Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 8 (1926)

Artikel: L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm

Autor: Wavre, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742445

Séance du 1er juillet 1926.

R. Wavre. — *L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm.*

Soit $N(x, y)$ un noyau symétrique sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes:

I. Requérons le droit d'intervertir les intégrations dans l'expression

$$\int_a^b \alpha(x)\,dx \int_a^b N(x, y)\,\beta(y)\,dy$$

$\alpha(x)$ et $\beta(y)$ étant deux fonctions de carré sommable.

II. Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_a^b N^2(x, y)\,dy$$

ait un sens.

Ceci posé, nous avons établi que l'alternative suivante se présente au sujet des fonctions φ_i normalisées déduites par l'itération

$$\varphi_{i+1}(x) = k\int_a^b N(x, y)\,\varphi_i(y)\,dy \qquad k \text{ étant une constante },$$

a) ou bien les deux suites φ_{2i} et φ_{2i+1} convergent en moyenne;

b) ou bien il n'existe aucune suite extraite des φ_i qui converge en moyenne.

La démonstration de cette alternative paraîtra probablement dans le bulletin de la Société mathématique de France.

Dans le cas d'un noyau dissymétrique l'étude des itérées reste à faire. Voici seulement un exemple d'un noyau dissymétrique pour lequel c'est l'éventualité *b*) qui se présente.

Posons

$$N(x, y) = x - y \quad \text{pour} \quad x > y \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$
$$N(x, y) = 0 \quad \text{»} \quad y \geqq x \qquad 0 \leqq y \leqq 1$$

alors:

$$\int_0^1 (x-y)y^\alpha dy = \int_0^x (x-y)y^\alpha dy = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \qquad \alpha > -1$$

et si

$$\varphi_0 = 1$$

on a

$$\varphi_1 = \sqrt{5}\,x^2\,, \qquad \varphi_2 = \sqrt{9}\,x^4\,, \qquad \varphi_3 = \sqrt{13}\,x^6\,,$$

$$\varphi_i = \sqrt{4i+1}\;x^{2i}$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)\,\varphi_{i+p}(x) = \frac{\sqrt{4i+1}\;\sqrt{4i+4p+1}}{4i+2p+1}$$

et

$$\lim_{p\to+\infty} \int_0^1 [\varphi_i(x) - \varphi_{i+p}(x)]^2 dx = 2 \qquad \text{quel que soit } i \text{ fixe.}$$

Il est impossible d'extraire des $\varphi_i(x)$ une suite qui converge en moyenne.

R. Wavre. — *Construction de fonctionnelles automorphes.*

Dans une note parue aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai construit des fonctionnelles automorphes relatives à un noyau symétrique de Fredholm.

Soient $N_n(y, x) = \Sigma \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(y)}{\lambda_i^n}$ le noyau itéré d'ordre n d'un noyau symétrique et c_i les coefficients de Fourier d'une fonction $f_0(x)$, relatifs au système orthogonal $\psi_i(x)$. La fonction itérée d'ordre n, $f_n(x) = \int N_n(x, y) f_0(y) dy$ admet les coefficients $c_i\lambda_i^{-n}$; on peut convenir d'attribuer à n des valeurs non entières.

Soit alors F une fonction des seuls produits $c_i\lambda_i^m$ telle que l'intégrale

$$\Phi|f_0(x)| = \Phi(c_1, c_2, \ldots) = \int_{m=-\infty}^{+\infty} F(c_1\lambda_1^m, c_2\lambda_2^m, \ldots)\,dm$$