Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 10 (1928)

Artikel: Sur la rotation permanente des planètes et la géodésie
Autor: Wavre, R.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742769

SUR

LA ROTATION PERMANENTE DES PLANÈTES ET LA GÉODÉSIE

PAR

R. WAVRE

§ 1. *Introduction.*

Dès que Newton eut découvert le principe de l'attraction universelle, une question immensément vaste s'est posée, aussi captivante par son intérêt mathématique que fondamentale pour l'étude de la formation et de l'évolution des astres à partir d'une nébuleuse raréfiée.

Quelle sera l'évolution future d'une masse fluide dont chaque particule est soumise à l'attraction de la masse entière, vers quelle constitution limite cette nébuleuse va-t-elle tendre à la longue, à quel monde donnera-t-elle naissance ?

L'honneur d'avoir posé le problème avec ce degré de généralité revient certes à Kant et à Laplace, après Newton, plus qu'à tout autre.

Les équations qui régissent le mouvement du fluide peuvent être écrites formellement, c'est un fait à remarquer, mais leur résolution présente une difficulté, inhérente à la nature de la question, que l'analyse mathématique est encore impuissante à surmonter. En effet, la force attractive est déterminée par la forme de la masse entière, qui est précisément l'inconnue.

Toutefois, quelques-unes des caractéristiques qualitatives et quantitatives du mouvement peuvent être dégagées et il est facile dans certains cas, c'est-à-dire suivant la nature des conditions initiales, état des vitesses, état de raréfaction, de prévoir que le fluide se concentrera et donnera une étoile, qu'il tendra au contraire vers la forme d'un anneau, ou encore qu'il restera extrêmement disséminé dans l'espace.

Dans le cas d'une concentration, les différentes particules du fluide en contact les unes avec les autres exercent des pressions réciproques et c'est la pression qui contrebalance l'effet de l'attraction newtonienne et de la force de D'Alembert.

La viscosité, si faible soit-elle, tendra à supprimer, au cours des temps, tout mouvement relatif, tout glissement des parties l'une sur l'autre.

A l'état limite, celui de la lune et des petites planètes déjà refroidies et sensiblement solidifiées, le fluide se trouvera en équilibre relatif et tournera tout d'une pièce autour de l'axe polaire; quitte à ce que cet axe soit entraîné par l'attraction des autres corps; ce dernier mouvement relève d'un autre chapitre de la mécanique céleste; dans l'étude actuelle nous ferons abstraction des mouvements des axes de rotation.

Mais l'équilibre relatif n'est pas le seul dont les astres de notre voisinage nous imposent l'étude. L'observation astronomique montre, en effet, qu'il existe des fluides déjà condensés qui ne tournent pas tout d'une pièce sur eux-mêmes. Le soleil, Jupiter, Saturne présentent une particularité de ce genre fort intéressante. Dans la rotation de ces corps, les zones parallèles ne font pas un tour complet en un même temps. L'équateur solaire accomplit sa révolution en 25 jours, tandis que le voisinage des pôles en exige 28. Aux latitudes intermédiaires, la période serait différente encore.

La viscosité du fluide tendra à faire disparaître ces glissements des zones parallèles et le mouvement du soleil tel qu'il est aujourd'hui n'est pas un mouvement stable. Cette rotation variée est une étape dans l'évolution de l'astre, qui doit petit à petit laisser place à l'équilibre relatif.

Une étude mathématique des rotations variées où l'on ferait abstraction de la viscosité n'aurait qu'un intérêt théorique si les effets des frottements internes étaient prompt à se faire sentir. C'est peut être pour cette raison qu'elle n'a pas été l'objet de travaux méthodiques comme ce fut le cas des figures d'équilibre.

Mais on possède aujourd'hui de fortes raisons de penser que la viscosité est très faible au contraire et son effet très lent à se manifester.

Les études thermodynamiques de MM. Jeans et Eddington et de leurs élèves sur le rayonnement stellaire sont en faveur d'une extrême petitesse de la viscosité dans des astres comme le soleil portés à une très haute température.

On connaît d'autre part, ce raisonnement d'Helmholtz d'après lequel, à pression, densité et vitesses égales, l'effet des frottements mettrait n fois plus de temps à se faire sentir dans un fluide n fois plus étendu qu'un autre. Puis il faut aussi remarquer que le frottement est proportionnel à la vitesse relative des matières en contact dans le cas d'un liquide, de sorte qu'à vitesse petite frottement petit et à vitesse infiniment petite frottement infiniment petit, ce qui n'a pas lieu pour les solides où il y a un frottement au départ. Une étude antérieure sur le mouvement avec frottement de deux sphères concentriques nous a déjà montré que, si la force de frottement est proportionnelle à une puissance supérieure ou égale à l'unité de la vitesse relative, cette dernière ne disparaîtrait qu'en un temps infini.

Il est clair d'autre part qu'un astre comme le soleil mettra un temps énorme à tourner d'une seule pièce puisque les planètes mille fois plus petites comme Saturne et Jupiter n'ont pas encore atteint cet état limite. Aussi étudierons-nous les rotations variées dans le cas idéal où il n'y aurait pas de viscosité; nous appellerons ces mouvements des rotations permanentes.

Il y aurait, dans le cas du soleil, une autre correction à faire, aussi importante peut-être que la correction due à la viscosité. Ce serait de tenir compte de la courbure d'espace et d'appliquer la statique d'Einstein en partant de la formule de Schwarzchild. Le problème posé dans le système d'Einstein ne serait pas complètement insoluble, je veux dire qu'il serait possible de se faire une idée de la correction relativiste à faire subir aux résultats newtoniens. Il faudrait aussi tenir compte des données thermodynamiques du problème, en particulier de la pression de radiation; nous ne le ferons pas, imitant en cela les études classiques de Clairaut, Laplace et Poincaré.

Une autre raison encore nous pousse à poursuivre cette étude hydrodynamique du mouvement des astres sur eux-mêmes d'un point de vue plus général que celui de la rotation en bloc, c'est la géophysique actuelle et les conceptions nouvelles sur la fluidité relative de la terre et même de l'écorce terrestre envisagée dans son ensemble. On connaît la théorie géologique de M. Wegener, très en vogue aujourd'hui, de la dérive des continents. Il est probable que le magma terrestre a la consistance d'un liquide de moins en moins visqueux, quand on s'enfonce en profondeur. Il suffit qu'il se comporte comme un liquide à coefficient de viscosité quelconque, fut-il très grand, pour que des forces intérieures, des tractions tangentielles par exemple, puissent exercer leur effet à la longue en déplaçant les corps, les îles, les continents sur lesquels elles s'exercent, et nous avons montré dans une étude très développée que les continents étaient soumis à une traction tangentielle dirigée vers l'équateur.

Ce que l'on vient de rappeler à propos du soleil et des grosses planètes doit pouvoir s'affirmer de la terre pourvu qu'on recule dans l'histoire et qu'on augmente simplement l'importance des effets de la viscosité. Il est vraisemblable que la terre elle-même, durant les époques anciennes, ait aussi présenté, avant d'être sensiblement figée, un mouvement relatif appréciable des zones parallèles et des différentes couches d'égale densité les unes sur les autres.

Les conceptions géologiques récentes nous inclinent donc aussi à reprendre d'un point de vue plus général l'étude de la rotation des astres sur eux-mêmes.

Voici maintenant quelques renseignements sur la méthode suivie dans cette recherche. Clairaut, Laplace, Poincaré, dans l urs mémorables travaux sur les figures d'équilibre d'une masse hétérogène, ont appliqué des procédés approximatifs à la recherche de la répartition de la matière à l'intérieur du corps, du champ de la pesanteur, de l'accroissement de g, de la forme de la surface extérieure. Clairaut, notamment, néglige les termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire. D'autre part, Laplace et Poincaré, Legendre aussi, emploient des développements en série de fonctions sphériques dont pratiquement on ne conserve que les premiers termes. En plus, ces auteurs n'ont pu étudier par cette méthode que les stratifications voisines des sphères. Ils sont parvenus ainsi à des résultats pratiques fort intéressants, ils ont fait une ample moisson de résultats utiles. Mais on peut se demander si les approximations faites dès le début ne vont pas, dans le cas des aplatissements notables, rendre impossible la découverte de certaines relations rigoureuses. J'en ai une preuve en ceci, c'est que ni les auteurs précédents, ni Tisserand dans son traité de mécanique céleste, ni Helmert dans son traité de géodésie supérieure, ouvrages encyclopédiques, ne donnent la formule rigoureuse de l'accroissement du coefficient g de la pesanteur avec la profondeur, tandis que la discipline que nous nous imposons permet d'exprimer très simplement la valeur exacte de cet accroissement.

Nous renoncerons à l'emploi des fonctions sphériques qui paraissait être la voie royale, depuis que Laplace, Legendre et Poincaré s'y étaient engagés. Car si pratiquement cette méthode est peut être la bonne, on doit désespérer, ne conservant que les deux premiers termes du développement, de trouver les propriétés rigoureuses de la fonction développée. Comment voulez-vous que l'on étudie en toute rigueur une fonction quand on ne retient que les premiers termes de son développement en série de Fourier? Poincaré a obtenu des résultats remarquables et rigoureux, qu'on songe au théorème dit de Stokes, mais justement ce n'est pas au moyen des fonctions sphériques. C'est dans cette autre voie que je voudrais que l'on s'engageât résolument, où, sans faire aucune approximation, on mettrait en évidence les rapports différentiels entre la charge, la pesanteur, la stratification. Et nous pouvons espérer que cet article permettra peut-être à un mathématicien habile de déterminer la forme exacte des surfaces d'égale densité dans l'astre tout entier en fonction des éléments observables à la surface libre.

L'équilibre relatif, objet des études classiques n'est qu'un cas particulier des rotations permanentes que nous étudions ici et en cours de route nous obtiendrons certains résultats dont quelques-uns sont nouveaux, croyons-nous, même dans le cas spécial des anciennes recherches.

Les principaux sont les suivants:

1. L'extension du théorème de Stokes-Poincaré.

2. La formule (20′) donnant le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre au moyen des seuls éléments superficiels: la surface libre, la vitesse angulaire et la pesanteur sur la surface. La mesure géodésique de ces éléments permettrait d'obtenir pour la théorie de la lune une expression plus exacte de l'attraction terrestre que celle dont on fait usage en général.

3. La formule (24) rigoureuse de l'accroissement de la pesanteur avec la profondeur, formule qui montre qu'une mesure de cet accroissement peut remplacer une mesure géodésique de la courbure moyenne de la surface libre.

4. Les formules (40) et (41) donnant la densité et la pesanteur en tout point au moyen de la répartition géométrique des surfaces d'égale densité et de l'attraction en l'un des pôles.

5. L'équation (48) exprimant un fait purement géométrique et qui traduit la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif.

§ 2. *La rotation permanente et le champ de la pesanteur.*

Par « rotation permanente » nous entendons que chaque particule tourne autour de l'axe polaire avec une vitesse constante au cours du mouvement, mais la vitesse angulaire, la même pour tous les points d'un même cercle parallèle, pourra fort bien varier quand on passera d'un parallèle à un autre.

La simplicité de la mise en équation du problème des figures d'équilibre relatif provient du fait que la vitesse angulaire est au contraire constante et indépendante des particules considérées. Dans ce cas spécial il existe un potentiel du champ de la pesanteur; mais nous allons le voir, la pesanteur se définit très simplement dans toute rotation permanente et il existe un cas plus étendu que l'équilibre relatif où elle dérive encore d'un potentiel.

Soit, en effet, P une particule de masse unité. Son accélération provient de sa rotation uniforme; elle est dirigée vers le centre du cercle trajectoire, l'accélération renversée sera la force centrifuge et la pesanteur en P sera la résultante de la force centrifuge et de l'attraction de la masse entière telle qu'elle se manifeste sur la particule P. Cette résultante, qui est donc rapportée à l'unité de masse, possède en chaque point P une direction qui définit la verticale en P et une intensité qui n'est autre que la valeur du coefficient g bien connu en géodésie. Toute direction normale à la verticale en P sera horizontale en P.

La pesanteur est donc représentée par un vecteur attaché à chaque point du fluide; le champ vectoriel peut dériver d'un potentiel ou n'en point dépendre. Nous appelerons *mouvement de genre un*, les rotations permanentes pour lesquels il existe un potentiel du champ de la pesanteur et *mouvement de genre deux*, les rotations permanentes pour lesquelles ce potentiel n'existe plus.

Représentons par Φ le potentiel du champ de la pesanteur, pour abréger, dans le petit tableau suivant qui donne la généalogie des rotations permanentes.

Rotations permanentes

- Mouvements de genre un — Φ existe
  - Mouv. de 1[re] espèce ou équilibre relatif
  - Mouv. de 2[e] espèce
- Mouvements de genre deux — Φ n'existe pas
  - Mouvement de M. Dive ou de 3[e] espèce

On sait que M. Dive a démontré dans ses articles aux « Archives » l'existence des mouvements de genre deux où le champ de la pesanteur ne dérive pas d'un potentiel et où les couches d'égale densité ne coïncident pas avec les couches d'égale pression et ne sont pas horizontales en chacun de leurs points.

Ce sont au contraire les rotations permanentes du premier genre qui sont l'objet des paragraphes suivants.

§ 3. *Caractéristiques des mouvements de genre un.*

Partons des équations de l'hydrodynamique régissant le mouvement d'un fluide parfait dans un champ newtonien dépendant du potentiel U:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d^2 x}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d^2 y}{dt^2}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d^2 z}{dt^2}; \end{aligned} \qquad (1)$$

ρ est la densité, p la pression, t le temps. Ces équations conviennent à tout mouvement d'un fluide parfait soumis à l'attraction universelle. Il faudrait leur ajouter l'équation caractéristique du fluide et l'équation de continuité, mais nous n'avons pas à nous en occuper ici, puisqu'il s'agit d'une masse hétérogène et d'une rotation permanente.

Soit $\omega(x, y, z)$ la vitesse angulaire de la particule x, y, z dans sa rotation autour de l'axe polaire que l'on peut prendre pour ligne des z. L'accélération s'exprime au moyen de ω, elle ne contient plus le temps:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y, \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

La force centrifuge agissant sur l'unité de masse admettra les composantes:

$$\omega^2 x, \qquad \omega^2 y, \qquad 0,$$

et le vecteur pesanteur, poids de l'unité de masse qui résulte de l'attraction et de la force centrifuge, aura les projections:

$$g_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \qquad g_y = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \qquad g_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (2)$$

Les équations fondamentales (1) s'écrivent:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = g_x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g_y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g_z. \qquad (3)$$

Elles montrent qu'en chaque point le vecteur pesanteur est normal à la surface à pression constante passant par ce point. Les surfaces d'égale pression sont donc horizontales. Multiplions les équations (3) respectivement par les composantes dx, dy, dz d'un déplacement arbitraire, de manière à former la différentielle totale de p:

$$\frac{1}{\rho} dp = g_x dx + g_y dy + g_z dz . \tag{4}$$

De cette dernière relation on déduit les propriétés caractéristiques des mouvements de genre un:

1° Les couches d'égale densité sont horizontales.

2° La vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe.

3° Il existe un potentiel A des accélérations.

4° Il existe un potentiel Q de la force centrifuge.

5° Il existe un potentiel Φ du champ de la pesanteur.

Chacune de ces propositions implique chacune de sautres et caractérise un mouvement de genre un. En effet, si les surfaces d'égale densité sont horizontales, elles coïncident avec les surfaces d'égale pression; ρ est constant à p constant et l'on a par conséquent une relation entre ρ et p indépendante de x, y, z: $\rho = f(p)$. Le premier membre de l'équation (4) coïncide avec la différentielle totale de l'expression:

$$\Phi = \int_0^p \frac{dp}{f(p)} , \tag{5}$$

et l'on a, quelles que soient les différentielles dx, dy, dz:

$$d\Phi = g_x dx + g_y dy + g_z dz ,$$

ce qui exige que l'on ait aussi en tout point x, y, z:

$$g_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \qquad g_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \qquad g_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} ; \tag{6}$$

le champ de la pesanteur dérive donc du potentiel Φ. Inversément, si le potentiel Φ existe, les couches d'égale densité sont horizontales. Car l'équation (4) s'écrit sous la forme:

$$\frac{1}{\rho} dp = d\Phi \quad (7) \qquad \text{ou} \qquad \rho = \frac{dp}{d\Phi} , \tag{8}$$

et, pour un déplacement à Φ constant, p est constant, p n'est fonction que de Φ et Φ de p et l'équation (8) montre que ρ ne dépend que de Φ, c'est-à-dire que de p; les surfaces d'égale densité coïncident avec les surfaces d'égale pression, elles sont horizontales comme ces dernières. Les propositions 1° et 5° sont donc équivalentes, elles s'impliquent mutuellement.

S'il existe un potentiel du champ de la pesanteur, il existera un potentiel de la force centrifuge; les équations (2) s'écrivent, en effet:

$$\omega^2 x = \frac{\partial(\Phi - U)}{\partial x}, \quad \omega^2 y = \frac{\partial(\Phi - U)}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial(\Phi - U)}{\partial z}. \qquad (9)$$

La force centrifuge dérive donc du potentiel $Q = \Phi - U$. Ce potentiel Q ne saurait dépendre de z comme le montre la dernière équation (9), ω non plus en vertu des deux premières. La vitesse angulaire ne dépend que de la distance l de la particule à l'axe de rotation. Le potentiel Q s'écrit, on le vérifie aisément:

$$Q = \int_0^{l^2} \omega^2 (l \; \frac{1}{2} dl^2 . \qquad (10)$$

Inversément, s'il existe un potentiel Q, il ne peut dépendre que de la distance à l'axe, ω aussi, et les équations (2) montrent que le vecteur g dérive du potentiel $\Phi = U + Q$. Enfin, s'il existe un potentiel Q de la force centrifuge, il existe un potentiel $A = - Q$ des accélérations.

Les propositions 2°, 3°, 4° sont équivalentes entre elles et équivalent à 5° et par conséquent à 1°.

Les mouvements de genre un sont analytiquement caratérisés par l'équation:

$$\rho = f(p) , \qquad (11)$$

qui exprime qu'il existe une relation directe et indépendante des coordonnées x, y, z, entre la densité et la pression quoique le fluide ne soit pas supposé *a priori* posséder une équation caractéristique de ce genre. On peut aussi les caractériser par l'équation:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 , \qquad (11')$$

qui exprime que la vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe de rotation.

Pour tout mouvement de genre un, les équations fondamentales (1) s'écrivent:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} ,$$

Φ et Q ont les valeurs (5) et (10). Elles se résument en la relation unique, où K est une constante:

$$\Phi = U + Q + K . \tag{12}$$

Le potentiel de la pesanteur est la somme du potentiel newtonien et du potentiel de la force centrifuge, à une constante près que l'on pourrait incorporer à Φ. L'équation (12), vraie pour tout mouvement de genre un, sera le point de départ de l'étude qui va suivre.

§ 4. *Sur une propriété des charges électriques en équilibre.*

Dans le paragraphe suivant nous aurons besoin d'une propriété du potentiel créé par une charge répartie sur une surface fermée.

Désignons par S la surface envisagée, et soit μ la densité de la couche et r la distance du point potentié au point potentiant.

Définissons le potentiel de simple couche:

$$V = \iint_S \frac{\mu}{r} dS ,$$

et soit V_J sa valeur à l'intérieur de S, V_E sa valeur à l'extérieur. On sait que la densité est donnée en chaque point de S par la relation:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV_J}{dn_J} + \frac{dV_E}{dn_E}\right) ,$$

Si le potentiel est constant à l'intérieur, on aura simplement:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV_E}{dn_E} .$$

V_E est alors constant sur S, il est nul à l'infini. Supposons que V_E soit positif sur S, la densité μ devra être positive ou nulle, car si μ était négatif la dérivée normale de V_E serait positive, V_E serait croissant vers l'extérieur sur une normale au moins à la surface S et V_E devrait avoir un maximum à l'extérieur de S, ce qui est impossible puisque dans cette région ce potentiel est harmonique. Si V_E était négatif sur S, μ serait négatif ou nul.

En d'autres termes, si une simple couche répartie sur une surface fermée crée un potentiel constant à l'intérieur de cette surface, la densité et le potentiel ne peuvent avoir un signe contraire en quelque point de la surface. Dans le langage de l'électricité, cette proposition devient presque immédiate:

Une charge en équilibre à la surface d'un conducteur ne peut pas changer de signe.

§ 5. *Extension du théorème de Stokes-Poincaré.*

Stokes et Poincaré ont démontré un théorème fondamental au sujet de l'équilibre relatif d'une planète.

Le potentiel newtonien est entièrement défini à l'extérieur de l'astre par la surface libre S, la vitesse angulaire $\omega = c$, et la masse totale M.

Suivant Helmert, Stokes avait omis la masse totale et c'est Poincaré qui a donné la démonstration rigoureuse et l'énoncé exact du théorème.

Dans ses « Figures d'équilibre d'une masse fluide », Poincaré part de la relation:

$$U + Q + K = 0 \qquad \text{avec} \qquad Q = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) ,$$

qui exprime que la surface S est une surface de niveau. Cette équation donne U sur la surface S, et U peut être défini partout à l'extérieur de S par le principe de Dirichlet. La constante K est déterminée par la masse totale, comme le montre Poincaré qui indique à ce propos la théorie des charges électriques en équilibre à la surface d'un conducteur.

Pour l'extension aux mouvements de genre un, nous suivrons une route différente qui conduira en même temps à un autre résultat.

Soit Δ l'opération de Laplace; l'équation fondamentale (12):

$$\Phi = U + Q + K \tag{12}$$

implique la relation suivante (13), mais n'est pas impliquée par celle-ci:

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q \,. \tag{13}$$

L'équation (13) exprime, en effet, que les fonctions Φ et $U + Q$ qui ont le même laplacien ne peuvent différer que par une fonction H dont le laplacien est nul, $\Delta H = 0$, c'est à dire par une fonction harmonique. L'équation (13) est donc équivalente à la relation plus générale que (12):

$$\Phi = U + Q + K + H \,, \tag{14}$$

où H représente une fonction harmonique à l'extérieur de l'astre.

Mais voici le fait essentiel dont le théorème de Stokes exprime un des aspects: si la relation (13) est satisfaite dans la planète et la relation (12) sur une surface fermée Σ quelconque, située elle aussi dans la planète ou coïncidant en partie ou au total avec la surface S, l'équation (12) sera satisfaite partout. En effet, la fonction harmonique H, continue dans l'astre et sur sa frontière, devrait être nulle sur la surface fermée Σ; elle serait nulle dans l'astre tout entier. Dans le but que nous poursuivons, on choisira pour surface Σ la surface libre S et sur celle-ci on devra avoir:

$$U + Q + K = 0 \,, \tag{15}$$

le potentiel Φ étant nul sur S qui est une surface à densité constante.

Or la relation (13) donne, en vertu de l'équation de Poisson:

$$\Delta\Phi = -4\pi\varepsilon\rho + \Delta Q \,, \tag{16}$$

ε est la constante de la gravitation universelle.

De cette dernière relation tirons ρ, et calculons formellement le potentiel newtonien U. L'élément de volume sera $d\tau$, r sera la distance du point potentié au point potentiant, les intégrales triples s'étendent à la masse entière, les intégrales doubles à la surface extérieure S. Enfin, nous désignerons par J, S, E, l'intérieur de l'astre, la surface libre et l'extérieur et nous ferons précéder une formule de l'une ou l'autre de ces lettres pour indiquer que la relation exprimée est valable dans la région correspondante.

On a donc:

$$4\pi\varepsilon\rho = \Delta Q - \Delta\Phi , \tag{17}$$

et le potentiel U est défini par l'équation:

$$\text{J, S, E} \qquad 4\pi U = \iiint \frac{1}{r}\Delta Q\, d\tau - \iiint \frac{1}{r}\Delta\Phi\, d\tau . \tag{18}$$

La fonction Φ, étant nulle sur S, satisfait à la relation déduite d'une identité de Green:

$$\text{S, E} \qquad \iiint \frac{1}{r}\Delta\Phi\, d\tau = -\iint \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS , \tag{19}$$

la dérivée normale étant prise vers l'intérieur. Le potentiel peut s'écrire:

$$\text{S, E} \qquad 4\pi U = \iiint \frac{1}{r}\Delta Q\, d\tau + \iint \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS . \tag{20}$$

Mais, sur la surface S, il doit satisfaire à la relation (15), il faut donc que l'on ait:

$$\text{J, S} \qquad \iint \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\, dS = -4\pi(Q+K) - \iiint \frac{1}{r}\Delta Q\, d\tau . \tag{21}$$

A la constante K près, le second membre de cette dernière équation ne dépend que de S et $\omega(l)$, c'est, d'autre part, un potentiel V créé par une simple couche de densité:

$$\frac{d\Phi}{dn} .$$

L'équation (21) doit avoir lieu sur la surface S; le Δ des deux membres étant nul, elle est vraie aussi dans S. Le second membre fournit donc le potentiel V_J à l'intérieur de la masse; le potentiel à l'extérieur V_E créé par cette simple couche peut être défini par le principe de Dirichlet, et l'on sait que la charge est donnée par l'équation:

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dV_E}{dn_E} + \frac{dV_J}{dn_J}\right] .$$

A chaque valeur de K correspondrait une charge et une seule; or, on déduit de l'équation (16) par application de la formule de Green la relation:

$$\int\int \frac{d\Phi}{dn}\, dS = 4\pi\varepsilon M - \int\int\int \Delta Q\, d\tau \ . \tag{22}$$

Je dis que les relations (21) et (22) déterminent entièrement la dérivée normale de Φ à partir des éléments S, $\omega(l)$, M. En effet, il suffit de s'assurer que la constante K est bien déterminée par ces éléments. Pour cela, supposons que K puisse prendre deux valeurs, K et K', et soient V et V', Φ et Φ' les fonctions V et Φ correspondantes; en soustrayant de l'équation (21) celle que l'on obtiendrait pour la seconde valeur de K, on trouve:

S, J $$V_J - V'_J = -4\pi(K - K') .$$

Le potentiel $V'' = V - V'$ serait constant dans J, la charge $\frac{d\Phi''}{dn} = \frac{d\Phi}{dn} - \frac{d\Phi'}{dn}$ devrait être partout positive ou nulle, ou partout négative ou nulle en vertu du lemme du paragraphe précédent. Mais elle serait constamment nulle, car on doit avoir, en soustrayant les deux équations (22) prises avec Φ et Φ':

$$\int\int \frac{d\Phi''}{dn}\, dS = 0 .$$

Le potentiel V'' est donc identiquement nul et l'on a $K = K'$.

Les équations (21) et (22) déterminent entièrement la dérivée normale:

$$\frac{d\Phi}{dn} = g ,$$

qui n'est autre que le coefficient de la pesanteur g à partir des éléments S, $\omega\,(l)$, M.

Les équations (20), (21), (22) s'écrivent sous la forme équivalente:

$$4\pi U = \iiint \frac{1}{r} \Delta Q \, d\tau + \iint \frac{1}{r} g \, dS \,, \qquad (20')$$

$$\iint \frac{1}{r} g \, dS = -4\pi(Q + K) - \iint \frac{1}{r} \Delta Q \, dS \,, \qquad (21')$$

$$4\pi\varepsilon M = \iiint \Delta Q \, d\tau + \iint g \, dS \,. \qquad (22')$$

De ces considérations rapidement retracées on déduit:

I. Les équations (21′) et (22′) déterminent entièrement la pesanteur g sur la surface libre à partir des éléments S, $\omega(l)$, M:

$$g = F \,|\, S \,,\ \omega(l) \,,\ M \,| \,.$$

II. Le potentiel à l'extérieur est donné par la formule (20′) à partir des éléments observables sur la surface libre S, $\omega(l)$, g:

$$U_{ext} = F \,|\, S \,,\ \omega(l) \,,\ g \,| \,.$$

III. La masse totale est donnée à partir des éléments S, $\omega(l)$, g par la formule (22′):

$$M = F \,|\, S \,,\ \omega(l) \,,\ g \,| \,.$$

IV. Le potentiel à l'extérieur est entièrement défini par les éléments S, $\omega(l)$, M:

$$U_{ext} = F \,|\, S \,,\ \omega(l) \,,\ M \,| \,.$$

Si la planète est en équilibre relatif cette dernière proposition exprime le théorème de Stokes-Poincaré:

$$U_{ext} = F \,|\, S \,,\ \omega = c \,,\ M \,| \,,$$

et la formule (22′) se réduit à la relation de Poincaré:

$$\iint g \, dS = 4\pi\varepsilon M - 2\omega^2 T \,,$$

où T est le volume de l'astre. En effet, on a:

$$\Delta Q = 2\omega^2 + 2l^2 \frac{d\omega^2}{dl^2},$$

et dans le cas de l'équilibre relatif $\omega = c$, on a $\Delta Q = 2\omega^2$. Le coefficient de la pesanteur g étant positif ou nul, Poincaré a déduit de sa relation l'inégalité:

$$\omega^2 \leqq 2\pi\varepsilon \frac{M}{T}.$$

On remarquera la ressemblance des formules (20′) et (22′), d'autant plus frappante que le facteur ε pourrait être explicité de U.

Enfin la formule (20′) donne le potentiel newtonien à partir des éléments S, $\omega(l)$ et g d'une manière fort simple et indépendante de la répartition des matières à l'intérieur de l'astre.

§ 6. *Sur une formule utile pour la géodésie et sa généralisation.*

Le potentiel Φ du champ de la pesanteur n'est fonction que de ρ dans tous les cas où il existe. Les surfaces à Φ constant sont les surfaces d'égale densité. Comme ce sont ces surfaces et en particulier la surface libre qui nous intéressent spécialement, nous allons transformer le laplacien de Φ pour faire apparaître des éléments intrinsèques des surfaces d'égale densité.

Pour toute fonction V et toute surface Σ régulière, le ΔV s'exprime en un point de Σ au moyen du paramètre du second ordre $\Delta_2 V$ de Beltrami, du double c de la courbure moyenne de Σ au point considéré et des dérivées premières et secondes de V prises suivant la normale à Σ; les rayons de courbure R_1 et R_2 principaux doivent être comptés positivement dans le même sens que la normale:

$$\Delta V = \Delta_2 V + \frac{d^2 V}{dn^2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{dV}{dx}.$$

En prenant les surfaces d'égale densité $\Phi = a$ pour surface Σ et Φ pour fonction V, le paramètre $\Delta_2\Phi$ s'évanouit et il reste:

$$\Delta\Phi = \frac{d^2\Phi}{dn^2} - c\frac{d\Phi}{dn} .$$

L'équation (15′) s'écrit sous la forme intéressante:

$$\frac{d^2\Phi}{dn^2} - c\frac{d\Phi}{dn} = -4\pi\varepsilon\rho + \Delta Q , \tag{23}$$

puis, en remplaçant la dérivée normale de Φ par la pesanteur g, on a en tout point de la surface d'égale densité ρ:

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi\varepsilon\rho + \Delta Q , \tag{24}$$

c'est la formule rigoureuse de l'accroissement de g *avec la profondeur.*

Sur la surface extérieure S, c est mesurable ainsi que ρ de sorte que cette relation donne l'accroissement de g quand on s'enfonce dans la masse, et inversément, si cet accroissement est connu, on en déduit la courbure moyenne.

Ainsi *une mesure de l'accroissement du poids avec la profondeur équivaut à une mesure de la courbure moyenne des surfaces d'égale densité.*

§ 7. *Stratification, charge et pesanteur.*

Les surfaces d'égale densité seront supposées de révolution. La stratification sera la répartition des surfaces d'égale densité au point de vue strictement géométrique, et la charge ou loi des densités sera la loi suivant laquelle varie la densité quand on passe d'une surface à une autre. Nous admettons en plus pour une raison de stabilité que la densité croît avec la profondeur et que la surface de densité maximum se réduit à un seul point appelé centre. Nous nous donnerons séparément ces deux éléments au moyen d'un paramètre t. Soient S_t la stratification et $\rho(t)$ la loi des densités. Le potentiel du champ de la pesanteur Φ, n'étant fonction que de ρ dans tous les cas où il existe, sera fonction de t uniquement: $\Phi(t)$.

Pour l'étude du champ de la pesanteur à l'intérieur de la planète, supposons construites les lignes de forces de ce champ, lignes à tangentes verticales en chaque point. Les surfaces S_t et les lignes de forces donnent un système de trajectoires orthogonales. La planète étant supposée de révolution, il suffit de considérer un plan méridien, et dans celui-ci les lignes de forces coupent à angle droit les méridiennes des surfaces S_t. Soient θ une coordonnée servant à repérer les lignes de forces dans ce plan, t et θ forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales. On peut donner à t et θ des significations spéciales, c'est ce que nous ferons, mais cela n'est pas nécessaire. Pour fixer les idées, t sera le rayon polaire de la surface S_t et θ le complément de la latitude géographique du point P où la ligne de force θ perce la surface extérieure; c'est donc l'angle de la normale en P et de l'axe de rotation. S sera donné par $t = e$.

Le coefficient g de la pesanteur devient fonction de t et de θ ainsi que le déplacement normal dn rapporté à l'accroissement de t, tandis que Φ reste fonction de t seul.

Posons:

$$\frac{dn}{dt} = \mathrm{N}(t, \theta) ,$$

cette expression est égale à un sur l'axe polaire $\mathrm{N}(t, o) = 1$; et l'on a:

$$g = \frac{d\Phi}{dn} = \frac{d\Phi}{dt}\frac{dt}{dn} \quad \text{où} \quad \frac{d\Phi}{dt} = g(t, \theta)\mathrm{N}(t, \theta) = g(t, o) .$$

On déduit de cette dernière relation:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{g(t, o)}{g(t, \theta)} .$$

Sur une surface d'égale densité le coefficient de la pesanteur varie en raison inverse de la distance de cette surface aux surfaces infiniment voisines.

Cette propriété bien connue pour l'équilibre relatif subsiste sans modification pour tout mouvement de genre un, elle découle de l'existence du potentiel Φ.

§ 8. *Sur deux conditions traduites par des équations intégrales.*

Représentons le second membre de l'équation (24) par $f(s, \theta)$, elle s'écrit:

$$\frac{dg}{dn} - cg = f\ ; \tag{27}$$

avec la variable t elle prend la forme suivante:

$$\frac{dg}{dt} = cg\mathrm{N} + f\mathrm{N}\ . \tag{28}$$

Elle est linéaire en g, sa solution formelle est:

$$g(t, \theta) = \mu(t, t', \theta)\left[g(t', \theta) - \int_{t'}^{t} \mu(t', s, \theta)\,\mathrm{N}(s, \theta) f(s, \theta)\,ds\right], \tag{29}$$

t' est une valeur arbitraire du paramètre t; μ représente la fonction:

$$\mu(t, t', \theta) = e^{\int_t^{t'} c(s, \theta)\,\mathrm{N}(s, \theta)\,ds}\ , \tag{30}$$

cette dernière satisfait à la relation:

$$\frac{d\mu(t, t', \theta)}{\mu(t, t', \theta)} = -\,c(t, \theta)\,dx = -\,\frac{dd\sigma_t}{d\sigma_t}\ .$$

On sait, en effet, que $c\,dn$ est le quotient de l'accroissement d'une aire $d\sigma_t$ de la surface S_t rapportée à cette aire. En intégrant l'équation précédente de t' à t on trouve:

$$\mathrm{L}\,\frac{\mu(t, t', \theta)}{\mu(t', t', \theta)} = -\,\mathrm{L}\,\frac{d\sigma_t}{d\sigma_{t'}}\ ;$$

en définitive, on trouve, si l'on tient compte de ce que $\mu(t', t', \theta) = 1$:

$$\mu(t, t', \theta) = \frac{d\sigma_{t'}}{d\sigma_t}\ .$$

La fonction $\mu(t, t', \theta)$ est donc égale au rapport des aires de deux sections d'un tube de force élémentaire par les surfaces S_t et $S_{t'}$. Ces tubes de forces ayant leur sommet au centre de la planète, il est clair que l'on a:

$$\lim_{t' \to 0} \mu(t, t', \theta) = 0 \ , \qquad \lim_{t \to 0} \mu(t, t', \theta) = +\infty \ ,$$

$$\mu(t, t', \theta)\mu(t', s, \theta) = (t, s, \theta) \ ,$$

relations que l'on peut vérifier sur l'expression primitive (30) de μ en tenant compte de ce que la courbure c devient infinie comme $\frac{1}{t}$ lorsque t tend vers zéro.

L'équation (29) peut donc s'écrire:

$$g(t, \theta) = \mu(t, t', \theta) g(t' \theta) - \int_{t'}^{t} \mu(t, s, \theta) \mathrm{N}(s, \theta) f(s) \, ds \ ,$$

et en faisant tendre t' vers zéro on trouve:

$$g(t, \theta) = -\int_{0}^{t} \mu(t, s, \theta) \mathrm{N}(s, \theta) f(s, \theta) \, ds \ ,$$

ou encore plus simplement:

$$g(t, \theta) = -\int_{0}^{t} \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t} \frac{dx}{ds} f \, ds \ . \tag{31}$$

On pourrait, bien entendu, établir ces valeurs de g plus rapidement en appliquant la formule de Green du flux et de la divergence à l'expression $\Delta\Phi$ et à un tube de force élémentaire.

Mais les formules de passage précédentes sont intéressantes. Si les éléments de Stokes généralisés S, $w(l)$, M sont connus, g est connu sur S de sorte que l'on doit avoir:

$$g(e, \theta) = -\int_{0}^{e} \mu(e, s, \theta) \mathrm{N}(s, \theta) f(s, \theta) \, ds \ . \tag{32}$$

Les fonctions μ et N ne dépendent que de la stratification. Si cette dernière était connue, (32) serait une équation intégrale de Fredholm de première espèce qui détermine la charge par l'intermédiaire de $f(s, \theta)$.

Dans le cas de l'équilibre relatif, f ne dépend que de s:

$$f(s) = -4\pi\varepsilon\rho(s) + 2\omega^2 .$$

En multipliant $g(t, \theta)$ par $N(t, \theta)$, on doit obtenir $g(t, o)$ de sorte que l'on peut écrire:

$$g(t, o) = -\int_0^t N(t, \theta) N(s, \theta) \mu(t, s, \theta) f(s, \theta) ds .$$

Soustrayons de cette équation celle que l'on obtiendrait pour une autre valeur θ' et l'on trouvera, en posant:

$$G(t, s, \theta, \theta') = \left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds}\frac{d\sigma_s}{d\sigma_t}\right)_\theta - \left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{ds}\frac{d\sigma_s}{d\sigma_t}\right)_{\theta'},$$

$$\int_0^t G(t, s, \theta, \theta') f(s) ds = 0 , \tag{33}$$

dans le cas de l'équilibre relatif. La relation (33) est une équation intégrale de Volterra de première espèce donnant la charge par l'intermédiaire de f si la stratification est supposée connue.

De la relation de Poincaré $\omega^2 < 2\pi \times$ densité moyenne, on déduit que la fonction f est négative au voisinage du centre, car la densité croît avec la profondeur. Soit t^x la valeur de t correspondant à la densité moyenne, on aura de $t = 0$ à t^x l'inégalité $f < 0$.

En vertu de l'équation (33), la fonction $G(t, s, \theta, \theta')$ doit changer de signe, au moins une fois, lorsque s varie de o à t, pour toute valeur de t comprise entre o et t^x et quelles que soient les lignes de forces θ et θ'. Cette dernière condition imposée à la fonction G ne porte que sur la stratification.

L'étude précédente a mis en évidence la courbure moyenne des surfaces d'égale densité. Elle est égale à l'expression:

$$c(t, \theta) = \frac{1}{R_1(t, \theta)} + \frac{1}{R_2(t, \theta)} ,$$

$R_1(t, \theta)$ est la portion de normale allant du point t, θ à l'axe de rotation et $R_2(t, \theta)$ est le rayon de courbure du méridien de la surface S_t au point θ.

La courbure moyenne devient infinie au voisinage du centre de la planète et l'équation de Volterra (33) est singulière. En admettant le droit à dériver sous le signe somme, on en tire l'équation singulière:

$$G(t, t, \theta) f(t) + \int_0^t \frac{\partial G(t, s, \theta)}{\partial t} f(s)\, ds = 0 \qquad (34)$$

pour l'équilibre relatif; la dérivée de G contient en facteur la courbure moyenne c qui tend vers l'infini au moins comme $\frac{1}{t}$, lorsque t tend vers 0.

On voit combien il importe de savoir ce qu'est la stratification au voisinage du centre, puisque c'est au voisinage de ce point que se présente la singularité. Nous avons déjà montré que les surfaces d'égale densité tendent en forme vers un ellipsoïde quand on se rapproche du centre. La démonstration donnée dans l'article précédent ne supposait pas l'existence des dérivées partielles premières de la fonction $\rho(x, y, z)$ au centre même de la planète. Sous des conditions plus restrictives, on peut établir la même conclusion très simplement, c'est ce que nous ferons au dernier paragraphe de cet article.

§ 9. *Charge et stratification, cas des mouvements de genre un.*

Le théorème de Stokes montre que le potentiel à l'extérieur, quoique créé par la masse entière, ne dépend, en fait, que des éléments S, $\omega(l)$, M. S'il pouvait théoriquement exister deux répartitions différentes de la matière à l'intérieur de l'astre, correspondant aux mêmes éléments de Stokes généralisés, on ne pourrait les distinguer par des mesures faites sur le champ de l'attraction à l'extérieur.

Dans cet ordre d'idée, la formule de passage du § 8, que l'on peut écrire:

$$g(t, \theta) = \mu(t, e, \theta) g(e, \theta) - \int_e^t \mu(t, s, \theta) N(s, \theta) f(s, \theta)\, ds ,$$

est intéressante. En effet, si la stratification et la charge sont les mêmes de e à t, la pesanteur sera déterminée, par les éléments de Stokes généralisés, d'une manière unique sur la surface S_t, quelle que soit la distribution de la matière à l'intérieur de cette dernière surface, au cas où il y aurait plusieurs distributions possibles. Montrons que, *la stratification, la vitesse angulaire* $\omega(1)$ *et la masse totale étant données, les densités ne pourraient bifurquer qu'à partir d'une surface, parallèle aux surfaces infiniment voisines, sur laquelle la pesanteur serait constante.*

Il en serait ainsi, en particulier, de la surface extérieure si sur cette dernière deux densités différentes pouvaient convenir à la même stratification.

En effet, appelons τ la surface à partir de laquelle la bifurquation pourrait se présenter et soient ρ' et ρ'', H', H'', f', f'' les fonctions ρ, $H = g(t, o)$ et f correspondant à deux distributions différentes pour $t < \tau$.

On a $H'(t) = H''(t)$ pour $t = \tau$ puisque la pesanteur est encore la même sur cette surface. Posons:

$$H^x(t) = H'(t) - H''(t) , \qquad f^x(t) = f' - f'' = -4\pi\varepsilon(\rho' - \rho'') .$$

On déduit de la formule (28) la relation:

$$H^x(t) = N(t, \theta) \int_\tau^t (cH^x + Nf^x)_\theta ds .$$

Dérivons les deux membres de cette équation et identifions les résultats pour $t = \tau$. On trouve:

$$N^2(\tau, \theta) f^x(\tau) = \frac{dH^x}{d\tau} .$$

Si $f^x(\tau)$ est différent de 0, $N(\tau, \theta)$ ne saurait dépendre de θ et la conclusion s'impose, on aurait avec notre choix du paramètre t, $N^2(\tau, \theta) = 1$, puis $g(\tau, \theta) = g(\tau, o)$. Si $f^x(\tau)$ est nul, dérivons encore une fois ce qui donne:

$$N^2(\tau, \theta) \frac{df^x}{d\tau} = \frac{d^2 H^x}{d\tau^2} ,$$

et la même conclusion se dégage si la dérivée de f^x n'est pas nulle; sans quoi on poursuivra jusqu'à rencontrer une relation:

$$N^2(\tau, \theta)\frac{d^n f^x}{d\tau^n} = \frac{d^{n+1} H^x}{d\tau^{n+1}},$$

qui permette de conclure. La fonction f^x n'étant pas identiquement nulle pour $t < \tau$, il faudrait, pour échapper aux conclusions, qu'elle ne fût pas représentable par sa série de Taylor au voisinage de la valeur τ.

§ 10. *Sur les principes du repos et la soustraction des mouvements.*

Si la stratification est entièrement constituée par des sphères concentriques, la masse fluide ne peut être qu'au repos absolu. La réciproque est-elle vraie ?

Une masse fluide hétérogène au repos n'admet-elle que la stratification en sphères concentriques ? Cette réciprocité permettrait d'éviter bien des détours; elle peut avoir plusieurs degrés de généralité suivant les hypothèses faites sur la répartition des densités. Distinguons alors les quatre principes suivants.

Une masse fluide hétérogène au repos dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton ne peut admettre que des surfaces d'égale densité sphériques et concentriques :

1° si la densité est partout positive et croît de la surface libre au centre,

2° si la densité est partout positive et varie d'une manière quelconque,

3° si la densité croît de la surface libre où elle est négative au centre où elle est positive,

4° si la densité est absolument quelconque.

Il est clair que, des particules de signes contraires se repoussant suivant la loi de Newton, il faudrait le cas échéant faire intervenir une pression constante sur la surface libre qui empêcherait la masse d'éclater normalement, mais cela n'est pas essentiel. Envisageons maintenant deux mouvements de genre un répondant à la même stratification et à la même répartition des vitesses $\omega(l)$. Soient ρ' et ρ'' deux lois de densité, Φ', Φ'', U', U'', K', K'' les éléments de l'équation fondamentale correspondants et posons:

$$\rho^x(t) = \rho'(t) - \rho''(t) \; ; \qquad \Phi^x(t) = \Phi'(t) - \Phi''(t) \; ;$$
$$U^x = U' - U'' \, , \qquad K^x = K' - K'' \, .$$

Les équations relatives à chacune des deux répartitions:

$$\Phi' = U' + Q + K' \, , \qquad \Phi'' = U'' + Q + K'' \, ,$$

donnent par soustraction un état de repos absolu, car le terme Q qui contenait ω disparaît :

$$\Phi^x(t) = U^x + K^x \, , \qquad \text{d'où} \qquad U^x = U^x(t) \, .$$

Le fluide qui aurait en chaque point la densité ρ^x créerait un champ de Newton normal aux surfaces d'égale densité. Il serait donc en équilibre absolu. La densité ρ^x aurait dans le cas général un signe quelconque et le quatrième principe du repos permettrait de conclure que, s'il y a bifurquation des densités, la stratification est nécessairement sphérique dans sa totalité.

Un autre auteur a donné une démonstration du principe sous la forme 1°, mais nous avons remarqué qu'elle n'était pas à l'abri de toute critique.

M. Liapounoff a démontré que la sphère était la seule figure d'équilibre stable pour une masse homogène au repos et M. Lichtenstein a pu s'affranchir dans le cas de l'homogénéité de la condition de stabilité.

§ 11. *Charge et stratification, cas de l'équilibre relatif.*

Nous appelerons, dans le cas de l'équilibre relatif, *densité transformée*, l'expression:

$$f = -4\pi\varepsilon\rho + 2\omega^2 \, ,$$

et *stratification en un point* P, la répartition, au point de vue strictement géométrique, des surfaces d'égale densité au voisinage de P, c'est-à-dire dans une sphère centrée en P est de rayon arbitrairement petit.

Soient alors, comme précédemment, t les surfaces d'égale densité et θ les lignes de forces du champ de la pesanteur. L'existence du potentiel dont dérive ce dernier champ permet d'écrire l'équation vraie, quelles que soient les valeurs θ' et θ'' du paramètre θ:

$$\left(g\frac{dn}{dt}\right)_{\theta'} = \left(g\frac{dn}{dt}\right)_{\theta''}.$$

Dérivons par rapport à t les deux membres et tenons compte de la relation, vraie le long de chaque ligne de force θ:

$$\frac{dg}{dt} = (cg + f)\frac{dn}{dt}.$$

Après un calcul simple on trouve l'identité en θ, θ', θ'':

$$\frac{f_{\theta'}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2_{\theta'} - f_{\theta''}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2_{\theta''}}{g_\theta\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta} = \left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)_{\theta'} - \left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)_{\theta'},$$

et cela pour tout mouvement de genre un. L désigne ici le logarithme népérien. Si la planète est en équilibre relatif, la fonction f ne dépend plus de θ et peut-être mise en facteur, ce qui donne:

$$\frac{f}{g_\theta\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta} = -\frac{\left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)_{\theta''} - \left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)_{\theta'}}{\left(\frac{dn}{dt}\right)^2_{\theta''} - \left(\frac{dn}{dt}\right)^{\theta'}_{2}}. \tag{37}$$

Le premier membre de cette équation ne dépend que de t, le second ne dépend que de la stratification; plus que cela, ce dernier ne dépend que de la stratification en un point P, d'ailleurs quelconque, de la surface t, puisque l'on peut prendre deux valeurs θ' et θ'' aussi voisines que l'on veut. Soit $\Psi(t)$ la valeur commune des deux membres de l'équation (37). Le rapport de f à g s'en dégage et ne dépend que de la stratification au point considéré:

$$\frac{f}{g} = \Psi(t)\frac{dn}{dt}.$$

Marquons ce stade intermédiaire de nos calculs en formulant cette proposition:

Le rapport, en un point P, de la densité transformée et de la pesanteur ne dépend que de la stratification en P.

Pour simplifier par la suite nos formules, particularisons à nouveau les paramètres θ et t de telle sorte que la ligne $\theta = 0$ soit l'axe polaire et t la distance du pôle nord de la surface libre au pôle nord de la surface t. On obtient sur cet axe polaire:

$$\frac{dg}{g} = (c + \Psi)\, dt \ ,$$

rapport qui ne dépend, lui aussi, que de la stratification; puis en intégrant:

$$g(t\,,\ o) = g(o\,,\ o)\,\Sigma(t\,,\ o) \tag{38}$$

avec:

$$\Sigma(t\,,\ 0) = e^{\int_0^t (c+\Psi)\, dt} \ . \tag{39}$$

Enfin, les relations, plus simples dans ce système particulier de coordonnées:

$$g(t\,,\ o) = g(t\,,\ \theta)\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta, \qquad f(t) = g(t\,,\ o)\,\Psi(t) \ ,$$

donnent, en tout point P, la pesanteur et la densité transformée, à partir de la stratification et de la pesanteur ou attraction au pôle de la surface libre $g(0,\ 0)$. On obtient en effet

$$g(t\,,\ \theta) = g(o\,,\ o)\left(\frac{dt}{dn}\right)_\theta \Sigma(t\,,\ o) \ , \tag{40}$$

$$f(t) = g(o\,,\ o)\,\Psi(t)\,\Sigma(t\,,\ o) \ . \tag{41}$$

Nous tirerons les conclusions qui se dégagent de ces formules au paragraphe suivant après avoir défini un cas particulier où elles deviennent illusoires et nous reviendrons ici sur la définition de la fonction Ψ fournissant le rapport f à g.

Le symbole d représentera toujours une différentielle relative à un passage dt d'une surface t à une surface voisine, ce passage se faisant suivant une normale, c'est-à-dire à θ constant. δ représentera, au contraire, une différentielle relative à une variation $\delta\theta$ à t constant, c'est-à-dire que δ se rapportera à un changement de position sur une même surface d'égale densité. Toutefois nous ne voyons pas d'inconvénient, pour ne pas multiplier les notations, à représenter par $d\sigma$ une aire élémentaire d'une surface t qui deviendra par transport parallèle dt une aire $d\sigma + dd\sigma$, sur la surface $t + dt$. Nous aurions pu représenter l'aire élémentaire $d\sigma$ par une autre notation, $D\sigma$ par exemple, mais je ne pense pas que des confusions soient possibles. On a comme on sait:

$$c\,dn = -\,d\mathrm{L}\,d\sigma\ .$$

En revenant à l'équation (37) où θ' et θ'' seront considérées comme les deux valeurs $\theta' = \theta$ et $\theta'' = \theta + \delta\theta$, on pourra écrire:

$$\frac{f}{g_\theta\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta} = \Psi(t) = -\frac{\delta\left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)}{\delta\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}\,,$$

puis:

$$\frac{f}{g} = \frac{1}{2}\frac{\delta d\mathrm{L}\frac{d\sigma}{dn}}{\delta dn} = \frac{1}{2}\frac{\delta\left(\frac{d^2\sigma}{d\sigma} - \frac{d^2 n}{dn}\right)}{\delta dn}\,,$$

et enfin, si dt représente à nouveau un déplacement sur l'axe polaire, on pourra définir la fonction Ψ par la stratification au voisinage de cet axe:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}\frac{\delta d\mathrm{L}\frac{d\sigma}{dn}}{\delta dn}\ .$$

Il est bon de remarquer qu'on ne peut pas intervertir au numérateur les symboles δ et d; en effet, l'expression $\delta D\sigma$ n'a pas de signification précise puisque les aires $(D\sigma)_0$ et $(D\sigma)_{\theta+\delta\theta}$ sont sans rapport l'une avec l'autre; au contraire l'expression:

$$\delta d\mathrm{L}\,D\sigma = \delta\frac{dD\sigma}{D\sigma}$$

a une signification parfaitement claire puisque δ agit cette fois sur une fonction de t et de θ bien définie.

§ 12. *Le cas exceptionnel des sphères concentriques.*

Les formules donnant f et g à partir de la stratification deviendraient illusoires si la stratification cessait de définir d'une manière univoque la fonction Ψ. Or cette dernière est le quotient de la densité transformée, fonction continue de t comme la densité elle-même, par la pesanteur qui ne s'annule qu'au centre, et cette pesanteur est aussi continue. La fonction $\Psi(t)$ ne peut être que continue sur l'intervalle i: $0 \leq t < a$ qui va du pôle nord compris: 0, au centre: a exclu. Si le second membre de l'équation (37) définissait la fonction Ψ sur un ensemble de points partout dense sur i, la fonction Ψ serait définie sur i tout entier et le cas exceptionnel ne se présenterait pas. Pour que ce cas se présente, il faut donc qu'il existe un intervalle j : $t_1 < t < t_2$ sur lequel le second membre de l'équation (37) ne fournisse aucune valeur de Ψ. Or ce rapport ne peut donner lieu à une indétermination que s'il se présente sous la forme $\frac{o}{o}$. Avec le choix particulier du paramètre t, on devrait avoir, quels que soient t sur j, et quels que soient θ, θ' et θ'':

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta = 1 \,, \qquad \text{d'où} \qquad L\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta = 0 \,, \qquad \text{d'où} \qquad c_{\theta'} = c_{\theta''} \,.$$

Les surfaces d'égale densité devraient être à courbure moyenne constante; or, parmis les corps de révolutions, il n'y a que les sphères qui répondent à ces conditions. Ces sphères devraient être parallèles aussi, donc concentriques. Le cas exceptionnel est spécialement simple on le voit. Il pouvait être prévu *a priori* puisque le repos complet $\omega = 0$ est un cas particulier et que des sphères concentriques peuvent être chargées d'une infinité de manières qui assurent toutes l'équilibre absolu de la masse fluide. En résumé, la fonction Ψ ne cesserait d'être définie d'une manière univoque par la stratification que s'il existait une couche d'épaisseur finie $t_1 < t_2$ de sphères concentriques. De ces deux derniers paragraphes se dégage la conséquence suivante:

A part le cas banal des sphères concentriques, la densité et la pesanteur sont en tout point entièrement déterminées par la stratification et l'attraction au pôle de la surface libre.

§ 13. *Sur la condition nécessaire et suffisante imposée à la stratification seule.*

Notre étude a montré (§ 5) que l'on doit avoir dans toute la masse:

$$\Delta\Phi = -4\pi\varepsilon\rho + 2\omega^2 , \tag{42}$$

et sur la surface libre:

$$\Phi = U + Q + K , \tag{43}$$

ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes. Nous en avons déduit les conditions équivalentes:

$$\frac{dg}{dn} = cg + f , \quad (44) \qquad g_S = F \mid S , \omega , M \mid ; \quad (45)$$

la première doit être satisfaite dans l'astre entier et la seconde exprime que sur la surface libre la pesanteur g_S doit avoir ces valeurs stokiennes.

Ces dernières déterminent sur S la dérivée normale:

$$S \qquad \left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta = \frac{g(o , o)}{g(o , \theta)} , \tag{46}$$

et si la fonction $\Psi(t)$ existe, définie qu'elle est par le second membre de l'équation (37), la valeur (40) de g:

$$g(t , \theta) = \frac{g(o , o)}{\left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta} e^{\int_0^t [c+\Psi(t)]_{\theta=o} dt} \tag{47}$$

résout l'équation (44).

Or, la fonction $\Psi(t)$ existe si l'on a, quels que soient θ, θ', θ'' et t:

$$\frac{y_{\theta'} - y_\theta}{y_{\theta''} - y_\theta} = \frac{x_{\theta'} - x_\theta}{x_{\theta''} - x_\theta} , \tag{48}$$

équation d'une droite en x, y où ces variables ont la signification suivante:

$$y_\theta = \left(c\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}\mathrm{L}\frac{dn}{dt}\right)_\theta \qquad \text{et} \qquad x_\theta = \left(\frac{dn}{dt}\right)_\theta^2 .$$

Les conditions (46) *et* (48) *sont donc nécessaires et suffisantes pour que l'on ait un équilibre relatif.* Il est remarquable que la condition (48) ne porte que sur la stratification et soit indépendante de g, de ρ, de M et même de ω. Quant à la condition à la limite (46), elle exprime la valeur de la dérivée première:

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = F \mid S, \omega, M \mid,$$

à partir des éléments de Stokes.

On montrerait encore facilement que la dérivée $\left(\frac{dc}{dt}\right)_{t=0}$ ne dépend que des éléments de Stokes.

§ 14. *Sur un problème généralisé de Neumann et de Dirichlet.*

Le problème de Dirichlet consiste comme on sait a résoudre l'équation $\Delta\Phi = 0$ à l'intérieur d'un volume T de telle sorte que, sur la surface S qui limite le volume, la fonction Φ prenne une succession f de valeurs données à l'avance.

Le problème de Neumann consiste à résoudre la même équation dans T en se donnant au contraire la dérivée normale $\frac{d\Phi}{dn}$ sur S.

Si l'équation à résoudre est de la forme $\Delta\Phi = \varphi$ où $\Delta\Phi = \lambda\Phi$, φ étant une fonction donnée dans T et λ une constante, on a des problèmes de Dirichlet et de Neumann transformés.

L'équation:

$$\Delta\Phi = -4\pi\varepsilon\rho(\Phi) + 2\omega^2,$$

qu'il s'agit de résoudre en Φ et $\rho(\Phi)$ dans le cas des figures d'équilibre, à l'intérieur de la planète, avec, sur la surface libre, $\Phi = 0$ et $\frac{d\Phi}{dn} = g_S =$ fonction donnée est plus générale ; elle conduit à poser le problème analytique suivant:

Etant donné un volume T limité par une surface fermée S, trouver en $F(\Phi)$ et $\Phi(x, y, z)$ les solutions de l'équation:

$$\Delta\Phi = F(\Phi),$$

telles que Φ et sa dérivée normale $\frac{d\Phi}{dn}$ prennent sur la surface S une succession de valeurs données à l'avance: f_1 d'une part, f_2 de l'autre:

$$\Phi = f_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\Phi}{dn} = f_2 \; .$$

Il ya donc deux conditions à remplir, celle de Dirichlet et celle de Neumann, mais on dispose de deux fonctions inconnues F et Φ.

Nous appelerons ce problème: problème de Neumann-Dirichlet généralisé.

Dans le cas des figures d'équilibre, la fonction f_1 était identiquement nulle et la fonction f_2 coïncidait avec le g sur la surface libre donné par le théorème de Stokes. Dans ce cas, comme nous l'avons vu, l'intervention des surfaces à Φ constant était utile puisque c'est l'équation entre rapports harmoniques (48) qu'il suffisait de résoudre avec la condition de Neumann (44).

Dans le cas particulier où le fluide satisfait à une équation caractéristique $\rho = f(p)$ connue, les fonctions $\rho(\Phi)$ et $F(\Phi)$ doivent être considérées comme données.

Enfin, dans le cas très spécial où l'équation caractéristique serait:

$$\mu - \mu_0 = \alpha(\rho^2 - \rho_0^2) \; ,$$

α étant une constante, l'équation à résoudre s'écrirait:

$$\Delta\Phi = \lambda\Phi + 2\omega^2 \; .$$

La théorie de Fredholm permet d'affirmer qu'il ne peut y avoir qu'une seule solution Φ, c'est-à-dire une seule répartition de la matière possible à l'intérieur de l'astre, à moins que la surface S ne puisse assurer en même temps le repos absolu.

§ 15. *Etude de la stratification au voisinage du centre.*

Nous avons vu le rôle essentiel que joue la courbure moyenne $\frac{c}{2}$ des surfaces d'égale densité dans l'étude précédente. Or, lorsque l'on tend vers le centre, cette courbure augmente indéfiniment; il s'agit de savoir de quelle manière elle tend vers l'infini, si c'est uniformément, c'est-à-dire quel que soit le paramètre θ, ou non; à ce propos, les propositions suivantes sont essentielles:

a) *Les surfaces d'égale densite tendent vers un ellipsoïde infiniment petit quelle que soit la rotation permanente envisagée si les dérivées partielles premières et seconde de la densité $\rho(x, y, z)$ sont continues au voisinage du centre.*

b) *Dans le cas de l'équilibre relatif, il suffit que la densité ρ ait des dérivées premières continues à partir d'une certaine profondeur pour que le même phénomène se produise.*

En effet, soit x, z un plan méridien et partout en cote la densité ρ du point x, z. Cela donne dans l'espace x, z, ρ une surface $\rho = \rho(x, z)$ qui est convexe au point $x = 0$, $z = 0$ de densité maximum. L'indicatrice d'Euler existe et c'est une ellipse. D'autre part, on sait que cette ellipse est la forme limite des intersections de la surface par les plans à ρ constant. On peut donc conclure que les méridiens des surfaces d'égale densité, identiques aux courbes précédentes, tendent vers la forme ellipsoïdale quand on se rapproche du centre.

Pour la validité du raisonnement précédent il faut que l'indicatrice d'Euler existe, et elle existait puisque les dérivées premières et secondes de ρ existaient et étaient supposées continues au voisinage du centre. Maintenant supposons que les dérivées premières existent seules, mais que ω soit constant. Alors la théorie du potentiel nous apprend que U admet des dérivées partielles premières et secondes continues et il en est de même de la fonction Φ qui ne dépend que de ρ et qui est maximum au centre. Le raisonnement précédent peut s'appliquer à la fonction Φ et la même conclusion s'impose car les intersections à Φ constant sont à ρ constant.

Dans l'article précédent, nous pouvions conclure relativement à tout mouvement de genre un, sans faire des hypothèses aussi restrictives, mais la démonstrations était plus longue.

16 février 1928.