Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 11 (1929)

Artikel: Sur un procédé uniforme dans la recherche des figures planétaires
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740980

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UN PROCÉDÉ UNIFORME

DANS LA

RECHERCHE DES FIGURES PLANÉTAIRES

PAR

R. WAVRE

(Avec 1 fig.)

§ 1. — Le procédé.

Laplace et Poincaré, dans leurs remarquables travaux sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène, développent l'inverse de la distance en série de polynômes de Legendre et, pour calculer le potentiel newtonien dû à la matière présente, ils intègrent ce développement.

Or on sait que la série envisagée procède suivant les puissances: soit du rapport des distances à l'origine du point potentié et du point potentiant, soit du rapport inverse. Or, si le point potentié est à l'intérieur de la masse ou encore en certains points de la surface libre, il est impossible que ce développement converge toujours lorsque le point potentiant occupe une position quelconque intérieur à la masse. Tisserand [1] a signalé cette difficulté analytique et a formulé le desideratum que cette difficulté soit rigoureusement vaincue.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ NEUCHATEL

[1] Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, T. II, page 317.

Pour satisfaire au desideratum de Tisserand, nous détacherons par la pensée la partie centrale de l'astre, creusant ainsi une cavité, et nous remplacerons la matière enlevée par une couche de niveau située sur la périphérie de la cavité. Le point potentié restera dans la cavité et sera par conséquent plus rapproché de l'origine placée au centre de l'astre, que tout autre point potentiant. Le développement en les puissances du rapport des distances sera absolument et uniformément convergent. Cette méthode, comme on le verra, remédie au défaut signalé par Tisserand. Elle permet d'obtenir des équations nouvelles et de sérier les principaux résultats classiques.

§ 2. — Les relations générales.

Considérons une masse fluide hétérogène dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton et supposons que cette masse tourne tout d'une pièce autour d'un axe polaire oz avec une vitesse constante ω. Soient i la constante de l'attraction universelle, ρ la densité, V_1 le volume occupé par l'astre, U le potentiel newtonien, Φ le potentiel de la pesanteur et Q le potentiel de la force centrifuge.

Les trois équations tirées de l'hydrodynamique se résument, comme on sait [1], en la suivante:

$$\Phi = U + Q \,. \tag{1}$$

Le potentiel Φ ne dépend que de ρ, il est donc constant sur chaque surface d'égale densité. Ces surfaces, pour une planète, ont la connexité de la sphère; elles sont emboîtées les unes dans les autres et la densité croît de la surface au centre de l'astre.

En vertu de l'équation de Poisson, l'équation (1) implique celle-ci:

$$\Delta\Phi = -4\pi i\rho + 2\omega^2 \,. \tag{2}$$

[1] S'il y avait quelque difficulté à suivre les développements de ce paragraphe, le lecteur pourrait se référer à notre article « Sur la rotation permanente des planètes et la géodésie », *Archives* [5], 10, p. 19 (1928).

Soit S une des surfaces sur laquelle Φ soit constant. Si S est intérieure à l'astre, il s'agira d'une surface d'égale densité, si S est extérieure à l'astre, ce sera une surface fermée, fictive au sens matériel, qui sera équipotentielle pour le champ de la pesanteur. Soient S_1 la surface libre de la planète, Z la région qui sépare S et S_1, et V le volume intérieur à S. La masse totale M peut s'écrire sous la forme suivante:

$$M = \int\int\int \rho\, dV + \int\int\int \rho\, dZ \ .$$

Remplaçons dans la première intégrale ρ par sa valeur tirée de (2) et faisons usage de la formule du flux et de la divergence pour transformer cette intégrale. On trouve la relation, où $g = \frac{d\Phi}{dn}$ est l'intensité de la pesanteur:

$$\int\int g\, dS = 4\pi i M - 4\pi i \int\int\int \rho\, dZ - 2\omega^2 V \ .$$

Nous appellerons cette relation équation de Poincaré, bien que ce dernier n'ait pas creusé la cavité et qu'il n'ait formulé cette condition que pour $S \equiv S_1$, d'où $Z \equiv 0$.

Le potentiel U peut se décomposer de la même manière:

$$U = i\int\int\int \frac{\rho}{r}\, dV + i\int\int\int \frac{\rho}{r}\, dZ \ ,$$

r désignant la distance d'un point potentiant P′ à un point potentié P.

Dans la première intégrale remplaçons de nouveau ρ par sa valeur tirée de (2) et *supposons le point potentié* P *en dehors de S*, alors on peut écrire, en vertu d'une identité de Green et d'une propriété des potentiels de double couche:

$$\int\int\int \frac{\Delta\Phi}{r}\, dV = \int\int \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS \ .$$

Pour un point P extérieur à S on aura donc:

$$U = \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{g}{r}\, dS + i\int\int\int \frac{\rho\, dZ}{r} + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\int\int \frac{dV}{r} \ . \qquad (3)$$

Affectons d'un indice 0 les quantités U et g lorsqu'elles sont prises sur l'axe polaire. L'équation (1) s'écrit alors, puisque Q est nul sur oz:

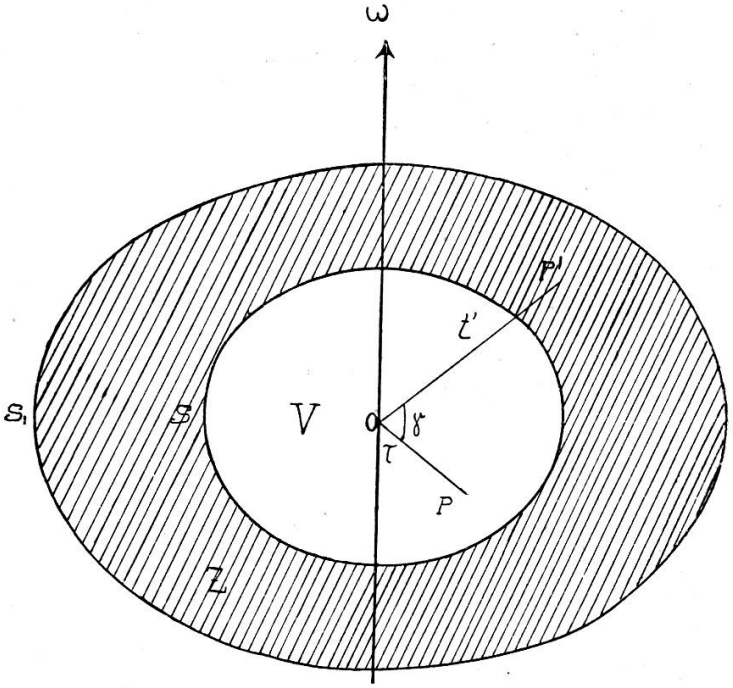
$$U_0 = U + Q \,. \tag{4}$$

Remplaçons U par cette valeur (4) dans l'équation (3) :

$$-U_0 + Q + \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{g}{r}\,dS + i\int\int\int \frac{\rho}{r}\,dZ + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\int\int \frac{1}{r}\,dV = 0 \,. \tag{5}$$

Il est bien entendu que U_0 est à prendre au pôle de la surface Φ = constante qui passe au point potentié. Cette formule est encore valable lorsque le point P est sur S car le premier membre représente une fonction continue.

Mais il y a plus, *la formule* (5) *est encore valable à l'intérieur de* S *à condition de prendre alors* U_0 *au pôle de la surface* S et non plus de la surface équipotentielle passant par P. En effet, le premier membre est nul sur S et harmonique à l'intérieur de S. Cette remarque est la clef de notre méthode. Elle permet au point potentié de pénétrer dans la cavité dont nous parlions plus haut.



Soit τ le rayon OP allant du centre de l'astre au point potentié et t' le rayon OP'. On a:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{t'}\left(X_0 + X_1 \frac{\tau}{t'} + \ldots + X_q \frac{\tau^q}{t'^q} + \ldots\right) . \qquad (6)$$

les X_q sont les polynômes de Legendre en le cosinus de l'angle γ des deux rayons OP et OP'; les premiers peuvent s'écrire:

$$X_0 = 1 , \qquad X_1 = \cos\gamma . \qquad X_2 = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma , \ldots .$$

Il sera utile pour la relation de Poincaré de poser aussi $X_{-1} = 1$.

Le point potentié pourra être supposé aussi voisin de l'origine que l'on voudra, de sorte que dans les deux premières intégrales de la formule (5) τ sera toujours inférieur à t'. Quant à la troisième intégrale, c'est un potentiel pour une masse homogène de densité égale à l'unité, que l'on calculera pour lui-même.

L'équation (5) devra avoir lieu quel que soit τ petit. Il faudra donc égaler à zéro tous les coefficients des puissances de τ dans le développement du premier membre.

§ 3. — La première approximation.

Procédons à cette identification en première approximation, le carré de la vitesse angulaire ω^2 et l'aplatissement a des couches d'égale densité étant faibles. Avec Clairaut, Laplace et Poincaré, nous ne retiendrons que les termes du premier ordre en ω^2 et a. Ce qui est déjà multiplié par ω^2 ou par a pourra être calculé dans l'hypothèse d'une stratification sphérique.

Soit alors t le rayon polaire de la surface S, θ et ψ la colatitude géocentrique et la longitude du point P, θ' et ψ' les éléments correspondant pour P':

$$P(\tau, \theta, \psi) \qquad P'(t', \theta', \psi') ,$$

t_1 sera le rayon polaire de la surface S_1, et enfin nous poserons sur S:

$$t' = t + \varepsilon \; ;$$

ε, excès d'un rayon quelconque sur le rayon polaire, sera fonction de t, de θ' et de ψ'. Une relation analogue s'écrira pour toute surface équipotentielle intérieure à Z.

Ceci étant, on a, comme on le vérifie facilement:

$$\frac{\omega^2}{2\pi}\int\int\int \frac{1}{r}\, dV = 2\omega^2\left(t^2 - \frac{1}{3}\tau^2\right) ,$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi} V = \frac{2\omega^2}{3} t^3 , \qquad Q = \frac{\omega^2}{2}\tau^2 \sin^2\theta \; .$$

L'équation (5) et la relation de Poincaré s'écrivent:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{g}{r}\, dS + i\int\int\int \frac{\rho}{r}\, dZ$$
$$= U_0 - \omega^2 t^2 + \frac{\omega^2}{2}\tau^2\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right) ,$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\int g\, dS + i\int\int\int \rho\, dZ = iM - \frac{2}{3}\omega^2 t^3 \; .$$

Sur une même surface équipotentielle, on a, comme on le sait:

$$g = g_0 \frac{dt}{dn} = \frac{g_0}{1 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}} = g_0\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) .$$

puis, en introduisant un angle solide élémentaire $d\Omega$:

$$dS = (t + \varepsilon)^2 d\Omega , \qquad g\, dS = g_0 t^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{t} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) d\Omega ,$$

$$dZ = dS\frac{dn}{dt}\, dt , \qquad dZ = t^2\left(1 + 2\frac{\varepsilon}{t} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) d\Omega\, dt ,$$

et enfin:

$$\frac{1}{t'^q} = \frac{1}{(t + \varepsilon)^q} = \frac{1}{t^q}\frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{t}\right)^q} = \frac{1}{t^q}\left(1 - q\frac{\varepsilon}{t}\right) .$$

En remplaçant $\frac{1}{r}$ par son développement et en identifiant en τ on trouve les équations réunies dans le tableau suivant:

$$\frac{1}{4\pi} g_0 t^{1-q} \int\int \left[-1 + (q-1)\frac{\varepsilon}{t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] X_q \, d\Omega$$

$$+ i \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} \, dt \int\int \left[-1 + (q-1)\frac{\varepsilon}{t} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right] X_q \, d\Omega$$

$$= \begin{cases} -iM + \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{pour } q = -1 \\ -U_0 + \omega^2 t^2 & \text{»} \quad q = 0 \\ -\frac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta) & \text{»} \quad q = 2 \\ 0 & \text{pour } q = 1, 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

L'équation de Poincaré correspond au cas $q = -1$. Portons dans les seconds membres les termes indépendants de ε. Alors dans les premiers, g_0 pourra être pris pour une constitution sphérique:

$$g_0 = \frac{4}{3}\pi i \, Dt \, ,$$

où D est la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t. Posons encore:

$$\frac{\varepsilon}{t} = e \, , \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = e + t\frac{\partial e}{\partial t} \, ,$$

et le système (7) s'écrira pour les mêmes valeurs de q:

$$\frac{i}{3} D t^{2-q} \int\int \left(qe + t\frac{\partial e}{\partial t} \right) X_q \, d\Omega$$

$$+ i \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} \, dt \int\int \left[(q-2)e - t\frac{\partial e}{\partial t} \right] X_q \, d\Omega$$

$$= \begin{cases} -iM + g_0 t^2 + \frac{2}{3}\omega^2 t^3 + 4\pi i \int_t^{t_1} \rho t^2 \, dt \\ -U_0 + g_0 t + \omega^2 t^2 + 4\pi i \int_t^{t_1} \rho t \, dt \\ -\frac{\omega^2}{3} X_2(\cos\theta) \\ 0 \end{cases} \tag{8}$$

Développons e en série de fonctions sphériques sur chaque surface t, la chose est possible et les coefficients e_q, $e^{(1)}_{q,p}$ et $e^{(2)}_{q,p}$ des fonctions sphériques fondamentales seront fonction de t:

$$e(t, \theta, \psi)$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \left[e_q X_q(\cos\theta) + \sum_{p=1}^{q} (e^{(1)}_{q,p} \cos p\psi + e^{(2)}_{q,p} \sin p\psi) X_{q,p}(\cos\theta) \right].$$

Tenons compte des relations bien connues, où Y_j est une fonction sphérique d'ordre j:

$$\int\int X_i(\cos\gamma) Y_j(\theta', \psi') d\Omega = 0 , \qquad i \neq j ,$$

$$\int\int X_i(\cos\gamma) Y_i(\theta', \psi') d\Omega = \frac{4\pi}{|2q+1|} Y_i(\theta, \psi) .$$

Ces relations sont valables encore pour $X_{-1} = 1$ et $Y_{-1} =$ constante. Le système (8) s'écrira, débarrassé des intégrales sphériques:

$$\frac{D}{3} t^{2-q}\left(qe + t\frac{de}{dt}\right) + \int_t^{t_1} \rho t^{1-q}\left[(q-2)e - t\frac{de}{dt}\right] dt$$

$$= \frac{|2q+1|}{4\pi i} \times \begin{cases} -iM + g_0 t^2 \frac{2}{3}\omega^2 t^3 + 4\pi i \int_t^{t_1} \rho t^2 dt \\ -U_0 + g_0 t + \omega^2 t^2 + 4\pi i \int_t^{t_1} \rho t dt \\ -\frac{\omega^2}{3} \\ 0 \end{cases} \tag{9}$$

la première ligne du second membre convient à $q = -1$, $e = e_0$
la seconde » » » » » » $q = 0$, $e = e_0$
la troisième » » » » » » $q = 2$, $e = e_2$
la quatrième à toutes les autres valeurs de q et des e_q, $e^{(1)}_{q,p}$, $e^{(2)}_{q,p}$.

Le système (9) domine la résolution du problème; il est nouveau à notre connaissance. Une étude en seconde approximation, plus longue, ne serait pas plus compliquée en principe, le développement de l'équation (5) et de l'équation de Poincaré se faisant automatiquement.

Montrons combien ces équations (9) permettent de démontrer simplement les principaux résultats classiques.

§ 4. — Le théorème de Laplace et l'équation de Clairaut.

Prenons la dernière ligne du système (9) et passons à la notation de Newton pour les dérivées:

$$\frac{1}{3} \mathrm{D} t^{2-q} (qe + te') = \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} [(2 - q) e + te'] dt \ . \qquad (10)$$

Différentions, ce qui nous donnera une relation vraie aussi pour $q = 2$:

$$(q + 3)(2 - q) \mathrm{D}e + t(2\mathrm{D}e + 6\rho e' + t\mathrm{D}e'') = 0 \ . \qquad (11)$$

En posant $\eta = \frac{te'}{e}$ l'équation (10) s'écrit, d'autre part:

$$\mathrm{D} t^{2-q} e (q + \eta) = \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} e (\eta - q + 2) dt \ . \qquad (12)$$

Si l'on se place *à l'extérieur de l'astre*, l'intégrale précédente est nulle et l'on a:

$$e (q + \eta) \equiv 0 \ . \qquad (13)$$

1° Si $e \equiv 0$, on a aussi $e' \equiv 0$ à l'extérieur et sur la surface S_1, mais l'équation différentielle 11) n'admet à l'*intérieur*

aucune autre solution que $e \equiv 0$ correspondant à ces valeurs initiales sur S_1.

2° Si $\eta + q = 0$, nous poserons $\eta = -q + \eta^+$, $\eta^+ = 0$ sur S_1 et l'équation (12) s'écrit:

$$Dt^{2-q} e\eta^+ = \int_t^{t_1} \rho t^{1-q} e(\eta^+ + 2 - 2q)\, dt \,. \tag{14}$$

Si $q = 1$ cette équation n'admet d'autre solution que $\eta^+ \equiv 0$. Si $q > 1$, alors la parenthèse du second membre est négative, il en est de même alors de η^+ puisque D est positif et cela quel que soit le signe de e. De toute façon l'on a:

$$\eta \leqq -q \quad \text{ou} \quad \frac{de}{e} \leqq -q\frac{dt}{t} \quad \text{ou} \quad \mathrm{L}\frac{e_1}{e} \leqq -q\mathrm{L}\frac{t_1}{t} \,,$$

d'où enfin:

$$\frac{e}{e_1} \geqq \left(\frac{t_1}{t}\right)^q$$

ce qui est impossible, car e augmenterait au delà de toute limite au voisinage du centre de l'astre. Il n'y a donc que les termes e_0 et e_2 qui ne soient pas identiquement nuls en première approximation. On peut écrire:

$$e = e_0 + e_2 X_2(\cos\theta) = a \sin^2\theta \,, \tag{15}$$

Car e est nul sur l'axe polaire. *Il n'y a que des ellipsoïdes de révolution voisins des sphères qui satisfassent à cette condition.* C'est le théorème de *Laplace.*

On a $e_0 + e_2 = 0$, $a = -\frac{3}{2}e_2 = \frac{3}{2}e_0$ et pour $q = 2$ l'équation (11) se réduit à celle de *Clairaut*:

$$2D'a + 6\rho a' + tDa'' = 0 \,. \tag{16}$$

§ 5. — L'APLATISSEMENT ET SA DÉRIVÉE PAR RAPPORT AU RAYON.

Plaçons-nous à l'extérieur de l'astre et remplaçons D par $\frac{3M}{4\pi t^3}$ dans les trois premières équations (9). Les intégrales disparaissent et il reste en a:

$$qa + t\frac{da}{dt} = \tag{17}$$

$$\frac{3}{2iM}\,|\,2q+1\,|\,t^{q+1} \times \begin{cases} -iM + g_0 t^2 + \frac{2}{3}\omega^2 t^3 & \text{pour } q = -1 \\ -U_0 + g_0 t + \omega^2 t^2 & \text{»} \quad q = 0 \\ \frac{\omega^2}{3} & \text{»} \quad q = 2\,. \end{cases}$$

De ces trois équations on peut extraire a, $\frac{da}{dt}$ et U_0, puis revenir à la différence des axes équatoriaux et polaires $\varepsilon = ta$; cela donne, comme on le vérifie sans difficulté:

$$2\frac{\varepsilon}{t} = \frac{\omega^2 t}{g_0} - 1 + \frac{iM}{g_0 t^2}\,, \tag{18}$$

$$2\frac{d\varepsilon}{dt} = 4\frac{\omega^2 t}{g_0} + 1 - \frac{iM}{g_0 t^2}\,, \tag{19}$$

$$3U_0 t = g_0 t^2 + 2iM\,. \tag{20}$$

En additionnant (18) et (19) on trouve la relation suivante:

$$\frac{\varepsilon}{t} + \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g_0}\,,$$

qui s'écrit encore, en désignant par φ le rapport de la force centrifuge $\omega^2 t$ à la pesanteur g:

$$a + \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}}}{g} = \frac{5}{2}\varphi\,. \qquad \text{avec} \quad \varphi = \frac{\omega^2 t}{g} = \frac{\omega^2 t^3}{iM}\,;$$

c'est une relation de *Clairaut* très utile en géodésie. Mais les équations (18), (19) et (20) entrent davantage dans le détail de l'équilibre.

On peut aussi mettre en évidence dans les seconds membres des équations (17) la partie principale de g_0 et de U_0, c'est-à-dire la partie correspondant à une stratification sphérique de même masse totale:

$$g_0 = \frac{iM}{t^2} + \omega^2 g_{0,1}\ , \qquad U_0 = \frac{iM}{t} + \omega^2 U_{0,1}\ .$$

Les équations (17) s'écrivent alors:

$$a - t\frac{da}{dt} = \frac{3}{2}\varphi\left(-g_{0,1} - \frac{2}{3}t\right)\ , \tag{21}$$

$$t\frac{da}{dt} = \frac{3}{2}\varphi\left(g_{0,1} - \frac{U_{0,1}}{t} + t\right)\ , \tag{22}$$

$$2a + t\frac{da}{dt} = \frac{5}{2}\varphi = \frac{5}{2}\frac{\omega^2}{iM}t^3\ . \tag{23}$$

L'équation différentielle (23) est linéaire; en la résolvant on trouvera a et $\frac{da}{dt}$ exprimés au moyen d'une constante arbitraire k. Des équations (21) et (22) on tirera ensuite $U_{0,1}$ et $g_{0,1}$. On trouve:

$$U_{0,1} = \frac{k}{t^3}\ , \tag{24}$$

$$g_{0,1} = \frac{3k}{t^4}\ , \tag{25}$$

$$U_0 = \frac{iM}{t} + \omega^2\frac{k}{t^3}\ , \tag{26}$$

$$g_0 = \frac{iM}{t^2} + \omega^2\frac{3k}{t^4}\ , \tag{27}$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{\varphi}{t}\left(t - \frac{3k}{t^4}\right) = \frac{\omega^2}{2iM}\left(t^3 - \frac{3k}{t^2}\right)\ , \tag{28}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{3}{2}\frac{\varphi}{t}\left(1 + \frac{2k}{t^5}\right) = \frac{3\omega^2}{2iM}\left(t^2 + \frac{2k}{t^3}\right)\ , \tag{29}$$

On voit que les relations (27), (28), (29), valables pour toute surface équipotentielle extérieure à l'astre et pour la surface libre, donnent *les valeurs de la pesanteur, de l'aplatissement et de sa dérivée* au moyen d'une seule constante k. Cette seconde résolution est celle qu'il faudrait employer pour étudier la seconde approximation.

§ 6. — Les moments d'inertie des figures d'équilibre.

Soient A, B, C les moments d'inertie de l'astre par rapport aux axes x, y, z respectivement. Pour une surface S: $\Phi = c$ quelconque mais fermée, extérieure à l'astre, on aura, ρ étant nul en dehors de S_1:

$$A = \int\int\int \rho\,(y^2 + z^2)\,dV\ ;$$

les autres moments s'obtiennent par permutation des lettres. En tirant ρ de l'équation (2) et faisant à nouveau usage d'une identité de Green on pourra écrire:

$$4\pi i A = 4\int\int\int (c - \Phi)\,dV + \int\int g\,(y^2 + z^2)\,dS + 2\omega^2 \int\int\int (y^2 + z^2)\,dV\ .$$

Puis, par soustraction, ce qui fait disparaître le premier terme:

$$4\pi i\,(A - B) = \int\int g\,(y^2 - x^2)\,dS + 2\omega^2 \int\int\int (y^2 - x^2)\,dV\ .$$

La différence des moments d'inertie ne dépend que de S et de la pesanteur sur S.

La formule précédente est rigoureuse; elle ne suppose nullement que la rotation et l'aplatissement soient faibles.

Si V′ est le volume compris entre la surface S et une sphère de même pôle, la formule précédente peut encore s'écrire:

$$4\pi i\,(A - B) = \int\int g\,(y^2 - x^2)\,dS + 2\omega^2 \int\int\int (y^2 - x^2)\,dV'\ .$$

Maintenant, si la rotation est lente, la région V′ sera de l'ordre de ω^2 et le second terme est du second ordre. Au premier ordre il reste simplement:

$$4\pi i\,(C - A) = \int\int g\,(x^2 - z^2)\,dS\ ,$$

et l'on a A = B puisque la figure d'équilibre est de révolution. Or, sur la surface S on a : $g = g_0\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) = g_0\left(1 - \frac{d\varepsilon}{dt}\sin\theta\cos\theta\right)$ et en utilisant la formule (19) on trouvera sans difficulté:

$$C - A = \frac{t^2}{3}\left(M - \frac{g_0}{i}t^2\right). \tag{30}$$

D'Alembert et Poincaré donnent l'expression suivante :

$$C - A = \frac{2}{3}\frac{g}{i}t^4\left(a - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{31}$$

formule que l'on déduit de la précédente par la formule (28).

La formule (30) est vraie quelque soit $t > t_1$, on en tire:

$$g_0 = \frac{i}{t^2}\left(M - 3\frac{C - A}{t^2}\right),$$

valeur qui doit coïncider avec la valeur (27). On voit que la constante k du paragraphe précédent est:

$$k = (A - C)\frac{i}{\omega^2},$$

nombre négatif. puisque l'astre est aplati. On sait d'autre part que le rapport $\frac{C - A}{C}$ n'est autre que la constante J de la précession des équinoxes.

Cette méthode est rigoureuse, elle coordonne les résultats classiques, elle en contient de nouveaux et, à tout prendre, elle simplifie la résolution de ce problème si ardu qui est à la base de la géodésie supérieure.

Genève, le 2 juin 1929.