précession des équinoxes.

Ce problème posé par d'Alembert n'est pas résoluble par la première approximation. Poincaré l'a bien démontré [2]. Mais nous montrerons qu'en seconde approximation le désaccord entre les mesures géodésiques et la théorie de la précession disparaît.

[1] I. *Archives* (V), 11, p. 131 (1929).
II. » » » Suppl., p. 19 (1929).

[2] POINCARÉ, *Figures d'équilibre*, p. 96. Paris, 1902, G. Naud.

Pour cela, il va falloir discuter d'une manière assez approfondie une équation (85) qui pour la deuxième approximation joue un rôle analogue à l'équation de Clairaut pour la première. Cette recherche des figures théoriques doit être d'autant plus méticuleuse que les mesures géodésiques et astronomiques qu'on désire expliquer et retrouver deviennent elles-mêmes plus précises grâce au développement considérable de la technique.

S'il persistait, sur un point, un désaccord très faible entre la théorie et les mesures, il faudrait tenir compte des faits suivants :

1° La Terre n'est pas partout comparable à un fluide même visqueux.

2° L'hétérogénéité de la croûte, océan, montagne, n'est pas négligeable en seconde approximation.

3° Il peut exister des déformations à longues périodes d'origine astronomique.

4° La gravifique newtonienne n'est qu'approchée, on le sait aujourd'hui, et il faudrait, faute de pouvoir reprendre le problème dans la gravifique d'Einstein, ce qui serait très compliqué, au moins indiquer la correction relativiste à faire subir aux mesures géodésiques et à celles de la précession.

Sans viser à être encyclopédique, je voudrais néanmoins donner de la partie classique du sujet une vue pleine. A cette fin je reprendrai, en la complétant un peu, la discussion, en première approximation, des variations de l'aplatissement des couches d'égale densité avec la profondeur.

Notre méthode diffère beaucoup de celle de Callendreau [1] et de M. Véronnet [2] et nos résultats diffèrent un peu des leurs.

Enfin, les quatre articles que je publie sur ce sujet formeront un tout, je ferai de nombreux renvois aux deux mémoires antérieurs I et II et les références aux articles précédents seront suivies des chiffres I et II indiquant ces deux mémoires.

[1] CALLENDREAU, *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes.* Annales de l'Observatoire de Paris, 19, 1889.

[2] VÉRONNET, *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre.* Thèse. Paris, 1912, Gauthiers-Villars.

§ 2. — Discussion des variations de l'aplatissement en première approximation.

Comme précédemment, M sera la masse totale de l'astre, t le rayon polaire d'une couche de densité $\rho(t)$, $a(t)$ l'aplatissement de cette couche rapportée au carré de la vitesse angulaire, ω cette vitesse, D (t) la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t, i la constante de l'attraction universelle, A le moment d'inertie de l'astre par rapport à un diamètre équatorial, C le moment d'inertie par rapport à l'axe polaire. J'affecterai d'un indice (1) ce qui a trait à la surface libre t_1 et l'accent (′) indiquera une dérivation par rapport à t.

Pour simplifier le langage je m'exprimerai comme si je décrivais l'axe polaire de l'infini au centre de l'astre, donc dans le sens des t décroissants. Ainsi quand je dirai qu'une quantité η croît, il faut entendre qu'elle croît de l'infini à la surface libre ou encore de la surface libre au centre de l'astre, qu'elle croît quand t décroît.

A l'extérieur de l'astre, les surfaces d'égale densité sont remplacées par les surfaces équipotentielles pour le champ de la pesanteur et dans le cas de la masse homogène les surfaces d'égale densité sont à l'intérieur remplacées par les surfaces d'égale pression.

Ces précautions de langage étant prises, partons de la troisième équation du système (9, I) qui s'écrit en a sous la forme connue dans la théorie classique:

$$D(2a + ta') = \frac{15}{8\pi i} + 3\int_t^{t_1} \rho a' \, dt \,. \tag{51}$$

Dérivée par rapport à t, cette relation donne l'équation de Clairaut:

$$2D'a + 6\rho a' + tDa'' = 0 \,. \tag{52}$$

D'autre part, en intégrant par partie le dernier terme de (51) et tenant compte de la formule classique:

$$\rho = D + \frac{1}{3} tD' \,, \tag{53}$$

on trouvera, après quelques transformations simples:

$$(\mathrm{D}a)' = 3\,t^{-6}\int_0^t t^5 a\rho' \, dt \; . \tag{54}$$

En dehors de l'astre, l'intégrale de l'équation (51) disparaît, car pour $t > t_1$ on a $\rho = 0$. L'aplatissement est alors régi par l'équation différentielle:

$$ta' + 2\,a = 5\lambda t^3 \; , \tag{55}$$

où λ représente une constante égale, en première approximation, à:

$$\lambda = \frac{1}{2\,i\mathrm{M}} \; . \tag{56}$$

L'équation (55) s'intègre facilement et donne, k étant une autre constante:

$$a = \lambda(t^3 - 3\,kt^{-2}) \; , \quad (57) \qquad ta' = 3\lambda(t^3 + 2\,kt^{-2}) \; , \quad (58)$$

et l'on a, comme on l'a vu, page 144, I, en première approximation:

$$k = -\frac{i}{\omega^2}(\mathrm{C} - \mathrm{A}) \; . \tag{59}$$

Pour transformer l'équation de Clairaut posons avec Radau:

$$\eta = t\frac{a'}{a} \; , \quad (60) \qquad \mathrm{G} = t\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} \; . \quad (60')$$

On obtient en η une équation différentielle du type de Riccati:

$$t\eta' = -\eta^2 - (5 + \mathrm{G})\eta - 2\mathrm{G} \; . \tag{61}$$

Une étude analytique de cette équation de Radau a été faite par Poincaré [1]. Nous n'en retiendrons ici que l'essentiel en simplifiant un peu les démonstrations au moyen des formules (51) et (54). Mais avant d'étudier l'équation (61) examinons

[1] POINCARÉ, *Figures d'équilibre*, p. 69-81.

des cas particuliers. La relation (53) permet d'écrire G sous la forme suivante:

$$G = 3\left(\frac{\rho}{D} - 1\right). \tag{62}$$

En dehors de l'astre $G = -3$ puisque $\rho = 0$. A l'intérieur $D \geq \rho$, l'égalité n'ayant lieu que pour la masse homogène.

Pour la masse homogène $G = 0$, dans l'astre.

Pour toute autre distribution $0 \geq G \geq -3$. Au centre $\rho = D$ et $G = 0$, pour $t = 0$. G tend toujours vers 0 avec t.

Un cas limite est à signaler, celui où la masse serait tout entière réunie au centre $t = 0$, c'est le cas de *Roche;* t_1 serait nul, et tout l'espace sauf l'origine devrait être considéré comme extérieur à l'astre.

Reprenons maintenant l'équation (61). Elle montre ceci:

si $\eta < -5$	alors	$\eta' < 0$	η croîtrait ;
si $-2 < \eta < 0$	alors	$\eta' > 0$	η décroîtrait.

Donc si η est sur l'intervalle i_1: $-\infty < \eta < 0$, η se rapproche de l'intervalle i_2: $-5 < \eta < -2$ et le point η resterait sur i_2 s'il s'y trouvait déjà ou s'il y parvenait. L'intervalle i_2 est attractif pour l'intervalle i_1. Si η était négatif pour une valeur particulière $t^+ \leq t_1$, on aurait donc:

$$\eta < -\alpha \qquad \text{pour} \qquad 0 < t \leq t^+ \leq t_1 \,,$$

α étant positif. On en déduirait les relations suivantes:

$$\frac{da}{a} < -\alpha\frac{dt}{t}\,, \qquad \frac{a}{a^+} > \left(\frac{t^+}{t}\right)^\alpha,$$

et a augmenterait et tendrait vers l'infini, ce qui est exclu *a priori.*

A l'intérieur de l'astre $\eta \geq 0$.

Je dis que η est positif $\eta > 0$ à l'extérieur de l'astre. En effet, dans ce domaine les équations (57) et (58) donnent:

$$\eta = 3\frac{t^5 + 2k}{t^5 - 3k}\,. \tag{65}$$

Pour $t = +\infty$, $\eta = 3$, et η ne pourrait changer de signe qu'une seule fois entre $t = +\infty$ et $t = t_1$, et cela quelle que soit la constante k.

Si η s'annulait pour une valeur $t^+ > t_1$ on aurait $\eta_1 < 0$, mais on a $\eta_1 \geq 0$.

Pour a et a' il en est de même. Pour $t = +\infty$, $a = +\infty$ et $a' = +\infty$, a et a' devraient changer de signe en même temps sans quoi η deviendrait négatif. Or cela n'est pas possible à l'extérieur de l'astre en vertu des expressions (57) et (58), à l'intérieur non plus car la première fois que a et a' s'annuleraient ensemble le premier membre de (51) serait nul et le second positif.

En résumé: on a toujours $a \geq 0$, $a' \geq 0$, $\eta \geq 0$.

Les couches ne sont pas allongées et l'aplatissement ne croît jamais, que l'astre soit en mouvement ou immobile, c'est un résultat de Clairaut.

La fonction a' n'étant jamais négative, la formule (54) donne:

$$(\mathrm{D}a)' \leq 0 \,. \tag{66}$$

Le produit Da ne décroît jamais. La relation (66) donne successivement:

$$\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} + \frac{a'}{a} \leq 0 \,, \qquad t\frac{a'}{a} \leq -\, t\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} \,,$$

ce qui revient à dire que η ne surpasse pas $-$ G. En définitive, on a pour toute valeur de t:

$$0 \leq \eta \leq -\,\mathrm{G} \leq 3 \,. \tag{67}$$

Cas particuliers:

Si la masse est *homogène*, $\mathrm{D}' \equiv 0$, $\mathrm{G} \equiv 0$, $\eta \equiv 0$, $a' \equiv 0$ à l'intérieur et les couches d'égale pression sont homothétiques.

Dans le cas de *Roche*, $\mathrm{C} - \mathrm{A} = 0$, $k = 0$, et l'on a $\eta \equiv 3$, $\mathrm{G} \equiv -3$ pour $0 < t$.

Réciproquement, si $\eta \equiv 0$, (61) implique $\mathrm{G} \equiv 0$, d'où $\mathrm{D}' \equiv 0$, la masse est homogène. Si $\eta \equiv 3$, (67) implique $\mathrm{G} \equiv -3$ ce qui n'est possible que dans le cas de Roche.

Sauf dans le cas de Roche $\mathrm{G} \to 0$, $\eta \to 0$ lorsque $t \to 0$.

Voici maintenant un renseignement que nous utiliserons plus tard: *La quantité $a\eta$ ne croît jamais.*

En effet, cette quantité est nulle au centre et, sauf si la masse est homogène, $a\eta \equiv 0$, on a $a\eta > 0$ pour $t < t_1$; je dis que cette fonction est bien monotone. Sans cela sa dérivée s'annulerait, sa dérivée logarithmique aussi. On aurait:

$$\frac{a'}{a} + \frac{\eta'}{\eta} = 0\,, \qquad t\frac{a'}{a} + t\frac{\eta'}{\eta} = 0\,, \qquad t\eta' + \eta^2 = 0\,.$$

Mais alors l'équation de Radau (61) donnerait:

$$\eta = \frac{-\,2\,G}{5 - (-\,G)}\,. \tag{68}$$

Or cette valeur de η qui annulerait la dérivée de $a\eta$ serait supérieure ou égale à la racine non nulle de:

$$\eta = \frac{2\,\eta}{5 - \eta}\,. \tag{69}$$

car $\eta \leq -G$ et le second membre de (68) est plus grand ou égal au second membre de (69). Or cette racine de (69) est égale à 3. La valeur (68) de η serait supérieure ou égale à 3 ce qui est impossible à l'intérieur de la masse. La fonction $a\eta$ est monotone, elle ne croît pas à l'intérieur ni à l'extérieur où a et η sont décroissants.

L'intérêt de cette remarque vient de ce que l'on ne sait pas si η est monotone. La fonction $a\eta$ s'écrit aussi ta'. Remarquons alors que $2a + ta'$ ne croît pas tandis que $D\,(2a + ta')$ ne décroît pas comme le montre la formule (51). De $\eta \leq 3$ on tire $(at^{-3})' \leq 0$, résultat classique.

De (5′) on déduit encore:

$$a\,(0) \geq \frac{15}{16\pi} \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{D\,(0)}\,. \tag{70}$$

l'égalité n'aurait lieu que pour la masse homogène.

§ 3. — Sur un changement de variable et une substitution de constantes.

Dans les équations fondamentales, système (9, I) et tableau T, page 38, II, la dérivée des fonctions a et e est toujours multipliée par t. Ces équations conserveront la même forme si on pose $t = t_1\tau$. Les accents (′) désigneront à l'avenir une dérivation par rapport à τ et l'on a bien:

$$t\frac{da}{dt} = \tau\frac{da}{d\tau} . \tag{71}$$

Ce changement de variable revient d'ailleurs à prendre t_1 pour unité de longueur. On reviendrait sans difficulté à l'ancienne unité, le centimètre, si l'on veut. La variable τ, rapport de deux longueurs, est sans dimension. La constante k s'exprimera utilement au moyen d'une autre constante u et k_2, page 30, II, au moyen d'une constante v par les formules:

$$k = -\frac{1}{3}ut_1^5 \quad (72) \qquad k_2 = \frac{2}{5}vt_1^{10} . \quad (73)$$

cela rend les formules homogènes, u et v seront des nombres arithmétiques.

La formule (65) devient pour $\tau \geq 1$:

$$\eta = \frac{3\tau^5 - 2u}{\tau^5 + u} , \tag{74}$$

et pour $\tau = 1$ on peut tirer u en fonction de η_1:

$$u = \frac{3 - \eta_1}{2 + \eta_1} . \tag{75}$$

La formule (57) devient après ces substitutions:

$$a = \lambda t_1^3(\tau^3 + u\tau^{-2}) . \tag{76}$$

La formule (75) montre que la constante u est comprise entre 0 et $\frac{3}{2}$, limites qu'elle ne peut atteindre que dans les cas particuliers de Roche $\eta_1 = 3$, $u = 0$ et de la masse homogène $\eta_1 = 0$, $u = \frac{3}{2}$. On a donc:

$$0 \leq u \leq \frac{3}{2} . \tag{77}$$

Une étude théorique délicate est encore nécessaire afin d'indiquer des limites assez resserées de la constante v et nous montrerons que u et v suffisent à donner la solution du problème en seconde approximation, les éléments stokiens, M, ω, t_1 étant supposés connus.

§ 4. — Ellipsoïdes de référence et corrections.

Mettons en évidence des ellipsoïdes $s(\tau)$ ayant même équateur et même pôle que les surfaces équipotentielles $S(\tau)$, en seconde approximation.

Soit $e_{\frac{\pi}{2}}$ l'aplatissement faible d'un ellipsoïde voisin d'une sphère.

La déformation à partir de la sphère rapportée au rayon de celle-ci, s'exprimera à la colatitude θ comme suit au 3^{me} ordre près en $e_{\frac{\pi}{2}}$:

$$e = e_{\frac{\pi}{2}} s^2\theta - \frac{3}{2} e^2_{\frac{\pi}{2}} s^2\theta c^2\theta . \tag{78}$$

Or la formule (49, II) peut s'écrire sous la forme *valable à l'extérieur :*

$$e = \lambda\omega^2[\alpha + \lambda\omega^2(\beta + \gamma)]s^2\theta - \lambda^2\omega^4\gamma s^2\theta c^2\theta \tag{79}$$

où α, β [1], γ sont des fonctions de t, donc de τ, définies à la page 31, II.

La déformation est de la forme générale:

$$e = \omega^2 x(\tau) s^2\theta + \omega^4 y(\tau) s^2\theta + \omega^4(\tau) s^2\theta c^2\theta ,$$

[1] Dans l'expression de β qui suit la formule (49, II) il faut lire $\frac{\beta}{2}$ au lieu de β; et dans la dernière équation du § 13, II, il faut multiplier par t le second terme du second membre.

et nous ne pouvons pas prendre le parti de faire $y(\tau) = 0$, comme Callendreau [1], pas même sur la surface libre. Ce coefficient $y(\tau)$ est ici :

$$\lambda^2(\beta + \gamma) \; .$$

et la fonction de τ : $\beta + \gamma$ n'est pas identiquement nulle. Cette remarque est essentielle et c'est cette fonction $y(\tau)$ qui augmentera l'aplatissement prévu par la précession jusqu'à rejoindre à peu près la valeur mesurée par les géodésiens.

Mettons en évidence dans l'expression (79) de la déformation e une partie provenant de l'ellipsoïde $s(\tau)$ et la correction $c(\tau, \theta)$ à faire subir à $s(\tau)$ pour retrouver la surface réelle $S(\tau)$. On doit écrire:

$$e = \lambda\omega^2[\alpha + \lambda\omega^2(\beta + \gamma)]s^2\theta - \lambda^2\omega^4\frac{3}{2}\alpha^2 s^2\theta c^2\theta - c(\tau, \theta) \; . \tag{81}$$

Les deux premiers termes répondent à l'ellipsoïde, au troisième ordre près, et la correction est:

$$c(\tau, \theta) = \lambda^2\omega^4\left(\gamma - \frac{3}{2}\alpha^2\right)s^2\theta c^2\theta \; . \tag{82}$$

si $c > 0$, l'ellipsoïde sera comprimé entre le pôle et l'équateur.

A l'intérieur on fera une séparation analogue à partir de l'expression (48, II) de e. La correction s'écrira:

$$c(\tau, \theta) = \omega^4 E s^2\theta c^2\theta \; , \tag{83}$$

avec:

$$E = \frac{35}{8}\left(e_4^{(2)} - \frac{12}{35}a^2\right) \; . \tag{84}$$

La fonction $c(\tau, \theta)$ est continue ainsi que ces dérivées partielles premières pour $0 < \tau < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, la dérivée $\frac{\partial^2 c}{\partial \tau^2}$ subit au contraire une discontinuité sur la surface libre si $\rho_1 \neq 0$. Les deux expressions: (82) pour l'extérieur, (83) pour

[1] CALLENDREAU. *Théorie de la figure des planètes*, p. 31 et 34.

l'intérieur, doivent être égales, ainsi que leurs dérivées premières $\frac{\partial c}{\partial \tau}$ sur la surface libre $\tau = 1$. Nous tirerons parti de cette remarque pour limiter les variations de v au § 6. Avant cela formons une équation fondamentale en E (τ).

§ 5. — Equation en E.

A l'intérieur de l'astre la fonction $e_4^{(2)}(\tau)$ est régie par la quatrième équation ($q = 4$) du tableau T page 28, II. Remplaçons $e_4^{(2)}$ par sa valeur en E tirée de (84), et l'équation en question se simplifiera beaucoup et donnera:

$$4\mathrm{E} + \tau\mathrm{E}' = \frac{3\tau^2}{\mathrm{D}}\int_\tau^1 \rho\tau^{-3}(-2\mathrm{E} + \tau\mathrm{E}')\,d\tau + \tau a'(2a + \tau a') \,. \tag{85}$$

Cette équation joue pour la seconde approximation le même rôle que l'équation (51) pour la première; dérivée par rapport à τ elle donnerait la relation analogue à celle de Clairaut. Une étude approfondie des solutions en E (τ) de l'équation (85) serait très délicate. Nous montrerons simplement ceci:

1° $\mathrm{E}_1 \geq 0$: la surface libre est un ellipsoïde comprimé entre le pôle et l'équateur; résultat établi déjà par Callendreau.

2° $\mathrm{E}' \geq 0$: cette compression diminue quand on passe de la surface libre aux surfaces intérieures voisines.

1° Posons, en effet:

$$\tau\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{E}} = \Xi \,, \qquad 4 + \Xi = \Xi^+ \,, \qquad \mathrm{F} = \tau a'(2a + \tau a') \,.$$

l'équation (85) devient, en remplaçant E′ par sa valeur en Ξ^+:

$$\mathrm{E}\Xi^+ = \frac{3\tau^2}{\mathrm{D}}\int_\tau^1 \rho\tau^{-3}\mathrm{E}(-6 + \Xi^+)\,d\tau + \mathrm{F} \tag{86}$$

F est une fonction de τ positive ou nulle de sorte que pour $\tau = 1$ on doit avoir $\mathrm{E}_1\Xi^+ \geq 0$. Si E_1 était négatif, on aurait $\Xi^+ \leq 0$. La parenthèse sous le signe intégral serait négative pour τ inférieur et voisin de 1; l'intégrale serait positive, E' serait positif, E décroîtrait. Le second membre de (86) resterait positif, E resterait négatif, Ξ^+ resterait négatif de $\tau = 1$ à $\tau = 0$, mais alors, on devrait avoir:

$$\tau \frac{E'}{E} < -4 \qquad \text{ou} \qquad \frac{-E'}{-E} < -\frac{4}{\tau} .$$

En intégrant sur l'intervalle positif (τ, 1), on obtiendrait:

$$|\, L(-E)\,|_\tau^1 < -4\,|\, L\tau\,|_\tau^1 \qquad \text{ou} \qquad -E > -E_1 \left(\frac{1}{\tau}\right)^4 ,$$

— E augmenterait indéfiniment, ce qu'il faut exclure. On a donc bien $E_1 \geq 0$.

2° Nous avons vu que la quantité $\tau a' (2a + \tau a')$ ne croît jamais. La fonction $F(\tau)$ n'augmente donc pas. Cette remarque faite écrivons (85) sous la forme:

$$4E + \tau E' = F + H , \tag{87}$$

où H représente le terme qui contient l'intégrale, soit:

$$H = \frac{3\tau^2}{D} \int_\tau^1 \rho \tau^{-3} (-2E + \tau E')\, d\tau . \tag{88}$$

On sait que E_1 est positif ou nul. Si E_1' était négatif, la parenthèse dans (88) serait négative pour τ voisin de 1, H serait négatif, H diminuerait. E augmenterait, tandis que F n'augmente pas, alors la relation (87) montre que E' diminuerait. E' resterait négatif, la parenthèse resterait négative et la croissance de E ne cesserait pas jusqu'à $\tau = 0$. Or il y a là une absurdité. En effet, envisageons le terme H comme connu et intégrons l'équation (87) en E. On trouve:

$$E = \tau^{-4} \int_0^\tau \tau^3 (F + H)\, d\tau ,$$

mais H, nous l'avons vu, serait négatif et l'on aurait:

$$E < \tau^{-4} \int_0^\tau \tau^3 F \, d\tau \leq \frac{1}{4} F(\tau) \; .$$

Mais $F(\tau)$ diminue, on le sait, et tend vers zéro, comme $\tau a'$ lorsque τ tend vers zéro. E ne pourrait pas augmenter à partir de sa valeur positive ou nulle sur la surface libre. On a donc bien $E_1' \geq 0$.

Un cas mérite une attention spéciale. Si la masse est homogène, $a' \equiv 0$, $F \equiv 0$, à l'intérieur de l'astre et l'équation (85) n'admet d'autre solution que $E \equiv 0$. En effet, elle coïncide dans ce cas avec l'équation en e_4 de la première approximation (10), page 39, I, et nous avons, en ce temps, montré que la solution était identiquement nulle. La correction serait nulle, on retrouve ainsi l'ellipsoïde de Maclaurin.

§ 6. — Limitation de la constante v.

A l'extérieur de l'astre $\rho = 0$, et l'équation (85) en E s'intègre facilement, la fonction E s'obtient aussi à partir de (84) en remplaçant $e_4^{(2)}$ et a par leurs valeurs 47, II et 57. On trouve:

$$\frac{2E}{\lambda^2} = 3\tau^6 - 4u\tau - 3u^2\tau^{-4} - 14v\tau^{-4} \; . \tag{89}$$

Les relations $E_1 \geq 0$ et $E_1' \geq 0$ démontrées au § 5 donnent les limites de v suivantes:

$$-\frac{9}{28} + \frac{1}{14}u - \frac{3}{14}u^2 \leq v \leq \frac{3}{14} - \frac{2}{7}u - \frac{3}{14}u^2 \; , \tag{90}$$

et la constante u est elle-même comprise entre les limites (77):

$$0 \leq u \leq \frac{3}{2} \; . \tag{77'}$$

Cette limitation de v est suffisante car cette constante n'intervient que multipliée par ω^4.

§ 7. — Le nombre des constantes déduit du théorème de Stokes.

Le théorème de Stokes [1] s'énonce ainsi: le potentiel newtonien U ne dépend à l'extérieur de l'astre que de la surface libre S_1, de la vitesse angulaire ω et de la masse totale M. Or le potentiel newtonien détermine le potentiel de la pesanteur Φ:

$$\Phi = U + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) ,$$

et le potentiel Φ détermine les surfaces équipotentielles $\Phi =$ constante. Il résulte du théorème de Stokes que le potentiel U sur l'axe polaire, soit U_0, la pesanteur sur l'axe polaire $g_0 = -\frac{dU_0}{dt}$ et la déformation des surfaces équipotentielles à l'extérieur ne dépendent que de M, ω, t_1 et e_1. Or la surface libre est en seconde approximation:

$$e_1 = m_1 s^2\theta - n_1 s^2\theta\, c^2\theta .$$

Les données M, ω et t_1 mises à part, U_0, g_0, e ne dépendent que des deux constantes m_1 et n_1, pour $\tau > 1$. Nous avons vu que les constantes u et v jouent deux rôles bien distincts, par exemple dans (89). Elles remplacent m_1 et n_1. On pourrait exprimer u et v au moyen de m_1 et de n_1, ce sont des constantes stokiennes déterminées entièrement par les éléments de Stokes.

Pratiquement la surface libre n'est ni assez bien définie, montagnes, atmosphère, ni assez bien connue pour que nous puissions déterminer directement par S_1 les valeurs u et v. Ce qu'il nous faudra faire, c'est de montrer qu'on peut attribuer à M, i, t_1, u et v des valeurs qui rendent compte des mesures géodésiques, qui fournissent notamment un m_1 en accord avec la théorie de la précession.

Précédemment, page 30, II, nous avions apparemment trois constantes k, k_1 et k_2, mais tant pour U que pour e, k_1 entre toujours dans le groupe:

$$k' = k - 2\lambda\omega^2 k_1 . \qquad (91)$$

[1] Voir *Archives* (V) 10, p. 30-35 (1928).

Il n'y a là qu'une seule constante k'. Il y a plus, lorsque k intervient autrement que dans le groupement k', il est multiplié par ω^4 de sorte que, aux termes d'ordre ω^6 près, on pourra remplacer k par k'. Maintenant la relation 50, II, s'écrit:

$$k' = -\frac{i}{\omega^2}(C - A) , \tag{92}$$

et cette valeur a été identifiée en première approximation avec:

$$-\frac{1}{3} u t_1^5 .$$

Il n'y a donc bien que k', c'est-à-dire u et k_2, c'est-à-dire v, qui interviennent.

On vérifie ainsi le résultat théorique déduit du théorème de Stokes.

Introduisons encore pour la suite une expression Λ sans dimension, de l'ordre de ω^2 qui ne dépend que des éléments stokiens M, ω et t_1:

$$\Lambda = \lambda \omega^2 t_1^3 . \tag{93}$$

Ce n'est pas une constante nouvelle, c'est une notation abrégée.

§ 8. — Déformation a l'extérieur et pesanteur sur l'axe polaire.

Les équations (43) et (49) de l'article II donnent en u et v:

$$e = m(\tau) s^2\theta - n(\tau) s^2\theta c^2\theta , \tag{94}$$

$$m(\tau) = \Lambda(\tau^3 + u\tau^{-2}) + \Lambda^2\left(3\tau^6 + 3u\tau + v\tau^{-4} - \frac{2}{7}u^2\tau^{-4}\right) , \tag{95}$$

$$n(\tau) = \Lambda^2(3\tau^6 + u\tau - 7v\tau^{-4}) , \tag{96}$$

$$U_0 = \frac{iM}{t_1}\left[\tau^{-1} - \frac{2}{3}\Lambda u\tau^{-3} + \frac{8}{5}\Lambda^2\left(\frac{2}{7}u^2 - v\right)\tau^{-5}\right] , \tag{97}$$

$$g_0 = \frac{iM}{t^2}\left[\tau^{-2} - 2\Lambda u\tau^{-4} + 8\Lambda^2\left(\frac{2}{7}u^2 - v\right)\tau^{-6}\right] . \tag{98}$$

§ 9. — La surface libre et la pesanteur au pôle.

La surface libre correspond à la valeur $\tau = 1$, on a donc:

$$e_1 = m_1 s^2\theta - n_1 s^2\theta c^2\theta \;, \tag{99}$$

$$m_1 = \Lambda(1 + u) + \Lambda^2\left(3 + 3u + v - \frac{2}{7}u^2\right) \;, \tag{100}$$

$$n_1 = \Lambda(3 + u - 7v) \;, \tag{101}$$

$$g_0(1) = \frac{iM}{t_1^2}\left[1 - 2\Lambda u + 8\Lambda^2\left(\frac{2}{7}u^2 - v\right)\right] \;. \tag{102}$$

La valeur m_1 n'est autre que l'aplatissement de l'ellipsoïde s_1 de même pôle et de même équateur que la surface libre.

§ 10. — La variation de la pesanteur avec la latitude.

Soit g la pesanteur en un point quelconque P d'une surface équipotentielle τ. On a comme on sait:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{dt}{dn} \;,$$

dn étant un élément de normale en P allant de la surface t à la surface $t + dt$. On trouverait, tout calcul fait:

$$\frac{g}{g_0} = 1 - e - t\frac{\partial e}{\partial t} + e^2 + 2et\frac{\partial e}{\partial t} + \left(t\frac{\partial e}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)^2 \;, \tag{103}$$

ou en τ par l'intermédiaire de (94):

$$\frac{g}{g_0} = 1 - \Lambda X(\tau) s^2\theta + \Lambda^2 Y(\tau) s^2\theta c^2\theta \;, \tag{104}$$

$$X(\tau) = 4\tau^3 - u\tau^{-2} + \Lambda\left(5\tau^6 + 14u\tau - 3v\tau^{-4} - \frac{1}{7}u^2\tau^{-4}\right) \;, \tag{105}$$

$$Y(\tau) = 7\tau^6 + 14u\tau + 21v\tau^{-6} + u^2\tau^{-4} \;, \tag{106}$$

et sur la surface libre S_1 la pesanteur rapportée à la pesanteur au pôle s'écrira:

$$\frac{g(1)}{g_0(1)} = 1 - \Lambda X(1) s^2\theta + \Lambda^2 Y(1) s^2\theta c^2\theta \ , \tag{107}$$

$$X(1) = 4 - u + \Lambda\left(5 + 14u - 3v - \frac{1}{7}u^2\right) \ , \tag{108}$$

$$Y(1) = 7 + 14u + 21v + u^2 \ . \tag{109}$$

Si l'on tient compte de la limite inférieure de v (90), on voit que la fonction $Y(1)$ est toujours positive. De même Λ étant très petit et $u \leq \frac{3}{2}$, $X(1)$ est positif.

La variation de la pesanteur avec le complément θ de la latitude à la surface d'une planète est donnée par une expression de la forme:

$$\frac{g}{g_0} = 1 - x s^2\theta + y s^2\theta c^2\theta \ . \tag{110}$$

où les deux constantes x et y sont positives.

Il sera intéressant de comparer ce résultat théorique avec les formules empiriques fournies par les mesures des variations de la pesanteur à la surface terrestre, c'est ce que nous ferons à la fin de ce mémoire.

(A suivre.)