Sur l'impossibilité d'une stratification ellipsoïdale d'un fluide hétérogène en rotation (note présentée par M. Wavre)

Autor(en): **Dive, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Archives des sciences physiques et naturelles**

Band (Jahr): **9 (1927)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-740907

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

gastrula de Triton, tant que la différenciation n'est pas définitivement fixée, on peut, en transplantant dans de l'épiderme une partie de la future plaque médullaire, la faire évoluer en épiderme et réciproquement. L'analyse montre que cette différenciation s'établit dans l'œuf d'avant en arrière à partir de la lèvre supérieure du blastopore qui agit comme organisateur. Il est frappant de retrouver dans la régénération, et cette labilité primitive des régénérats transplantés et évoluant selon la nature du territoire qui les reçoit, et l'action organisatrice des territoires de base sur l'évolution des régénérats eux-mêmes. La régénération, envisagée non plus comme un simple phénomène physiologique, mais comme posant un problème morphogénétique conduit aux mêmes résultats généraux que l'étude de la morphogénie embryonnaire.

(Station de Zoologie expérimentale, Université de Genève.)

Pierre Dive. — *Sur l'impossibilité d'une stratification ellipsoïdale d'un fluide hétérogène en rotation. (Note présentée par M. Wavre.)*

Les auteurs qui ont étudié le mouvement de rotation d'un fluide hétérogène autour d'un axe ont admis généralement que la résultante en un point (pesanteur) de l'attraction newtonienne des masses et de la force centrifuge était normale à la surface à densité constante passant en ce point.

Or, dernièrement [1], M. Rolin Wavre a fait remarquer que cette hypothèse impliquait l'existence d'une relation $\rho = f(p)$ entre la densité et la pression, bien que le fluide hétérogène considéré ne soit pas doué d'une équation caractéristique au sens ordinaire du mot. Partant de là, M. Wavre a montré très simplement que les conditions d'intégrabilité des équations fondamentales de l'hydrodynamique exigent que toutes les molécules

[1] C. R. Ac. des Sc. Paris, T. 184, p. 277, séance du 31 janvier 1927.

situées à la même distance de l'axe de rotation aient la même vitesse angulaire. Cette importante proposition modifie les idées admises depuis une quarantaine d'années sur la figure des corps célestes. On devait donc se demander si cette nouvelle condition pouvait être réalisée dans un fluide hétérogène à stratification ellipsoïdale.

Dans le cas d'une rotation d'ensemble (fluide tournant en bloc), M. Hamy a déjà reconnu [1] l'impossibilité d'une telle répartition des masses pour un fluide constitué d'un nombre fini de couches de densités différentes; M. Véronnet a établi ensuite dans sa thèse [2] que cette impossibilité ne disparaît pas lorsque la densité varie d'une façon continue d'une couche à une autre. On sait d'ailleurs que, pour Clairaut [3], ce n'est qu'en première approximation, en négligeant les carrés des ellipticités, qu'une masse fluide hétérogène tournant d'un seul bloc peut être stratifiée en couches ellipsoïdales.

Dans la note récente qu'il a publiée aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [4], M. Véronnet laisse entendre que, dans le cas d'un mouvement relatif des molécules, la condition d'invariance de la vitesse angulaire sur un axe parallèle à l'axe de rotation est compatible avec l'hypothèse d'une stratification ellipsoïdale.

L'étude que nous avons faite de cette question nous a conduit au contraire à reconnaître l'impossibilité de satisfaire à la fois à ces deux conditions.

Notre calcul part d'une relation exprimant que le champ de la pesanteur en un point du fluide est normal à la surface à densité constante passant en ce point. De cette relation nous tirons l'équation suivante donnant la vitesse angulaire ω dont devrait

[1] HAMY. *Etude de la figure des corps célestes*, Thèse, Paris, 1887.

[2] A. VÉRONNET. *Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre*, Paris, 1912.

[3] A.-C. CLAIRAUT. *La figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743.

[4] C. R. Ac. des Sc. Paris, T. 183, p. 949. Séance du 22 novembre 1926.

être animée une molécule que nous supposons, pour plus de simplicité, dans le plan méridien $y = 0$ [1]:

$$\omega^2 = \rho_1 j_1 \Upsilon(k_1) - \int_0^{\beta} \rho' j \Upsilon(s)\, db - \int_{\beta}^{b_1} \rho' j \Upsilon(k)\, db \ .$$

Dans cette formule:

β est le demi-axe polaire de la méridienne de la couche (β) sur laquelle se trouve la molécule considérée de coordonnées x et z. Le demi-axe équatorial α de cette couche est évidemment fonction de β;

b est le demi-axe polaire d'une couche ellipsoïdale (b) intérieure à la couche (β) précédente et de demi-axe équatorial a;

k désigne le rapport $\frac{c}{b}$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ relatif à la méridienne de la couche (b);

$(a, c, k,$ sont des fonctions de $b)$;

s désigne le rapport analogue $\frac{c}{b'}$ relatif à la méridienne de l'ellipsoïde de demi-axes a' et b', passant au point (x, z) et homofocal de la couche (b); s est donc une fonction de b, x et z [2].

$\Upsilon(t)$ est mis pour:

$$\left.\begin{aligned} & \Phi(t) - \frac{\Psi(t)}{1+\tau^2} \\ \text{où} \quad & \Phi(t) = 2\pi f\left(\operatorname{arctg} t - \frac{t}{1+t^2}\right), \\ & \Psi(t) = 4\pi f(t - \operatorname{arctg} t), \\ \text{et} \quad & \tau^2 = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

j désigne le rapport $\frac{1+k^2}{k^3}$.

[1] Pierre Dive. Thèse: *Le champ de la pesanteur, l'ellipsoïde fluide hétérogène en rotation et les dérives continentales* (Genève, 1926), ou Archives des Sciences physiques et naturelles (5me période, Vol. 8) (Genève, juillet-août 1926).

[2] Nous donnerons plus loin la relation définissant s en fonction implicite de b, β et x^2; z étant considéré comme une fonction de β et x^2.

ρ' est la dérivée par rapport à b de la densité $\rho(b)$.

Enfin, une variable affectée de l'indice 1 représente la valeur de cette variable sur la couche superficielle (pour $b = b_1$).

D'autre part, la condition de M. Wavre s'exprime par l'identité:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z} \equiv 0 \ . \tag{3}$$

Mais si au lieu de x et z on prend comme variables indépendantes β et x^2 ($x^2 < \alpha^2$ pour que le point (x, z) existe), z devient une fonction de β et x^2, et l'on peut écrire:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} = \frac{\partial \omega^2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} \ ;$$

alors, la condition (3) se ramène à la suivante:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} \equiv 0 \tag{4}$$

et cette identité doit être satisfaite quels que soient β et x^2. En particulier, elle doit être satisfaite sur l'axe de rotation $0z$, pour $x^2 = 0$; car si elle ne l'était pas, en raison de la continuité de ω, elle ne le serait pas non plus sur un axe parallèle infiniment voisin et ne pourrait l'être éventuellement que sur un axe situé à distance finie; il existerait, par suite, autour de l'axe de rotation tout un domaine cylindrique dans lequel la condition de M. Wavre ne serait pas vérifiée.

Il est donc bien nécessaire que l'on ait:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} \equiv 0$$

pour $x^2 = 0$, comme pour toute valeur de $x^2 < \alpha^2$.

Cette condition entraîne la suivante:

$$\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial \beta \, \partial x^2} \equiv 0 \tag{5}$$

qui doit évidemment être tout aussi générale.

ω^2 ne dépendant de x^2 que par l'intermédiaire de s, on a:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} = \int_0^\beta - \rho' j \frac{\partial}{\partial x^2} \Upsilon(s)\, db \; ; \tag{6}$$

d'où, en différenciant sous le signe somme par rapport à β:

$$\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial \beta\, \partial x^2} = \left[- \rho' j \frac{\partial}{\partial x^2} \Upsilon(s) \right]_{b=\beta} + \int_0^\beta - \rho' j \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial x^2} \Upsilon(s)\, db \, . \tag{7}$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \Upsilon(s) = \frac{d}{ds} \Upsilon(s) \, . \, \frac{\partial s}{\partial x^2} \, ,$$

et on calculera aisément $\frac{d}{ds} \Upsilon(s)$ au moyen des expressions (2); on trouve:

$$\frac{d}{ds} \Upsilon(s) = 4 \pi f \xi^2 \frac{s^2}{(1 + s^2)^2} \, . \, (\tau^2 - s^2) \tag{8}$$

ξ^2 désignant par abréviation le rapport $\frac{1}{1 + \tau^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

On remarquera alors que pour $b = \beta$, $s = \tau$ et que, par suite, la quantité entre crochets de la formule (7) est identiquement nulle. L'identité (5) s'écrira donc:

$$\int_0^\beta \rho' j \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial x^2} \Upsilon(s)\, db \equiv 0 \, . \tag{9}$$

Supposons $x^2 = 0$; nous allons voir que cette identité n'est pas satisfaite.

En effet, si elle l'était, on aurait nécessairement

$$\int_0^{\beta_i} d\beta \int_0^\beta \rho' j \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial x^2} \Upsilon(s) . db \equiv 0 \tag{10}$$

β_i désignant une valeur quelconque de β. Appliquons la transformation de Lejeune-Dirichlet à l'intégrale double précédente; il vient:

$$\int_0^{\beta_i} db \int_b^{\beta_i} \rho' j \frac{\partial^2}{\partial \beta\, \partial x^2} \Upsilon(s) . d\beta \equiv 0 \tag{11}$$

ou

$$\int_0^{\beta_i} \rho' j \left[\frac{d}{ds}\Upsilon(s)\frac{\partial s}{\partial x^2}\right]_{\beta=\beta_i} db \equiv 0 \qquad (11')$$

en observant, comme précédemment, que $\left[\frac{d}{ds}\Upsilon(s).\frac{\partial s}{\partial x^2}\right]_{\beta=b}$ est identiquement nul.

Nous avons déjà l'expression (8) de $\frac{d}{ds}\Upsilon(s)$. Pour calculer $\frac{\partial s}{\partial x^2}$ on établira tout d'abord une relation définissant s en fonction implicite de b, β, x^2; il suffit pour cela d'éliminer z entre les deux équations:

$$\frac{x^2}{1+\tau^2} + z^2 = \beta^2$$

$$\frac{x^2}{1+s^2} + z^2 = \frac{c^2}{s^2} \qquad \left(b' = \frac{c}{s}\right)$$

on trouve:

$$s^4(\alpha^2 - x^2) + s^2[\tau^2 x^2 + \alpha^2 - c^2(1+\tau^2)] - c^2(1+\tau^2) = 0$$

qui est bien la relation cherchée puisque c est fonction de b, tandis que α et τ sont des fonctions de β. De cette relation on tire sans difficulté:

$$\frac{\partial s}{\partial x^2} = -\frac{s^3(\tau^2 - s^2)}{2[s^4(\alpha^2 - x^2) + c^2(1+\tau^2)]}.$$

On a donc:

$$\left[\frac{d}{ds}\Upsilon(s)\frac{\partial s}{\partial x^2}\right]_{\beta=\beta_i} = -2\pi f\left[\xi^2 . \frac{s^5(\tau^2 - s^2)^2}{(1+s^2)^2[s^4(\alpha^2 - x^2) + c^2(1+\tau^2)]}\right]_{\beta=\beta_i}$$

et cette expression est essentiellement négative quels que soient β_i et $x^2 < \alpha^2$; dans le cas actuel $x^2 = 0$.

ρ' n'étant pas identiquement nul (ellipsoïde hétérogène), il résulte de là que l'identité (9) ne peut être satisfaite, quel que soit β_i, que si l'on a $\tau = s$, ce qui exigerait que les couches homogènes soient réparties sur une famille d'ellipsoïdes homofocaux. Mais dans ce cas l'égalité (6) donnerait $\frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} \equiv 0$; et comme cette

identité devrait avoir lieu en même temps que l'identité $\frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} \equiv 0$, le fluide serait ou immobile ou animé d'une rotation d'ensemble. Or, on sait que cette dernière condition est impossible pour un fluide hétérogène à stratification ellipsoïdale [1].

Notre conclusion est donc la suivante : *Il est impossible de concevoir les planètes comme constituées de couches ellipsoïdales si l'on admet que la pesanteur est normale aux surfaces d'égale densité.*

Rolin Wavre. — *Sur la stratification d'une masse fluide hétérogène en rotation.*

M. Volterra a démontré en 1903 l'impossibilité d'une stratification d'une masse fluide en ellipsoïdes homothétiques si la masse tourne tout d'un bloc.

M. Dive a montré dernièrement l'impossibilité d'une stratification ellipsoïdale quelconque, qu'il s'agisse d'un mouvement d'ensemble où d'un mouvement dans lequel la vitesse angulaire soit variable. Nous venons d'établir par un calcul très laborieux que nous ne reproduisons pas ici les résultats suivants:

1. Les surfaces d'égale densité tendent vers la forme ellipsoïdale quand on se rapproche du centre. De cette proposition on déduit bien facilement la suivante:

2. Si les surfaces étaient homothétiques, elles seraient ellipsoïdales.

Or, puisque une stratification ellipsoïdale est impossible, d'après M. Dive, il faut en conclure:

3. *Une stratification en surfaces homothétiques de la masse fluide hétérogène est impossible.*

C'est là un résultat négatif qui s'ajoute à celui de M. Dive et que nous avons déduit de l'équation de Fredholm de première espèce, à laquelle nous avons ici-même, ramené le problème de la masse fluide hétérogène en rotation.

[1] Cf. par exemple la Thèse de M. VÉRONNET (Paris, 1912) et la nôtre (Genève, 1926).