

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 8 (1926)

**Artikel:** L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm  
**Autor:** Wavre, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-742445>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Séance du 1<sup>er</sup> juillet 1926.

R. WAVRE. — *L'itération au moyen d'un noyau singulier de Fredholm.*

Soit  $N(x, y)$  un noyau symétrique sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes:

I. Requerons le droit d'intervertir les intégrations dans l'expression

$$\int_a^b \alpha(x) dx \int_a^b N(x, y) \beta(y) dy$$

$\alpha(x)$  et  $\beta(y)$  étant deux fonctions de carré sommable.

II. Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b dx \int_a^b N^2(x, y) dy$$

ait un sens.

Ceci posé, nous avons établi que l'alternative suivante se présente au sujet des fonctions  $\varphi_i$  normalisées déduites par l'itération

$$\varphi_{i+1}(x) = k \int_a^b N(x, y) \varphi_i(y) dy \quad k \text{ étant une constante ,}$$

a) ou bien les deux suites  $\varphi_{2i}$  et  $\varphi_{2i+1}$  convergent en moyenne;

b) ou bien il n'existe aucune suite extraite des  $\varphi_i$  qui converge en moyenne.

La démonstration de cette alternative paraîtra probablement dans le bulletin de la Société mathématique de France.

Dans le cas d'un noyau dissymétrique l'étude des itérées reste à faire. Voici seulement un exemple d'un noyau dissymétrique pour lequel c'est l'éventualité b) qui se présente.

Posons

$$N(x, y) = x - y \quad \text{pour } x > y \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$N(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y \geq x \quad 0 \leq y \leq 1$$

alors:

$$\int_0^1 (x-y)y^\alpha dy = \int_0^x (x-y)y^\alpha dy = \frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \quad \alpha > -1$$

et si

$$\varphi_0 = 1$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sqrt{5}x^2, & \varphi_2 &= \sqrt{9}x^4, & \varphi_3 &= \sqrt{13}x^6, \\ \varphi_i &= \sqrt{4i+1}x^{2i} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_{i+p}(x) = \frac{\sqrt{4i+1} \sqrt{4i+4p+1}}{4i+2p+1}$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^1 [\varphi_i(x) - \varphi_{i+p}(x)]^2 dx = 2 \quad \text{quel que soit } i \text{ fixe.}$$

Il est impossible d'extraire des  $\varphi_i(x)$  une suite qui converge en moyenne.

### R. WAVRE. — *Construction de fonctionnelles automorphes.*

Dans une note parue aux comptes rendus de l'Académie des Sciences (t. 182, p. 1317, séance du 31 mai 1926) j'ai construit des fonctionnelles automorphes relatives à un noyau symétrique de Fredholm.

Soient  $N_n(y, x) = \sum \frac{\psi_i(x) \psi_i(y)}{\lambda_i^n}$  le noyau itéré d'ordre  $n$  d'un noyau symétrique et  $c_i$  les coefficients de Fourier d'une fonction  $f_0(x)$ , relatifs au système orthogonal  $\psi_i(x)$ . La fonction itérée d'ordre  $n$ ,  $f_n(x) = \int N_n(x, y) f_0(y) dy$  admet les coefficients  $c_i \lambda_i^{-n}$ ; on peut convenir d'attribuer à  $n$  des valeurs non entières.

Soit alors  $F$  une fonction des seuls produits  $c_i \lambda_i^m$  telle que l'intégrale

$$\Phi[f_0(x)] = \Phi(c_1, c_2, \dots) = \int_{m=-\infty}^{+\infty} F(c_1 \lambda_1^m, c_2 \lambda_2^m, \dots) dm$$