

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 9 (1927)

**Artikel:** Sur la masse fluide hétérogène en rotation et la géodésie  
**Autor:** Wavre, Rolin  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-740950>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

rement ces affirmations. Pour faire cette preuve, considérons une molécule gazeuse arrivant en vitesse contre la paroi de sa prison. Dès que les sphères d'action de l'éther, qui l'enveloppent sont en contact avec celles des parois solides, les déformations de ces masses d'éther commencent et le potentiel de l'éther est mis en jeu: La vitesse d'arrivée de la molécule gazeuse diminue et cela jusqu'au repos complet. A ce moment la totalité de l'énergie de la molécule arrivante est transformée en potentiel de l'éther protecteur des deux masses de matières: molécules solides, molécules gazeuses. Un temps d'arrêt, le potentiel agit et la molécule repart, avec une vitesse presque égale, mais en sens inverse. Elle recommence son allure rythmée au travers de la prison.

Or le phénomène de l'arrêt de la molécule, se calcule. C'est la vitesse d'une molécule gazeuse  $v$ , vitesse moyenne du gaz à zéro à l'arrêt. Le second temps c'est sous des forces presque identiques le départ de  $0 = v$  de cette même molécule. On estime ce second temps par la même durée que le premier. Donc pendant un temps précis, somme du temps de l'arrêt, plus le temps du départ, nous avons transformé de l'énergie de la molécule gazeuse en potentiel de l'éther. Nous savons que l'énergie du potentiel disparaît totalement, de toute estimation de la force-vive actuelle d'un milieu. Donc ce potentiel est une perte dans le bilan de la force vive actuelle des masses gazeuses enfermées.

#### Séance du 3 novembre 1927.

**Rolin Wavre.** — *Sur la masse fluide hétérogène en rotation et la géodésie.*

On démontre en mécanique céleste<sup>1</sup> un théorème très remarquable dû à Stokes: Le potentiel newtonien  $U$  d'une masse fluide hétérogène en équilibre relatif est entièrement déterminé à l'extérieur par la surface libre  $S$ , la vitesse angulaire  $\omega$  et la masse totale  $M$ :

$$U_{\text{ext}} = F(S, \omega = c, M).$$

<sup>1</sup> POINCARÉ: Figure d'équilibre, page 96.

Cette importante proposition est relative au cas où la vitesse angulaire est une constante  $\omega = c$ . Je vais montrer qu'elle s'étend à tous les cas où la vitesse angulaire est fonction de la distance à l'axe, c'est-à-dire à toute planète dont les couches d'égale densité sont en chaque point horizontales<sup>1</sup>.

Le détail des démonstrations qui relèvent de la théorie des fonctions harmoniques ne sera pas donné dans cette note.

Soit  $\omega(l^2)$  l'expression de la vitesse angulaire d'une molécule située à la distance  $l$  de l'axe de rotation et soit

$$Q = \int_0^{l^2} \omega^2(l^2) \frac{1}{2} dl^2 \quad (1)$$

le potentiel des accélérations. Soit encore  $U$  le potentiel newtonien et  $\Phi$  le potentiel du champ de la pesanteur qui est ici fonction de la densité  $\rho$ :  $\Phi(\rho)$ .

Comme on le sait, les équations de l'hydrodynamique, qui régissent le mouvement, se résument en l'équation suivante

$$\Phi = U + Q - K, \quad (2)$$

où  $K$  est une constante. Considérons l'équation plus générale où  $h$  représente une fonction harmonique à l'intérieur de la masse

$$\Phi = U + Q - K + h \quad (3)$$

et l'équation équivalente:

$$\Delta\Phi = \Delta U + \Delta Q \quad (4)$$

qui donne, en vertu de l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = -4\pi\epsilon\rho + \Delta Q. \quad (5)$$

Pour qu'une solution de (5) en  $\rho(x, y, z)$  et  $\Phi(\rho)$  soit solution de (2), il suffira que  $\Phi$  soit nulle sur la surface extérieure qui a une densité constante; on pourra toujours supposer qu'il en est

<sup>1</sup> C. R. Soc. phys. Genève, 2 déc. 1926.

ainsi; et d'autre part, que la surface extérieure soit en équilibre relatif, condition qui est d'ailleurs nécessaire. On devra donc avoir sur S

$$\Phi = 0 \quad (6) \quad \text{et} \quad U + Q - K = 0 ; \quad (7)$$

alors la fonction harmonique  $h$  sera nulle sur S et par conséquent dans toute la masse. De l'équation (5) on peut tirer  $\rho$

$$4\pi\epsilon\rho = \Delta Q - \Delta\Phi$$

et l'on peut formellement calculer le potentiel U

$$4\pi U = \iiint \frac{1}{r} \Delta Q d\tau - \iiint \frac{1}{r} \Delta\Phi d\tau . \quad (8)$$

La fonction  $\Phi$  étant nulle sur S on déduit d'une formule fondamentale de Green l'identité:

$$-\iiint \frac{1}{r} \Delta\Phi d\tau = \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS \quad (9)$$

la seconde intégrale est étendue à la surface S et  $\frac{d\Phi}{dn}$  désigne la dérivée normale intérieure de  $\Phi$ . La formule (9) est valable à l'extérieur de S et sur S, tandis que la formule (8) est vraie partout. Le potentiel  $U_e$  à l'extérieur et sur la surface libre peut donc s'écrire

$$4\pi U_e = \iiint \frac{1}{r} \Delta Q d\tau + \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS . \quad (10)$$

Mais le potentiel sur la surface S est également donné par l'équation (7). On tire de (7) et (10) la relation valable sur S et à son intérieur:

$$\iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi K - 4\pi Q - \iiint \frac{1}{r} \Delta Q d\tau . \quad (11)$$

La dérivée normale de  $\Phi$  est donc une charge répartie sur la surface et donnant à l'intérieur et sur S un potentiel déterminé à la constante  $k$  près. Or la masse totale M donne lieu à la relation

$$4\pi\epsilon M = 4\pi\epsilon \iiint \rho d\tau = \iiint \Delta Q d\tau - \iiint \Delta\Phi d\tau \quad (12)$$

d'où par Green:

$$\iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi \epsilon M - \iiint \Delta Q d\tau \quad (13)$$

qui détermine la constante K.

La théorie des fonctions harmoniques permet d'affirmer l'existence d'une solution et d'une seule des équations (11) et (13) et l'on pourrait expliciter  $\frac{d\Phi}{dn}$ .

En portant cette dernière valeur dans l'expression (10) du potentiel on pourra calculer ce dernier à partir des éléments M, S et  $\omega^2(l)$ .

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes:

I. Dans le mouvement d'une planète sur elle-même, que la vitesse angulaire soit constante ou fonction de la distance  $l$  à l'axe de rotation, le potentiel  $U_{\text{ext}}$  à l'extérieur n'est fonction que de la surface libre S, de la masse totale M et de la vitesse angulaire  $\omega(l)$ :

$$U_{\text{ext}} = F[S, M, \omega(l)] .$$

Si la vitesse angulaire est constante  $\omega = c$  on retrouve comme cas particulier le théorème de Stokes.

II. Le potentiel à l'extérieur est donné par la formule:

$$a) \quad 4\pi U_{\text{ext}} = \iiint \frac{1}{r} \Delta Q d\tau - \iint \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dn} dS$$

où Q représente le potentiel des accélérations et  $\Phi$  le potentiel du champ de la pesanteur.

III. La dérivée normale

$$b) \quad \frac{d\Phi}{dn} = g$$

n'est autre que le coefficient  $g$  de la pesanteur variable d'un point à l'autre de la surface libre. La formule a) donne donc le potentiel dans tout l'espace à partir des éléments directement observables par la géodésie.

$$U_{\text{ext}} = F[S, \omega(l), g] .$$

IV. La dérivée normale de  $\Phi$  est déterminée d'autre part au moyen des deux équations

$$c) \quad \iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi K - 4\pi Q - \iiint \frac{1}{r} \Delta Q d\tau$$

$$d) \quad \iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi \epsilon M - \iiint \Delta Q d\tau .$$

V. La relation (d) donnerait la masse totale  $M$  à partir des éléments purement géodésiques  $S$ ,  $\omega(l)$ , et  $g$

$$M = F[S, \omega(l), g] .$$

*Remarque.* — Dans le cas particulier où la masse tourne d'un bloc, la formule  $d$  devient celle de Poincaré

$$e) \quad \iint \frac{d\Phi}{dn} dS = 4\pi KM - 2\omega^2 V$$

ou  $V$  représente le volume de la planète.

Faisons enfin un rapprochement entre *la distribution de la densité à l'intérieur et un problème de Neumann-Dirichlet généralisé*.

Pour simplifier envisageons les cas de l'équilibre relatif. Le potentiel  $\Phi$  étant fonction de  $\rho$  seul,  $\rho$  est fonction de  $\Phi$  seul. L'équation (5) devient

$$\Delta \Phi = -4\pi \epsilon \rho(\Phi) + 2\omega^2 . \quad (5')$$

La surface extérieure  $S$  étant donnée par la géodésie, il s'agira de résoudre l'équation (5'), c'est-à-dire de déterminer les fonctions  $\rho(\Phi)$  et  $\Phi(x, y, z)$  en imposant à la fonction  $\Phi$ , d'être nulle sur  $S$  et d'y admettre une dérivée normale  $\frac{d\Phi}{dn}$  donnée à l'avance (par les équations (c) et (d) ou par la géodésie). En d'autres termes, il s'agit de résoudre à l'intérieur d'une surface  $S$  une équation de la forme

$$\Delta \Phi = f(\Phi)$$

en déterminant les fonctions  $f$  et  $\Phi$  de telle sorte que l'on ait sur  $S$

$$\Phi = 0$$

condition de Dirichlet

$$\frac{d\Phi}{dn} = \text{fonction donnée} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \text{Neumann} .$$

On sait l'importance des problèmes de Dirichlet et de Neumann dans la physique mathématique. Tout renseignement sur le problème de Neumann-Dirichlet ainsi généralisé sera instructif pour le problème des figures d'équilibre des planètes et réciproquement.

**W.-H. Schopfer.** — *Recherches physico-chimiques sur quelques parasites de poissons marins et d'eau douce.*

Les résultats relatifs à la concentration moléculaire que nous avons obtenus avec les parasites de mammifères, nous ont incité à continuer nos recherches sur les parasites de poissons. La question devient encore plus intéressante avec ces derniers. En effet, chez les poissons d'eau douce nous avons un milieu intérieur indépendant du milieu extérieur et plus concentré que ce dernier; chez les poissons marins nous pouvons avoir ou un milieu intérieur isotonique avec de l'eau de mer et soumis aux variations  $\Delta$  de cette dernière, ou un milieu inférieur comme concentration à l'eau de mer.

Nos recherches ont porté sur *Eubothrium crassum* (Bloch) parasite de *Salmo lacustris* L. ainsi que sur un Bothriocéphale et un Nématode parasite de *Scyllum canicula* Cuv.

Les petites dimensions de ces parasites, compensées cependant par leur grand nombre, nous ont obligé à employer la méthode de l'extrait, imparfaite et donnant des résultats globaux mais pourtant susceptibles d'indiquer un ordre de grandeur d'une précision suffisante.

I. — *Eubothrium crassum* (Bloch) (*Salmo lacustris* L.).

- a) 26 individus provenant des appendices pyloriques d'une truite de 6 kgs.

$$\Delta = -0,933^\circ \text{ (moyenne de 6 mesures de } -0,90 \text{ à } -0,96)$$

- b) 20 individus provenant d'une autre truite

$$\Delta = -1^\circ,02$$

II. — *Bothriocephalus spec.* (*Scyllum canicula* Cuv.).

Quelques individus trouvés dans la région de la valvule spiralée.

$$\Delta = -2^\circ, -2^\circ,10$$