

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 6 (1924)

Artikel: Sur un problème de mécanique céleste et de dynamique quantique
Autor: Juvet, G.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741903>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A. PERRIER et C. BOREL (Lausanne). — *Aimantation et courants longitudinaux.*

Cette communication fera l'objet d'un mémoire qui paraîtra dans un prochain fascicule des *Archives*.

Kurt ZUBER. — *Retard de l'étincelle dans la décharge électrique.*

Le texte de cette communication n'est pas parvenu au secrétariat.

Edgar MEYER (Zurich). — a) *Mesures effectuées avec le condensateur de Millikan* (d'après les recherches de M. Yü Chen Yang).

b) *Sur la détermination de la limite, du côté des grandes longueurs d'ondes, de l'effet photo-électrique du mercure* (d'après les recherches de M^{me} Sophie Taubes).

Le texte de ces deux communications n'est pas parvenu au secrétariat.

G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur un problème de mécanique céleste et de dynamique quantique.*

Le problème dont nous voulons nous occuper est un problème de mécanique quantique traité par les méthodes de la mécanique céleste. M. Epstein, dans une série de mémoires¹, a cherché à appliquer à certains problèmes, posés par la théorie des quanta, une méthode tirée de la théorie des perturbations, et singulièrement de la théorie de la lune. Il a appelé cette méthode la méthode de Delaunay, bien qu'il eût modifié passablement — et d'une façon qui ne nous paraît pas très heureuse — les procédés de calcul employés par Delaunay². Dans un mémoire ultérieur, MM. Born et Pauli jun.³, utilisant une méthode différente, pour des problèmes analogues, reprochent

¹ EPSTEIN, *Zschr. f. Phys.*, t. 8, p. 211 et p. 305 (9), p. 92.

² DELAUNAY, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXVIII et XXIX; nous avons suivi la méthode telle que Tisserand l'a simplifiée, *Mécanique céleste*, t. 3, chapitre XI.

³ BORN et PAULI jun. *Zschr. f. Phys.*, t. 10, p. 137.

à la méthode de Delaunay, modifiée par M. Epstein, de conduire à une complication progressive, lorsque l'on poursuit le jeu des approximations successives¹.

Nous voulons montrer que la méthode de Delaunay non modifiée conduit au but — c'est-à-dire à l'intégration — sans qu'il soit nécessaire de faire des distinctions nombreuses en cours de route et, enfin, qu'elle permet la quantification immédiate, dès que l'on juge que l'approximation est suffisante.

Posons le problème. Soit un système dépendant de f paramètres z_1, z_2, \dots, z_f et soient $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_f$, les variables canoniquement conjuguées. Appelons $H(z, \varpi)$ la fonction hamiltonienne du problème, et imaginons que l'on ait $H = H_1 + R$. Dans un grand nombre de cas, on sait intégrer les équations canoniques :

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \varpi_i}, \quad \frac{d\varpi_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial z_i}.$$

Supposons que cette intégration donne un mouvement quasi périodique non dégénéré; désignons, comme le fait M. Epstein, par ω_i les variables angulaires (fonctions linéaires du temps) et par u_i les variables d'action qui leur sont conjuguées. Si l'on néglige R , on sait que le problème sera quantifié lorsqu'on fera $u_i = \frac{n_i h}{2\pi}$. Les z_i et les ϖ_i sont liés aux ω_i et aux u_i par une transformation canonique. Cette transformation modifie H de la manière suivante :

H_1 devient une fonction des u_i seulement : $H_1(u_1, \dots, u_f)$,
 R devient une série de Fourier :

$$\sum_{m_1 m_2 \dots m_f} b_{m_1 m_2 \dots m_f} \frac{\cos(m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_f \omega_f)}{\sin}$$

dont les coefficients sont des fonctions des u_i seulement. Cette transformation canonique étant effectuée, pour intégrer les équations correspondant à la fonction H complète, il suffit de considérer les équations :

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial(H_1 + R)}{\partial u_i}, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial(H_1 + R)}{\partial \omega_i}.$$

¹ Cf. loc. cit. p. 158.

La méthode de Delaunay consiste à procéder par approximation pour effectuer cette intégration. On prend un des termes de R et on néglige les autres. Cette intégration conduit à une transformation canonique qui fait disparaître dans R le terme employé. On continue ainsi jusqu'à ce que tous les termes de R aient disparu. Si R est une série infinie, ce procédé paraît très long, mais dans un grand nombre de problèmes, il suffit de prendre dans R les termes principaux; en négligeant les autres, on a une approximation suffisante. Nous ne nous occuperons pas de la convergence.

Nous allons donc considérer le problème hamiltonien pour lequel la fonction caractéristique est

$$H_1(u_1 \dots u_f) + b(u_1 \dots u_f) \cos(m_1 \omega_1 + \dots + m_f \omega_f) .$$

Il convient pour la suite de faire un changement de variables qui conduise immédiatement à l'équation jacobienne de Delaunay. Posons $p_i = \omega_i$, $q_i = -u_i$. C'est une transformation canonique; on doit dès lors considérer l'équation de Jacobi:

$$\mathcal{H}_1(q_1 \dots q_f) + b(q_1 \dots q_f) \cos\left(m_1 \frac{\partial S}{\partial q_1} + \dots + m_f \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) = \alpha ,$$

α étant une constante, et où l'on a posé:

$$\begin{aligned} H_1(-q_1, \dots -q_f) &= \mathcal{H}_1(q_1, \dots q_f) , \\ b(-q_1, \dots -q_f) &= b(q_1, \dots q_f) . \end{aligned}$$

Il suffit de trouver une intégrale complète de cette équation dépendant de f constantes $\alpha, \alpha_2, \dots \alpha_f$ dont aucune ne soit additive. On y arrive par un changement canonique de variables¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = (q_1) \\ q_i = \frac{m_i(q_1)}{m_1} + (q_i) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_1) = \frac{1}{m_1} \sum_1^f m_j p_j \\ (p_i) = p_i \end{array} \right. \quad (i > 1) .$$

L'équation de Jacobi-Delaunay se transforme et devient:

$$m_1 \frac{\partial V}{\partial (q_1)} = \arccos \left[\frac{\alpha - \mathcal{H}_1}{b} \right] ,$$

¹ Cf. TISSERAND, loc. cit. p. 191.

l'encadrement désignant ce que devient la fonction encadrée après qu'on y a fait le changement de variables. L'intégrale complète cherchée — exprimée avec les variables nouvelles — est:

$$V = \int^{(q_1)} \arccos \left[\frac{\alpha - \mathcal{H}_1}{b} \right] \frac{d(q_1)}{m_1} + \sum_2^f \alpha_i(q_i) .$$

L'intégrale générale des équations du mouvement est dès lors exprimée par les formules:

$$(i > 1) \quad \begin{cases} -(t + c) = \frac{\partial V}{\partial \alpha} \\ \beta_i = \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} \end{cases} \quad \begin{cases} (p_j) = \frac{\partial V}{\partial (q_j)} (j = 1 \dots f) , \\ \end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases} -(t + c) = \frac{1}{m_1} \int^{(q_1)} \frac{-d(q_1)}{\sqrt{b^2 - [\alpha - \mathcal{H}_1]^2}} \\ \beta_i = (q_i) \quad (i > 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p_1) = \frac{1}{m_1} \arccos \left[\frac{\alpha - \mathcal{H}_1}{b} \right] \\ (p_i) = \int^{(q_1)} \frac{d(q_1)}{m_1} \left[\frac{b \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_i} + (\alpha - \mathcal{H}_1) \frac{\partial b}{\partial q_i}}{b \sqrt{b^2 - [\alpha - \mathcal{H}_1]^2}} \right] + \alpha_i \quad (i > 1) \end{cases}$$

En revenant aux variables p et q et en remarquant que

$$dt = \frac{1}{m_1} \frac{dq_1}{\sqrt{O}} \quad [O = b^2 - [\alpha - \mathcal{H}_1]^2] ,$$

il vient:

$$\begin{cases} (t + c) = \frac{1}{m_1} \int^{(q_1)} \frac{dq_1}{\sqrt{O}} \\ \beta_i = q_i - \frac{m_i q_1}{m_1} \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{m_1} \arccos \frac{\alpha - \mathcal{H}_1}{b} - \sum_2^f \frac{m_i}{m_1} p_i \\ p_i = \alpha_i + \int^t \frac{(\alpha - \mathcal{H}_1) \frac{\partial b}{\partial q_i} + b \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_i}}{b} dt . \end{cases}$$

$$(i > 1)$$

La première équation fait voir que q_1 doit varier entre deux racines de $O = 0$. La nature du problème montre bien, en effet, que q_1 ne peut varier d'une de ces racines à l'infini, car q_1 est une constante variée et, par conséquent, q_1 ne doit pas s'écarte beaucoup de la valeur constante $-u_1$ qu'elle aurait avec une seule approximation. Soient Q_a et Q_b ces deux racines, on a donc:

$$Q_a \leq q_1 \leq Q_b ,$$

et en intégrant, on sait que q_1 peut se mettre sous forme d'une série de Fourier paire en $(t + c)$:

$$q_1 = c_0 + c_1 \cos \theta_0 (t + c) + c_2 \cos 2\theta_0 (t + c) + \dots ,$$

θ_0 étant défini par l'égalité:

$$\frac{\pi}{\theta_0} = \int_{Q_a}^{Q_b} \frac{dq_1}{m_1 \sqrt{O}} .$$

On a ensuite

$$q_i = \beta_i + \frac{m_i}{m_1} c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_i}{m_1} c_k \cos k\theta_0 (t + c) ,$$

puis après des calculs simples:

$$\begin{cases} p_1 = - \sum_2^f \frac{m_i}{m_1} \alpha_i + P^{(1)}(t + c) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(1)} \sin k\theta_0 (t + c) \\ p_i = \alpha_i + P^{(i)}(t + c) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(i)} \sin k\theta_0 (t + c) \quad (i > 1) . \end{cases}$$

Il est intéressant d'avoir aussi

$$0 = \sum_1^f m_i p_i = \theta_0 (t + c) + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \sin k\theta_0 (t + c) .$$

La première partie du problème est ainsi résolue. Il faut remarquer que ces équations ne représentent pas forcément un mouvement quasi périodique, au sens de M. Charlier¹, car les p_i peuvent croître indéfiniment en valeur absolue.

Pour poursuivre l'intégration, on prendra la nouvelle fonction

¹ CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, t. I, p. 97.

hamiltonienne $R_1 = R - b \cos(m_1 p_1 + \dots + m_f p_f)$, en considérant les α et les β comme de nouvelles variables et non plus comme des constantes. Il est cependant mal commode de laisser sous les signes cos. ou sin. des expressions qui contiennent explicitement t . On fait le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} p_1 = c_0 + \frac{1}{2} \sum k c_k \theta_k, \\ p_i = \beta_i + \frac{m_i}{m_1} c_0 + \frac{m_i}{m_1} \frac{1}{2} \sum k c_k \theta_k \quad (i > 1), \end{cases}$$

auxquelles on conjugue les variables

$$\begin{cases} \lambda_1 = - \sum_i \frac{m_i}{m_1} \alpha_i + P^{(1)}(t + c), \\ \lambda_i = \alpha_i + P^{(i)}(t + c) \quad (i > 1). \end{cases}$$

Cette transformation est de nouveau canonique, mais comme elle contient t explicitement, la nouvelle fonction hamiltonienne n'est pas R_1 transformée, mais $R_1 - \alpha = R'$; les nouvelles équations canoniques sont:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = - \frac{\partial R'}{\partial p_i}.$$

Or, la fonction R' ne contient plus le terme $b \cos(m_1 p_1 + \dots + m_f p_f)$. Le terme général

$$b_{n_1 n_2 \dots n_f} \cos(n_1 p_1 + \dots + n_f p_f)$$

est devenu (à des expressions additives connues près):

$$\mathcal{C}_{n_1 \dots n_f} \cos(n_1 \lambda_1 + \dots + n_f \lambda_f),$$

où les \mathcal{C} ne dépendent que des μ . On est ainsi ramené à un problème où la fonction perturbatrice a un terme de moins. On continue de la même façon.

Supposons qu'on s'arrête à une approximation et qu'on doive quantifier le mouvement; par exemple, supposons qu'on s'arrête aux formules qui donnent les p_i et les q_i . Comme on n'a pas trouvé une intégrale complète à variables séparées, on ne peut pas quantifier en posant $\oint p_i dq_i = k_i \hbar$.

On procède alors comme suit. On cherche les variables angulaires et les variables d'action qui correspondent au stade considéré. Les variables angulaires sont des fonctions linéaires de t et les variables d'action sont des constantes; de plus, ces deux sortes de variables sont canoniquement conjuguées. Or, remarquons que les λ_i sont précisément des fonctions linéaires de t et que les μ_i qui leur sont conjuguées sont des constantes¹. Les conditions quantiques s'écrivent dès lors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = c_0 + \frac{1}{2} \sum k c_k \theta_k = \frac{k_1 h}{2\pi} , \\ \varphi_i = \beta_i + \frac{m_i}{m_1} c_0 + \frac{m_i}{m_1} \frac{1}{2} \sum k c_k \theta_k = \frac{k_i h}{2\pi} \quad (i > 1) , \end{array} \right.$$

les k_i étant des entiers. Ces conditions déterminent les valeurs discrètes qu'il faut donner aux β_i ($i > 1$) et à α . Or α est la valeur de l'énergie; il est très souvent utile de la connaître en fonction des nombres quantiques $k_1 \dots k_f$. En invoquant encore une fois la théorie des transformations canoniques, on trouve:

$$\alpha = \sum_1^f P^{(i)} \varphi_i = \frac{h}{2\pi} \sum_1^f P^{(i)} k_i ,$$

équation qu'on résout par rapport à α car les $P^{(i)}$ en dépendent.

Nous avons montré qu'il est possible par un procédé formel d'intégrer rigoureusement tout problème correspondant à un mouvement quasi-périodique troublé; il faut peut-être une infinité de démarches si la fonction perturbatrice est une série infinie; mais dans un grand nombre de problèmes physiques, un nombre fini de démarches donnera une approximation suffisante. Nous avons montré de plus qu'à chaque stade dans l'approximation correspondent des conditions quantiques bien déterminées, et que les variables d'action et les variables angulaires qu'on obtient servent à franchir une nouvelle étape dans l'approximation. La méthode originale de Delaunay, revue par

¹ Dire que les variables angulaires sont des fonctions linéaires de t et que les variables d'action, qui leur sont conjuguées, sont des constantes, ce n'est pas les définir rigoureusement. Mais les λ et les μ sont bien ici les variables cherchées; si l'on fait $b = 0$, on retrouve

$$\varphi_j = -\mu_j .$$

Tisserand, est donc parfaitement convenable pour les problèmes de dynamique quantique. C'est aux physiciens de voir si elle peut leur être utile¹ !

Remarques: 1^o Nous ne nous sommes pas occupé des cas de dégénérescence, mais il semble bien que pour l'intégration, ils ne jouent aucun rôle singulier.

2^o Nous donnons les calculs détaillés ailleurs, dans un ouvrage qui est en préparation.

3^o Les conditions quantiques obtenues sont valables lorsque le système a un mouvement quasi périodique pour le stade considéré. Si le mouvement n'est pas quasi périodique, nous proposons la même forme pour les conditions quantiques.

4^o Nous ne savons pas quelles sont, sous cette forme de calcul, les conditions nécessaires pour la quasi périodicité. Le seul avantage de la méthode de M. Epstein sur celle que nous venons de développer, c'est qu'elle lui permet de distinguer une certaine quasi périodicité au cours des approximations; mais le calcul des variables d'action est beaucoup plus simple par notre méthode que par la sienne.

M^{me} C. BIÉLER-BUTTICAZ (Genève). — *Etude du frottement intérieur de minces fils d'invar aux hautes températures.*

Cette communication fera l'objet d'un mémoire qui paraîtra dans un prochain fascicule des *Archives*.

Pierre WEISS (Strasbourg). — *Le problème du ferromagnétisme.*

L'aimantation d'une substance est une fonction des deux variables champ magnétique et température. Cette fonction a été déterminée expérimentalement avec une grande exactitude dans le cas du nickel. Il s'agit de trouver le mécanisme des propriétés qu'elle représente ou, en d'autres termes, de donner une théorie moléculaire de l'aimantation. J'ai suivi à cet effet une marche analogue à celle de van der Waals, dans sa théorie de la

¹ On peut l'employer pour le problème de l'oscillateur non-harmonique.