Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 6 (1924)

Artikel: Les solutions cosmologiques des équations du champ de gravitation
Autor: Schidlof, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741880

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LES SOLUTIONS COSMOLOGIQUES

DES

ÉQUATIONS DU CHAMP DE GRAVITATION

PAR

A. SCHIDLOF

(Avec 1 fig.).

I. Préliminaires.

Les équations tensorielles covariantes du champ de gravitation ont été établies par Einstein [1] d'abord sous la forme suivante:

$$R_{ik} = \varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right) \tag{1}$$

Les R_{ik} sont les composantes d'un tenseur symétrique du deuxième rang obtenu par contraction à partir du tenseur de courbure du quatrième rang de Riemann-Christoffel. Ce sont des fonctions connues des composantes g_{ik} du tenseur métrique de la multiplicité, ainsi que des dérivées premières et secondes des g_{ik}.

Les T_{ik} sont les composantes covariantes du tenseur matériel, tenseur symétrique, dont les 10 composantes ont la signification de l'énergie et de la quantité de mouvement attachées au point d'Univers considéré. $T = T_i^i$ signifie l'invariant du tenseur matériel, et $\varkappa$ la constante de la gravitation universelle de Newton-Einstein.

[1] A. Einstein. *Ber. d. Berl. Akad.* 1915, p. 844.

Les solutions des équations (1) ont la forme [1]:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{2}$$

où dx^i, dx^k signifient les accroissements des quatre coordonnées d'un point d'Univers. ds^2 est l'invariant caractérisant la longueur de l'élément d'arc d'une ligne géodésique décrite, par exemple, dans la multiplicité considérée, par un point matériel libre.

Les équations différentielles d'une géodésique sont:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \tag{3}$$

où $\frac{dx^i}{ds} = u^i$ signifient les composantes de la « direction » ou quadrivitesse du point matériel en question. Les $\Gamma^i_{\mu\nu}$ dépendent du système de référence choisi et jouent, selon Einstein, le rôle des composantes du champ de gravitation. Ce sont des fonctions linéraires des g_{ik} et de leurs dérivées:

$$\Gamma^i_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{ik} \left(\frac{\partial g_{k\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^k} \right) \tag{4}$$

Les g^{ik} sont les composantes contre-variantes du tenseur métrique. Le tenseur contracté R_{ik} s'exprime au moyen des $\Gamma^i_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées de la façon suivante [2]:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^\nu_{ik}}{\partial x^\nu} - \Gamma^\nu_{i\mu} \Gamma^\mu_{k\nu} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^k} + \Gamma^\nu_{ik} \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^\nu} \tag{5}$$

où:

$$g = |g_{\mu\nu}|$$

[1] Suivant l'usage on supprime le symbole Σ correspondant à l'opération de la contraction (fusion des indices co- et contre-variants).

[2] Cf. A. Einstein. Die Grundlage der allgem. Relativitätstheorie *Ann. de Phys.* 49 (1916), p. 769. Réimprimé dans le recueil « Das Relativitätsprinzip », 3me édit., Teubner 1920. Les grandeurs désignées ici par $\Gamma^i_{\mu\nu}$ sont les composantes du champ de gravitation d'Einstein changées de signe.

signifie le déterminant des composantes covariantes du tenseur métrique.

Supposons données les composantes T_{ik} en un point P de la multiplicité, alors les 10 équations (1) du champ de gravitation fournissent les valeurs des 10 « potentiels de gravitation » g_{ik}. Les g_{ik} interviennent de plus dans les 4 équations, exprimant les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, qui, dans la théorie de la relativité générale, ont la forme:

$$\frac{\partial T^i_k \sqrt{-g}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^k} \sqrt{-g} = 0 \ . \qquad (6)$$

Les T_{ik} étant données non seulement en P mais aussi en tous les points voisins de l'espace-temps, on aurait ainsi 14 équations déterminant les g_{ik}, donc quatre de trop. En réalité, la forme des équations (1) a été déterminée, précisément, par la condition de satisfaire identiquement, pour n'importe quelle répartition de la matière, aux équations de conservation. Il en résulte que six seulement parmi les 10 équations (1) dépendent effectivement de la répartition matérielle. Parmi les dix composantes g_{ik} quatre restent, par conséquent, indéterminées.

Cette indétermination est d'ailleurs une conséquence essentielle du principe de la relativité, qui exige la liberté du choix du système de référence.

On peut toujours introduire, en tout point de la multiplicité quadridimensionnelle, un système de référence tel que l'invariant quadratique (2) prenne la forme:

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2 \ . \qquad (7)$$

L'élément linéaire ds est ainsi décomposé en un élément spatial $d\sigma$ et en un temps dt perpendiculaire à l'élément spatial. Grâce au choix particulier du système de référence on a alors:

$$g_{i4} = g_{4i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \ .$$

Puisque de plus on doit choisir conventionnellement l'une des unités, le nombre des inconnues est ramené à 6 et correspond au nombre des équations indépendantes.

Selon la théorie de la relativité restreinte la propagation de

la lumière a lieu suivant les géodésiques de longueur nulle. Il résulte donc de (7) que:

$$f = \frac{d\sigma}{dt} \tag{8}$$

est la vitesse de propagation de la lumière dans le voisinage du point P de la multiplicité. Le potentiel de gravitation $g_{44}=f^2$ est en général une fonction du temps t et des coordonnées spatiales x^1 x^2 x^3.

II. Solutions statiques des équations d'Einstein.

Un champ de gravitation est statique si les potentiels de gravitation g_{ik} sont indépendants du temps t. Nous poserons dans ce cas:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)\ , \tag{9}$$

$d\sigma^2$ signifiant l'invariant quadratique de l'espace tri-dimensionnel. Les γ_{ik} ainsi que f sont alors fonctions des coordonnées spatiales seules, et les équations (1) fournissent d'une part la métrique de l'espace, les γ_{ik}, et d'autre part le champ scalaire de la fonction f (vitesse de la lumière) dans l'espace.

En utilisant, à quelques modifications insignifiantes près, les symboles adoptés par H. Weyl dans son traité classique [1] nous marquerons par un astérisque placé à droite du symbole Γ^{ν}_{ik} celles des composantes du champ de gravitation qui ont un caractère purement spatial:

$$\Gamma^{\nu *}_{ik} = \Gamma^{\nu}_{ik} \qquad \text{pour :} \qquad i,\ k,\ \nu = 1,\ 2,\ 3\ .$$

Les symboles astérisqués se rapportent donc exclusivement à l'invariant ternaire $d\sigma^2$.

On démontre facilement que, tous les g_{ik} étant indépendants du temps t, on a les relations:

$$\left.\begin{array}{c} \Gamma^4_{ik} = 0\ ; \qquad \Gamma^i_{4k} = 0\ ; \qquad \Gamma^4_{44} = 0 \\ \Gamma^4_{i4} = \dfrac{f_i}{f}\ ; \qquad \Gamma^i_{44} = f f^i \\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3 \end{array}\right\} \tag{10}$$

[1] H Weyl. *Raum — Zeit — Materie.* 5me édit., 1923, § 31

Les f_i signifiant les dérivées de f par rapport aux x^i sont les composantes covariantes du gradient tridimensionnel de la fonction scalaire f. Les

$$f^i = \gamma^{ik} f_k$$

sont les composantes contre-variantes correspondantes.

Désignons par γ le déterminant des γ_{ik}. On a selon (7) et (9)

$$\sqrt{-g} = f\sqrt{\gamma}\ .$$

Les produits $f^i\sqrt{\gamma}$ ont la signification d'une densité vectorielle, celle du champ scalaire de la fonction f. Les règles de l'analyse tensorielle [1] fournissent les expressions de la dérivée co-variante f_{ik} du gradient f_i et de la divergence de la densité vectorielle $f^i\sqrt{\gamma}$ qui soit désignée par le symbole Δf:

$$f_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x^k} - \Gamma^{\nu *}_{ik} f_\nu = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \Gamma^{\nu *}_{ik} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \qquad (i,\ k,\ \nu = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial f^i \sqrt{\gamma}}{\partial x^i}$$

Ces formules permettent d'établir les relations suivantes entre les composantes R_{ik} et P_{ik} des tenseurs de Riemann-Christoffel contractés se rapportant respectivement aux invariants ds^2 et $d\sigma^2$:

$$\left.\begin{aligned} R_{ik} &= P_{ik} - \frac{f_{ik}}{f} \\ R_{i4} &= R_{4i} = 0 \\ R_{44} &= f\Delta f\ . \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dans le cas statique, si l'on fait abstraction des tensions s'exerçant entre les éléments de la matière, les composantes covariantes du tenseur matériel sont nulles à la seule exception de la composante:

$$T_{44} = g_{44}\mu = \mu f^2$$

μ étant une fonction scalaire des variables spatiales signifiant la densité de la matière. L'équation qui détermine la

A. EINSTEIN, *l. c.* [1]).

fonction f prend alors la forme

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\varkappa\mu \, .$$

On peut au moyen de cette équation montrer que la solution statique des équations d'Einstein conduit à la théorie bien connue du potentiel newtonien.

Nous nous bornerons ici à signaler une seule des conséquences tirées par Einstein de sa théorie de la gravitation, conséquence résultant immédiatement de la forme (7) de la solution statique et de la relation qui existe, selon la théorie de la relativité restreinte, entre la mesure du temps et la vitesse de propagation f de la lumière.

Supposons qu'une source de lumière monochromatique, un atome émettant une raie spectrale, soit en repos dans un champ de gravitation statique en un point où la fonction scalaire f présente la valeur f_1. ds signifie la « durée propre » de la période optique de la lumière émise. L'atome étant, par hypothèse, en repos on a: $d\sigma = 0$, et par conséquent:

$$ds = f_1 \, dt_1$$

dt_1 signifie la durée de la période du phénomène optique, mesurée en unités de temps d'un système de référence local, en un point quelconque de la multiplicité quadridimensionnelle. L'observateur qui utilise ce système de référence peut comparer la durée

$$dt_1 = \frac{ds}{f_1}$$

avec la durée dt_2 de la période du même phénomène optique produit par un atome identique au premier mais placé dans une autre région de l'espace où la fonction f a la valeur f_2. A cause de la signification invariante du ds^2 la durée propre de la période optique est la même pour les deux atomes identiques; il en résulte que la période observée, qui pour le second atome est

$$dt_2 = \frac{ds}{f_2}$$

présente une valeur différente de dt_1 si $f_2 \neq f_1$.

Puisque en physique on caractérise les raies spectrales par leurs longueurs d'onde, nous introduirons à la place des périodes dt_1 et dt_2 les longueurs d'onde λ_1 et λ_2, proportionnelles, à l'endroit où les raies sont observées simultanément, aux périodes dt_1 et dt_2.

On trouve alors:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_1}{f_2} .$$

Si la première raie spectrale a été produite au Soleil ou sur une étoile, la seconde sur la Terre, on a $f_1 < f_2$ et, par conséquent $\lambda_1 > \lambda_2$. Le phénomène en question, signalé pour la première fois par Einstein, et formant depuis lors le sujet d'un nombre considérable de recherches exécutées suivant les méthodes les plus perfectionnées, est, au point de vue spectroscopique, un déplacement vers le rouge de la raie, d'autant plus considérable que l'intensité du champ de gravitation est plus grande.

On peut calculer l'effet au moyen de la formule:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_2 - f_1}{f_2} .$$

Malheureusement, dans le cas du champ de gravitation solaire l'effet en question est extrêmement faible. De plus, d'autres causes multiples produisent des déplacements dans le même sens ou en sens contraire bien plus considérables. Il n'est donc pas étonnant que les recherches spectro-hélioscopiques, quoique poussées avec une persévérance et une ingéniosité admirables n'aient pas encore abouti à un résultat décisif [1].

III. Champ de gravitation entourant un centre matériel.

Considérons maintenant un champ de gravitation qui par rapport à un point donné de l'espace présente une symétrie sphérique. Les potentiels de gravitation, f^2 et γ_{ik} ne dépendent

[1] Cf. F. Croze, *Ann. de physique*, t. 19, 1923, p. 93.

alors que de la distance r entre le centre O et le point considéré, et l'invariant $d\sigma^2$ prend la forme:

$$d\sigma^2 = k[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + dx^3)^2] + l[x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3]^2 ,$$

où k et l sont des fonctions de r seul.

Etant donnée la « fluidité » du système de référence de la théorie de la relativité générale, on peut, par une déformation appropriée de la coordonnée r, rendre égal à 1 l'un des deux coefficients k et l. Posons donc:

$$k = 1 .$$

Puisqu'on a:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2 .$$

Il vient:

$$x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 = r dr$$

et par conséquent:

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + lr^2 dr^2 .$$

Introduisons à la place des coordonnées cartésiennes x^1 x^2 x^3 des coordonnées polaires r, ϑ, φ. On a dans ce cas:

$$(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2 ,$$

et si nous posons:

$$1 + lr^2 = h^2 ,$$

il vient:

$$d\sigma^2 = h^2 dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2 . \qquad (12)$$

Il s'agit de trouver l'expression de h en fonction de la variable r. Dans ce but, pour pouvoir appliquer à l'expression (12) les méthodes usuelles de l'analyse tensorielle, nous voulons considérer r, ϑ et φ comme des coordonnées de Gauss caractérisant les points d'une multiplicité à 3 dimensions. Les coefficients h^2, r^2 et $r^2 \sin^2 \vartheta$ jouent alors, mais d'une façon purement formelle, le rôle des composantes du tenseur métrique γ_{ik} représentées par le tableau suivant:

$$\begin{matrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{matrix} .$$

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

Grâce à sa symétrie sphérique le champ varie de la même façon dans n'importe quel plan passant par le centre. Il suffit donc d'effectuer le calcul pour un seul de ces plans, défini par la condition particulière:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin\vartheta = 1 .$$

Posons:

$$\gamma_{ik} = 0\,(i \neq k) \; ; \quad \gamma_{11} = h^2 \; ; \quad \gamma_{22} = r^2 \; ; \quad \gamma_{33} = r^2 \sin^2\vartheta .$$

On en déduit:

$$\gamma^{11} = \frac{1}{h^2} \; ; \qquad \gamma^{22} = \frac{1}{r^2} \; ; \qquad \gamma^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} .$$

En calculant selon (4) les composantes $\Gamma^{\nu *}_{ik}$ on n'en trouve que 10 dont les valeurs diffèrent de zéro. En représentant par le symbole h' la dérivée de h par rapport à la variable r, on obtient les expressions suivantes:

$$\Gamma^{1*}_{11} = \frac{h'}{h} \; ; \qquad \Gamma^{1*}_{22} = -\frac{r}{h^2} \; ; \qquad \Gamma^{1}_{33} = -\frac{r \sin^2\vartheta}{h^2}$$

$$\Gamma^{2*}_{12} = \Gamma^{3*}_{13} = -\frac{1}{r} \; ; \qquad \Gamma^{3*}_{23} = \operatorname{ctg}\vartheta \; ; \qquad \Gamma^{2*}_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta .$$

Le déterminant des γ_{ik} est:

$$\gamma = h^2 r^4 \sin^2\vartheta .$$

Selon la théorie générale on utilisera pour le calcul des P_{ik} la formule (5). Il suffit d'y munir d'un astérisque les symboles Γ^{ν}_{ik} et d'y remplacer $\sqrt{-g}$ par $\sqrt{\gamma}$. Après avoir effectué les dérivations par rapport à r et par rapport à ϑ, indiquées dans cette formule, il faut dans toutes les expressions remplacer les fonctions trigonométriques de ϑ par les valeurs qu'elles prennent pour $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

Ce calcul fait, on trouve, selon (11), les expressions suivantes des composantes R_{11}, R_{22}, R_{33} du tenseur contracté de Rie-

mann-Christoffel:

$$\left.\begin{aligned} R_{11} &= P_{11} - \frac{f''}{f} + \frac{h'f'}{hf} = \frac{2h'}{hr} - \frac{f''}{f} + \frac{h'f'}{hf} \\ R_{22} &= P_{22} - \frac{rf'}{h^2 f} = \frac{r}{h^2}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) - \frac{1}{h^2} + 1 \\ R_{33} &= R_{22} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$f' = \frac{df}{dr} \; ; \qquad f'' = \frac{d^2 f}{dr^2} \; .$$

Dans le cas présent où f est uniquement fonction de r et où: $\gamma = h^2 r^4$ on trouve pour Δf l'expression suivante:

$$\Delta f = \frac{f''}{h^2} - \frac{f'h'}{h^3} + \frac{2f'}{rh^2} \; .$$

La troisième des équations (11) donne par conséquent:

$$R_{44} = \frac{f}{h^2}\left(f'' - \frac{h'f'}{h} + \frac{2f'}{r}\right) \; . \qquad (13a)$$

Pour trouver les fonctions f et h il suffit d'intégrer les équations $R_{11} = 0$ et $R_{44} = 0$. La seconde de ces équations peut s'écrire, selon (13 a):

$$\frac{f''}{f} - \frac{h'f'}{hf} + \frac{2f'}{rf} = 0 \; ,$$

tandis que la première est, selon (13):

$$-\frac{f''}{f} + \frac{h'f'}{hf} + \frac{2h'}{rh} = 0 \; .$$

Il en résulte:

$$\frac{2}{r}\left(\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f}\right) = 0 \; ,$$

équation dont l'intégrale est:

$$fh = \text{const} \; .$$

Si l'on admet qu'à une distance infiniment grande du centre les deux fonctions f et h tendent vers 1, la constante d'intégration prend la valeur 1. Nous pouvons alors, en posant

$$fh = 1 \qquad (14)$$

éliminer la fonction h d'une des deux équations différentielles simultanées. Nous obtenons ainsi:

$$\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{f'}{f} = 0 .$$

L'intégrale de cette équation différentielle est:

$$f^2 = -\frac{2m}{r} + \text{const}$$

m étant l'une des deux constantes d'intégration. Selon la condition limite précédemment admise la seconde constante d'intégration doit avoir la valeur 1. On trouve donc les deux solutions suivantes:

$$f^2 = 1 - \frac{2m}{r} ; \qquad h^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} \qquad (15)$$

La constante m est caractéristique pour l'intensité du champ de gravitation à une distance donnée du centre. D'après Newton cette intensité est proportionnelle à la masse attirante. m a les dimensions d'une longueur. On appelle cette longueur le *rayon de gravitation* de la masse placée au centre du champ.

Les solutions (15) dues à Schwarzschild [1] n'ont, du reste, une signification que si l'on suppose $r > 2m$. Si, en partant de cette limite, on fait croître r, le potentiel f^2 augmente et le potentiel h^2 diminue. Les deux potentiels tendent vers la limite commune 1 pour $r = \infty$.

Cette supposition qui a été faite pour déterminer les constantes d'intégration devrait avoir une signification générale. Dans ce cas, à une distance infiniment grande de toute matière les potentiels de gravitation devraient prendre les valeurs galiléennes:

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 1 \; (i = k) \\ 0 \; (i \neq k) \end{cases} \qquad g_{4i} = 0 \; (i \neq 4) \qquad g_{44} = 1 .$$

[1] K. Schwarzschild. *Ber. d. Berl. Akad.*, 1916, p. 189.

Si l'on cherche à appliquer cette hypothèse au monde stellaire tout entier, on se heurte à un paradoxe assez grave.

Quoique la théorie de la relativité proclame en principe l'équivalence de toute espèce de système de référence, les conditions limites postulées pour les régions infiniment éloignées permettent la distinction de certains systèmes ayant une importance particulière, ceux pour lesquels les g_{ik} prennent à l'infini les valeurs galiléennes.

Pour faire disparaître cette difficulté, il faudrait introduire dans la théorie des conditions limites qui ont le même caractère de covariance générale que les équations gravitationnelles elles-mêmes, ou bien il faudrait pouvoir se passer de toute espèce de condition limite relative aux régions infiniment éloignées de l'espace.

Dans un important mémoire consacré au problème cosmologique Einstein [1] a montré que des conditions limites satisfaisant au postulat de covariance ne peuvent pas être prises en considération. Elles ne s'accorderaient pas avec les petites vitesses stellaires observées par les astronomes. Pour échapper à l'obligation d'introduire des conditions limites quelconques on peut se représenter l'espace fini et entièrement rempli de matière. Avant d'aborder cette idée il est nécessaire d'examiner le problème de la répartition continue de la matière dans une portion limitée de l'espace.

IV. Champ de gravitation produit a l'intérieur d'une masse fluide.

Le problème d'une répartition matérielle de symétrie sphérique où les deux potentiels f^2 et h^2 sont des fonctions d'une seule variable r a été également résolu par Schwarzschild [2].

En tout point d'un fluide incompressible homogène et isotrope en repos les composantes mixtes T^i_k du tenseur matériel ont les valeurs représentées dans le tableau suivant:

[1] A. Einstein. Kosmologische Betrachtungen zur allgem. Relativitätstheorie. *Ber. d. Berl. Akad.*, 1917, p. 142. « Das Relativitätsprinzip », p. 130.

[2] K. Schwarzschild. *Ber. d. Berl. Akad.* 18 (1916), p. 424.

$$T^i_k = \left| \begin{array}{ccc|c} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{array} \right. \qquad (16)$$

p signifie la pression statique régnant au point considéré du fluide. Cette pression est une fonction de la distance r. μ_0 est la densité invariable du fluide incompressible.

Désignons par $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ les composantes de la direction d'Univers (quadri-vitesse) d'un point matériel. Si du système de référence par rapport auquel la matière est en repos nous passons à un système de référence quelconque nous obtenons les expressions suivantes pour les composantes covariantes T_{ik} du tenseur matériel:

$$T_{ik} = -g_{ik}p + (\mu_0 + p)\, u_i u_k \,. \qquad (16a)$$

Dans le problème statique le vecteur de direction a une seule composante telle que $u_4 u^4 = 1$. Le champ de gravitation présentant la symétrie sphérique est fonction de la seule variable r et les seuls potentiels de gravitation différents de zéro sont: $g_{44} = f^2$ et $g_{11} = -h^2$. Nous appliquerons toutefois ici le même mode de calcul que précédemment en utilisant des coordonnées polaires et en posant:

$$\gamma_{11} = h^2 \;; \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} = r^2$$
$$\gamma^{11} = \frac{1}{h^2} \;; \quad \gamma^{22} = \gamma^{33} = \frac{1}{r^2} \,.$$

On obtient alors les expressions suivantes des composantes covariantes et du scalaire du tenseur T_{ik}:

$$T_{44} = f^2 \mu_0 \;; \quad T_{11} = h^2 p \;; \quad T_{22} = T_{33} = r^2 p$$
$$T = T^i_i = \mu_0 - 3p \,.$$

Selon (1), (13) et (13a) les équations non homogènes du champ de gravitation existant à l'intérieur du fluide prennent alors la forme suivante:

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ NEUCHATEL

$$\left.\begin{aligned} R_{44} &= \frac{f}{h^2}\left(f'' - \frac{h'f'}{h} + \frac{2f'}{r}\right) = \frac{\varkappa}{2} f^2 (\mu_0 + 3p) \\ R_{11} &= -\frac{f''}{f} + \frac{h'f'}{hf} + \frac{2h'}{hr} = \frac{\varkappa}{2} h^2 (\mu_0 - p) \\ R_{22} = R_{33} &= \frac{r}{h^2}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) - \frac{1}{h^2} + 1 = \frac{\varkappa}{2} r^2 (\mu_0 - p) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Des deux premières équations (17) on déduit:

$$\frac{2}{r}\left(\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h}\right) = \varkappa h^2 (\mu_0 + p) \ . \qquad (17a)$$

Si l'on met la troisième équation sous la forme:

$$\frac{2}{r}\left(\frac{h'}{h} - \frac{f'}{f}\right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2h^2}{r^2} = \varkappa h^2 (\mu_0 - p)$$

on peut éliminer entre les deux dernières équations la fonction $\frac{f'}{f}$ et on obtient alors l'équation différentielle:

$$2\frac{h'}{h^3} r - \varkappa r^2 \mu_0 - \frac{1}{h^2} + 1 = 0$$

dont l'intégrale est:

$$\frac{1}{h^2} - 1 = -\frac{\varkappa \mu_0 r^2}{3} + \frac{\text{const}}{r} \ .$$

h devant rester fini pour $r = 0$, la constante d'intégration doit être nulle et on trouve:

$$\frac{1}{h^2} = 1 - \frac{\varkappa \mu_0 r^2}{3} \qquad (18)$$

La pression p du fluide doit être une fonction de r satisfaisant au principe de conservation exprimé par les équations (6). Si nous y substituons les valeurs:

$$\sqrt{-g} = hfr^2 \ ; \quad T_1^1 = -p \ ; \quad g^{11} = -\frac{1}{h^2}$$

nous obtenons, après avoir simplifié l'expression, l'équation:

$$p' + (p + \mu_0)\frac{f'}{f} = 0$$

dont l'intégrale est:

$$f(p + \mu_0) = \text{const} \ .$$

Supposons avec Schwarzschild que la masse fluide constitue une sphère de rayon a et que la pression p_0 à la surface de la sphère soit nulle. Puisque à la surface l'expression constante $f(p + \mu_0)$ prend la valeur $f_0 \mu_0$ on doit avoir partout:

$$f(p + \mu_0) = f_0 \mu_0 \cdot$$

Pour déterminer les constantes f_0 et h_0, on admettra qu'à la surface, les solutions f et h se raccordent d'une façon continue à celles qui se rapportent au champ extérieur dans le vide. Ce champ étant défini par les équations (14) et (15), il vient:

$$f(p + \mu_0) = \frac{\mu_0}{h^2} \cdot \tag{19}$$

Il reste alors uniquement à calculer la fonction f.

Remplaçons dans l'équation (17a) $\mu_0 + p$, qui signifie la densité matérielle totale en un point du fluide, par la valeur tirée de (19). Eliminons-en encore r au moyen de l'équation (18), nous obtenons:

$$\frac{2h_0 f'}{3 - 2h_0 f} = \frac{\varkappa \mu_0 r}{3 - \varkappa \mu_0 r^2} = \frac{h'}{h} \cdot$$

L'intégrale de cette équation est:

$$h(2h_0 f - 3) = \text{const} \cdot$$

Puisque à la surface de la sphère les fonctions h_0 et f_0 doivent remplir la condition:

$$h_0 f_0 = 1$$

la constante d'intégration prend la valeur h_0 et on trouve:

$$f = \frac{3h - h_0}{2h h_0} \tag{20}$$

La discussion de la formule (18) montre que le carré du rayon de la sphère est nécessairement

$$< \frac{3}{\varkappa \mu_0},$$

car il est évident que h doit rester fini à toute distance finie du centre.

Pour $r = a$ la condition de continuité imposée à la solution indique qu'on doit avoir en tout cas:

$$m > \frac{a}{2} .$$

Pour $2m = a$ le potentiel h^2 deviendrait infiniment grand à la surface du fluide.

L'invariant quadratique de l'espace rempli de fluide est:

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + l\,[x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3]^2 .$$

Le coefficient l de cette expression a la valeur:

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} ,$$

soit, selon (18),

$$l = \frac{\varkappa\mu_0}{3\left(1 - \frac{\varkappa\mu_0 r^2}{3}\right)} .$$

Désignons par A la valeur extrême du rayon a de la sphère fluide correspondant à la supposition $h_0 = \infty$. Il vient, selon (18)

$$\mathrm{A} = \sqrt{\frac{3}{\varkappa\mu_0}} . \tag{21}$$

L'expression du coefficient l peut donc être mise sous la forme:

$$l = \frac{1}{\mathrm{A}^2 - r^2} \tag{22}$$

et on a:

$$h^2 = 1 + lr^2 = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{A}^2 - r^2} \tag{23}$$

Le carré de l'élément linéaire de l'espace prend donc la forme normale bien connue:

$$d\sigma^2 = \Sigma\,(dx^i)^2 + \frac{1}{\mathrm{A}^2 - r^2}(\Sigma\, x^i dx^i)^2$$

qui est celle de l'invariant métrique d'une multiplicité homogène sphérique ou elliptique.

Pour se rendre compte d'une façon intuitive des propriétés géométriques d'un pareil espace, il est utile d'introduire une coordonnée supplémentaire, et de considérer l'espace sphérique

comme une des multiplicités tri-dimensionnelles d'une multiplicité euclidienne à 4 dimensions.

Soient x_1, x_2, x_3, z des coordonnées cartésiennes rectangulaires. Posons:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

et soit:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + z^2 = A^2$$

l'équation d'une multiplicité tridimensionnelle sphérique de rayon A. Il suffit d'étudier les propriétés métriques d'un des « plans » méridiens de cet espace sphérique. Nous poserons donc:

$$x_3 = 0$$

et nous obtenons l'équation du plan méridien sous la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + z^2 = A^2 \,. \tag{24}$$

La géométrie de ce plan méridien est donc la même que celle d'une sphère ordinaire de rayon A.

Supposons que le centre de la sphère fluide coïncide avec l'un des pôles de la sphère euclidienne ($x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $z = A$).

Les équations (19) et (20) indiquent les valeurs de la pression p à toute distance r du centre. On trouve:

$$p = \mu_0 \frac{h_0 - h}{3h - h_0} \,. \tag{25}$$

La sphère fluide ne recouvre qu'une calotte de la surface (24) et on a nécessairement $a < A$. La coordonnée supplémentaire z signifie la « hauteur » comptée à partir de l'équateur de l'espace sphérique. Selon (23) on a:

$$h = \frac{A}{z} \,; \qquad h_0 = \frac{A}{z_0}$$

et, par conséquent,

$$p = \mu_0 \frac{z - z_0}{3z_0 - z} \,. \tag{25a}$$

Si l'on admet que h_0 reste fini, la calotte recouverte de fluide ne peut pas s'étendre jusqu'à l'équateur parce qu'on a néces-

sairement $z_0 > 0$, mais en réalité le fluide s'étendra bien moins loin. Il est, en effet, indispensable que la condition

$$z_0 > \frac{A}{3} \tag{26}$$

soit respectée. Si l'on pouvait attribuer à z_0 toutes les valeurs positives inférieures à A, le numérateur de la fraction (25a) resterait toujours positif, le dénominateur par contre changerait de signe pour une certaine étendue r du fluide, qui d'ailleurs pourrait être aussi petite que l'on veut, pourvu que l'on suppose z_0 suffisamment petit.

Cette circonstance est inadmissible, parce que p doit rester fini pour toute valeur de z supérieure à z_0 et prendre la valeur zéro pour $z = z_0$. Pour exclure la possibilité que p devienne infini et change ensuite de signe, nous devons admettre l'inégalité (26). Il en résulte pour le rayon a de la sphère fluide la condition:

$$a < \frac{2\sqrt{2}\,A}{3}\,. \tag{26a}$$

Nous avons vu plus haut que a doit, selon l'équation (18), rester nécessairement $< A$. La condition (26 a) est encore un peu plus restrictive car elle indique que a ne doit pas dépasser la limite 0,9427A.

V. Le principe de Mach et les équations cosmologiques d'Einstein.

L'exemple qui vient d'être traité met en évidence les difficultés auxquelles se heurte la théorie de la gravitation s'il s'agit d'envisager de grandes étendues de l'espace remplies de matière.

D'autre part, des considérations statistiques, applicables aussi bien à la théorie d'Einstein qu'à celle de Newton, conduisent à la conclusion que les astres, concentrés à un instant donné en une région limitée de l'espace, auraient la tendance de s'en échapper et de se dissiper, ce qui semble être en contradiction avec l'existence du ciel étoilé.

L'objection la plus grave au point de vue épistémologique est d'ailleurs celle qui vient d'être signalée au chapitre III. Einstein a donné à cette objection la forme d'un principe, appelé « principe de Mach » [1], qui peut être énoncé de la façon suivante:

Désignons par G_{ik} les composantes tensorielles qui, en vertu des équations du champ de gravitation, doivent être égalées aux $\varkappa T_{ik}$. Le principe de Mach demande que *la répartition de la matière à elle seule, représentée par les* T_{ik}, *doit suffire à déterminer complètement et d'une façon covariante le champ tensoriel des* G_{ik}.

Le champ qui conduit la matière, celui, par exemple, qui maintient le plan des oscillations du pendule de Foucault ou qui produit l'aplatissement d'une sphère fluide tournante, ne peut être dû à une cause fictive telle que l'espace absolu de Newton ou la condition limite imposée aux g_{ik}.

En particulier il faut demander que l'inertie d'un corps soit entièrement définie par les masses qui l'entourent, de sorte que cette inertie doit devenir nulle, si l'on éloigne toutes les autres masses à une distance infinie (Principe de la relativité de l'inertie). Or, les conditions limites qui s'accorderaient avec le principe de la relativité de l'inertie sont incompatibles avec les faits astronomiques. Einstein est donc arrivé à la conclusion suivante: La seule manière de satisfaire au principe de Mach, sans se heurter à d'autres difficultés, est de supposer l'espace fini, quoique sans bornes, et entièrement rempli de matière. On remédie en même temps au défaut de la théorie de la gravitation de ne pas expliquer l'existence du système stellaire.

Cependant, l'exemple traité au chapitre IV démontre que la matière ne peut être répartie dans l'espace entier, jusqu'à la limite de la plus grande distance qui est supérieure à A, sous forme d'un fluide continu. Il est du reste facile de voir que la supposition de n'importe quelle répartition matérielle statique est incompatible avec les équations (1) admises jusqu'ici. En effet, dans un champ statique, la ligne d'Univers tracée par un point matériel immobile, dont la direction d'Univers a la seule composante u^4 ($u_4 u^4 = 1$), doit être une géodésique.

[1] A. Einstein. *Ann. de Phys.* 55 (1918), p. 241. Cf. aussi W. Pauli, Relativitätstheorie, (Teubner), 1921.

L'une des équations de cette géodésique est:

$$\frac{du^4}{ds} = 0 .$$

Il en résulte, selon l'équation générale des géodésiques (3) que

$$\Gamma^i_{44} = 0 .$$

La dernière des équations (10) entraîne alors la conséquence:

$$f^i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

pour $i = 1, 2, 3$, et on a par suite: $f = \text{const.} = 1$, en contradiction avec la dernière des équations (11) qui fait dépendre la valeur variable de f de la répartition des masses.

Pour remédier à cette contradiction il faut généraliser l'expression du tenseur G_{ik}. Si l'on ajoute au premier membre des équations (1) le terme $-\lambda g_{ik}$, où λ signifie une constante universelle — la constante « cosmologique » d'Einstein — les équations de conservation du tenseur matériel T_{ik} restent satisfaites identiquement. Le tenseur:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - g_{ik} \lambda$$

est « conservatif » au même titre que le tenseur primitif $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$, et il remplit en même temps toutes les autres conditions mathématiques qui, selon Einstein, doivent être imposées aux composantes tensorielles G_{ik}[1], mais de plus les équations du champ de gravitation complétées par le terme cosmologique sont compatibles avec des répartitions statiques de masses immobiles dans un espace sphérique ou elliptique.

[1] Les composantes du tenseur en question doivent être des fonctions linéaires des dérivées secondes des g_{ik} et ne dépendre d'ailleurs que des g_{ik} ainsi que de leurs dérivées premières et secondes. Ces conditions doivent être remplies pour que la théorie se confonde en première approximation avec celle de l'attraction newtonienne des masses.

En effet, les nouvelles équations du champ de gravitation sont:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - g_{ik}\lambda = \varkappa T_{ik} \,. \qquad (1a)$$

Dans les conditions cosmiques où la densité moyenne de la matière est extrêmement petite, on peut négliger les actions mutuelles intérieures et supposer, par conséquent,

$$p = 0 \,.$$

Il vient alors, selon (16 a)

$$T_{ik} = 0 \,, \qquad \text{pour:} \quad i, k = 1, 2, 3 \,.$$

La seule composante covariante du tenseur matériel différente de zéro est donc:

$$T_{44} = f^2 \mu_0 \,.$$

Il en résulte:

$$T = \mu_0 \,.$$

Des équations (1 a) on déduit l'équation scalaire:

$$- R - 4\lambda = \varkappa T$$

D'où:

$$R_{ik} + g_{ik}\lambda = \varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \,.$$

Il vient donc:

$$R_{44} + g_{44}\lambda = \varkappa f^2 \frac{\mu_0}{2} \,.$$

LABORATOIRE DE PHYSIQUE UNIVERSITÉ NEUCHATEL

Puisqu'on a, d'autre part:

$$R_{44} = 0 \,, \qquad g_{44} = f^2$$

on obtient la relation:

$$2\lambda = \varkappa \mu_0 \,. \qquad (27)$$

Pour $i, k = 1, 2, 3$ la condition: $f =$ const conduit à la conséquence:

$$R_{ik} = P_{ik} \qquad \text{et:} \qquad P_{ik} - 2\gamma_{ik}\lambda = 0 \,.$$

En particulier on a, selon (13): $P_{11} = \frac{2h'}{hr}$, et par conséquent:

$$\frac{2h'}{h^3 r} = 2\lambda .$$

L'intégrale de cette équation est:

$$1 - \frac{1}{h^2} = \lambda r^2 ,$$

puisque pour $r = 0$ on pose: $h = 1$.

On trouve donc:

$$h^2 = \frac{1}{1 - \lambda r^2} . \qquad (27a)$$

Selon (27) c'est la densité de la répartition matérielle qui détermine la valeur de la constante cosmologique λ.

En ce qui concerne le coefficient l de l'invariant quadratique $d\sigma^2$ on trouve:

$$l = \frac{h^2 - 1}{r^2} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - r^2} .$$

En comparant cette expression de l avec la formule (22), donnant la valeur de ce coefficient pour un espace sphérique de rayon A, on reconnaît que la solution considérée des équations cosmologiques correspond à l'idée suivante: L'espace est sphérique ou elliptique, et son rayon A est:

$$A = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} . \qquad (28a)$$

On peut supposer que le champ de gravitation dans lequel se trouvent les étoiles est statique, car les vitesses relatives de ces corps sont petites en comparaison de la vitesse de la lumière. Si, de plus, la répartition des étoiles est à peu près homogène, l'espace doit être sphérique ou elliptique, donc fini. Dans ces conditions le potentiel de gravitation présente une valeur constante partout. Il n'existe, dans le cas considéré, aucun centre de la répartition matérielle; la grandeur r signifie donc la distance comptée à partir d'un point quelconque de l'espace. Concernant r on peut se poser la question suivante:

Quelle est la distance entre un point quelconque et les points les plus éloignés de l'espace sphérique ? L'*analysis situs* conduit à la distinction des deux cas suivants:

1° L'espace est *sphérique* cela veut dire que, s'il est représenté dans une multiplicité quadridimensionnelle euclidienne, deux points distincts correspondent aux points diamétralement opposés dont les coordonnées sont respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 et $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$. La plus grande distance est dans ce cas πA, et le point le plus éloigné d'un point donné est le pôle diamétralement opposé.

2° On peut aussi supposer que dans l'espace réel chaque point et le point diamétralement opposé soient confondus. Les points les plus éloignés de l'origine seraient alors ceux de la plus grande sphère de l'espace, distants de l'origine de $\frac{\pi A}{2}$. Un pareil espace est appelé *elliptique*.

Suivant le cas réalisé, le volume de l'espace serait $2\pi^2 A^3$ ou $\pi^2 A^3$ et la masse totale qu'il contient serait:

$$M = 2\pi^2 A^3 \mu_0 \qquad \text{ou} \qquad M = \pi^2 A^3 \mu_0 .$$

Les équations (28) et (28 *a*) conduisent alors, suivant que l'on adopte l'une ou l'autre des deux conceptions, aux résultats [1]:

$$\varkappa M = \frac{4\pi^2}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{(espace sphérique)}$$

ou:

$$\varkappa M = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\lambda}} \qquad \text{(espace elliptique)}$$

De toute façon la constante cosmologique λ et par suite le rayon A de l'espace, sont déterminés par la masse totale des corps contenus dans l'espace. Le principe de Mach, selon lequel le champ de gravitation dans lequel se trouvent les étoiles, doit être déterminé par la masse du monde entier, est donc satisfait. La masse M est sans doute énorme. A est, par conséquent, d'une grandeur déconcertante qui semble être de l'ordre de 10^7 années de lumière. Pratiquement cela équivaut à une

[1] Cf. J. Becquerel. Le principe de relativité et la théorie de la gravitation. Gauthier-Villars. 1922. A. S. Eddington. Espace, Temps et Gravitation. J. Hermann. 1921. H. Weyl, *l. c.*

grandeur infinie. La constante λ est de l'ordre de 10^{-51}, en prenant comme unité de longueur le cm.

Les conclusions résultant des équations primitives d'Einstein subsistent par conséquent entièrement, si l'on se borne à considérer une portion limitée de l'espace, et aucun argument tiré de la théorie de la gravitation elle-même ne peut être opposée à la théorie cosmologique d'Einstein.

Il ne faudrait cependant pas croire que cette conception soit à l'abri de toutes les difficultés.

L'objection suivante se présente immédiatement à l'esprit: On a bien sauvé la relativité de l'espace, mais en sacrifiant en quelque sorte la relativité du temps. Les génératrices rectilignes de l'Univers cylindrique d'Einstein définissent, en effet, un temps universel. Etant données les faibles vitesses relatives des astres, les temps mesurés dans les différents systèmes stellaires sont très voisins les uns des autres. Il existe donc un certain temps moyen qui est le temps de l'espace statique théorique où toute la matière serait en repos. Une théorie relativiste parfaite ne devrait-elle pas nier l'existence d'une horloge privilégiée, de même qu'elle nie le système de référence spatial privilégié ?

On pourrait répondre que dans certaines régions du Cosmos, à l'intérieur des étoiles par exemple dont la température est très élevée, peuvent exister des conditions où la vitesse de la matière est plus ou moins rapprochée de celle de la lumière. Dans ce cas le principe de la relativité du temps reprend pleinement son rôle. Il n'en est pas moins vrai que les horloges locales n'ont pas la même importance que l'horloge cosmique, et la supposition d'une pareille horloge nuit à l'harmonie et à la beauté de la théorie.

Plus sérieuses encore que cette objection de principe sont certaines difficultés qui se présentent, lorsqu'on compare les conséquences de la théorie avec les faits observés. Dans l'Univers cylindrique les géodésiques de longueur nulle sont des hélices décrites sur la surface quadridimensionnelle du cylindre. Les espaces coniques constitués par les géodésiques issues du même point doivent par conséquent se contracter périodiquement en un seul point d'Univers, chaque fois que les rayons

ont achevé un demi-tour. En d'autres termes, il existerait des « anti-soleils » et des « anti-étoiles » qui seraient les images du soleil et des étoiles, produites au point diamétralement opposé de l'espace. A supposer que ces images, par suite de la déviation et de l'absorption de la lumière sur son énorme parcours, seraient trop faibles et trop peu nettes pour être aperçues, il devrait en résulter cependant un éclairement diffus du ciel qui n'a jamais été remarqué. Enfin, dans l'espace fermé il devrait s'établir un équilibre mobile du rayonnement, de même qu'il se produit dans une enceinte creuse à parois réfléchissantes.

On peut, il est vrai, écarter toutes ces difficultés en supposant l'espace elliptique. L'anti-point coïncide alors avec l'origine, et les rayons ne reviendraient jamais à leur point de départ; mais il faut alors se demander ce qu'il advient de toute cette énergie rayonnante qui s'en va. La supposition de l'espace elliptique est du reste, à d'autres égards aussi, moins satisfaisante que celle de l'espace sphérique.

Aucune des objections qui viennent d'être formulées n'est d'ailleurs péremptoire, et la théorie cosmologique d'Einstein s'imposerait, semble-t-il, s'il était prouvé que le monde stellaire est vraiment en équilibre statique. Mais ce fait même n'est pas certain. Il se peut que la répartition des astres soit seulement en apparence une répartition d'équilibre. Peut-être y a-t-il effectivement tendance vers une dissipation générale des corps. Si l'espace qui nous entoure est rempli d'étoiles, cela tient peut-être à ce que la dispersion des astres n'a pas encore pu se produire vu l'âge peu avancé des systèmes stellaires que nous observons.

Notre expérience trop restreinte dans l'espace et dans le temps ne nous permet pas de trancher ces questions qui ont une importance fondamentale pour le problème cosmologique.

VI. La théorie cosmologique de De Sitter.

Etant données les difficultés qui résultent de la conception de l'Univers cylindrique, il est intéressant d'envisager une

seconde solution des équations cosmologiques d'Einstein qui a été donnée par De Sitter [1].

Cette solution, basée sur la supposition:

$$T_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

est:

$$\left.\begin{aligned} f^2 &= 1 - \frac{r^2}{A^2} \\ ds^2 &= f^2 dt^2 - d\sigma^2 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Pour trouver la solution de De Sitter il suffit de déduire des équations:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - g_{ik}\lambda = 0$$

par contraction l'équation scalaire:

$$- R - 4\lambda = 0 \,. \qquad (30)$$

Le problème se ramène alors à l'intégration des équations:

$$\begin{aligned} R_{44} + g_{44}\lambda &= 0 \\ R_{11} + g_{11}\lambda &= 0 \\ R_{22} + g_{22}\lambda &= 0 \,. \end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$g_{44} = f^2 \,; \qquad g_{11} = - h^2 \,; \qquad g_{22} = - r^2$$

les expressions (13) et (13 *a*) des R_{ik} conduisent aux formules suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f} - \frac{f'h'}{fh} + \frac{2}{r}\frac{f'}{f} + h^2\lambda &= 0 \\ - \frac{f''}{f} + \frac{f'h'}{fh} + \frac{2}{r}\frac{h'}{h} - h^2\lambda &= 0 \\ \frac{h'}{h} - \frac{f'}{f} - \frac{1}{r} + \frac{h^2}{r} - h^2 r\lambda &= 0 \,. \end{aligned}$$

[1] De Sitter. On the relativity of inertia. *Versl. d. Akad. Amsterdam*, 19 (1917), p. 1217. On the curvature of space. *ibid.* 20 (1918), p. 229. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. *Monthly Notices*. R. Astronom. Soc. London. Nov. 1917, p. 3.

Des deux premières équations on tire:

$$\frac{2}{r}\left(\frac{f'}{f}+\frac{h'}{h}\right)=0\ .$$

D'où:

$$fh=1\ . \tag{31}$$

En éliminant de la troisième équation la fonction $\frac{f'}{f}$ on obtient:

$$2\frac{h'}{h^3}r-\left(\frac{1}{h^2}-1\right)-\lambda r^2=0\ .$$

L'intégrale de cette équation est:

$$\frac{1}{h^2}=1-\frac{\lambda r^2}{3}\ . \tag{32}$$

Il en résulte que l'Univers de De Sitter est une multiplicité homogène de « rayon »:

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \tag{33}$$

Plus simplement on aurait pu trouver ce résultat selon l'équation (30) en remarquant que l'invariant de courbure d'une multiplicité homogène de 4 dimensions est:

$$\mathrm{R}=-\frac{12}{\mathrm{A}^2}\ .$$

De (31), (32), (33) on déduit encore:

$$f^2=\frac{1}{h^2}=\frac{1}{1-\frac{r^2}{\mathrm{A}^2}}\ ,$$

et on retrouve ainsi l'expression (29) du ds^2 qui indique que la multiplicité de De Sitter est pseudo-sphérique. Si l'on considère trois de ses dimensions comme positives, la quatrième est négative.

Pour nous rendre compte des propriétés métriques de cet Univers, introduisons une coordonnée supplémentaire et considérons le ds comme l'élément d'arc d'un hyperboloïde à 4 dimensions dans une multiplicité semi-euclidienne de 5 dimensions, dont l'une est négative. L'hyperboloïde est représenté

par l'équation:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = A^2 \tag{34}$$

et le carré de l'élément d'arc est:

$$- ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 - dx_5^2 .$$

Etant donnée la symétrie sphérique de cette multiplicité il suffit d'étudier les conditions géométriques existant dans une section chrono-spatiale qui comprend la dimension négative. On peut donc, suivant l'exemple de H. Weyl[1], supprimer deux des dimensions positives.

L'équation:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_5^2 = A^2$$

représente alors un hyperboloïde de révolution ordinaire.

En faisant tourner deux des axes de l'hyperboloïde autour du troisième axe, en désignant les nouvelles coordonnées par x_1, x_2, x_3 et en posant $A = 1$, on obtient l'équation de l'hyperboloïde sous la forme:

$$2x_1 x_2 + x_3^2 = 1 \tag{35}$$

Le ds^2 correspondant à cette nouvelle forme de l'équation est:

$$- ds^2 = 2dx_1 dx_2 + dx_3^2 \tag{35a}$$

L'une des équations caractérisant les géodésiques de longueur nulle est donc:

$$2 \frac{dx_1}{dx_3} \frac{dx_2}{dx_3} + 1 = 0 .$$

Puisque d'autre part toutes les géodésiques de l'hyperboloïde sont situées dans des plans qui passent par le centre de l'hyperboloïde on a une seconde équation de la forme:

$$c_1 dx_1 + c_2 dx_2 + c_3 dx_3 = 0 ,$$

c_1, c_2, c_3 signifiant des coefficients constants; et on voit que $\frac{dx_1}{dx_3}$ et $\frac{dx_2}{dx_3}$ ont des valeurs constantes pour une géodésique

[1] H. Weyl. *Phys. Zeitschr.* 24 (1923), p. 230 et *l. c.*

déterminée. Dans l'Univers quadridimensionnel ces lignes sont donc des droites. Selon (35) et (35*a*) deux de ces droites qui se coupent en un point déterminé de la multiplicité satisfont aux équations:

$$\frac{x_1}{x_3+1} = \pm \frac{dx_1}{dx_3} \quad \text{et} \quad \frac{x_2}{x_3-1} = \pm \frac{dx_2}{dx_3} \tag{36}$$

Les équations (36) représentent les intersections de l'espace conique de la propagation de la lumière avec la section considérée de la multiplicité de De Sitter.

Les géodésiques des points matériels immobiles sont des hyperboles. Considérons un observateur lié à l'un de ces points, en relation, grâce à la propagation de la lumière, avec toute la portion de l'hyperboloïde qui est limitée par l'une des moitiés du cône de lumière. Supposons que, dans notre section tridimensionnelle, le point d'Univers caractérisant la position de l'observateur se trouve sur l'une des hyperboles $x_3 = 0$ dont l'équation est:

$$2x_1 x_2 = 1 \ .$$

La position actuelle de l'observateur sur l'hyperbole L, qui est sa « ligne d'Univers », soit représentée par le sommet O de l'hyperbole correspondant aux valeurs négatives des coordonnées x_1 et x_2.

Posons donc:

$$x_1 = -\alpha \ ; \quad x_2 = -\frac{1}{2\alpha} \ . \tag{37}$$

Une géodésique de longueur nulle passant par le point d'Univers O est définie, selon (36), par les conditions:

$$x_3 = 0 \ ; \quad \left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)_0 = -\alpha \ ; \quad \left(\frac{dx_2}{dx_3}\right)_0 = \frac{1}{2\alpha} \ .$$

En désignant par $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ les coordonnées courantes de cette droite, nous avons:

$$\xi_1 = -\alpha(\xi_3+1) \qquad \xi_2 = \frac{1}{2\alpha}(\xi_3-1) \tag{38}$$

Une étoile qui se trouve dans l'espace à une certaine distance r de l'observateur décrit une ligne d'Univers Λ qui est également une hyperbole. Supposons que la ligne Λ appartienne au plan diamétral

$$\xi_3 = \beta\xi_1 \ . \tag{39}$$

L'une des droites (36) joint la position actuelle de l'observateur O à un point déterminé de la ligne Λ. Nous pouvons donc comparer la durée de la perception ds d'un événement par l'observateur O, avec la durée propre ds' de l'événement qui a eu lieu sur l'étoile au moment de l'émission de la lumière. On déduit en effet des équations (37):

$$-ds^2 = 2dx_1\,dx_2 = -\frac{d\alpha^2}{\alpha^2}\,,$$

et des équations (38) et (39):

$$-ds'^2 = 2d\xi_1\,d\xi_2 + d\xi_3^2 = -\frac{d\alpha^2}{\alpha^2(1+\alpha\beta)}\,.$$

Le rapport de ces deux durées est:

$$\frac{ds}{ds'} = 1 + \alpha\beta\,. \tag{40}$$

La distance r entre l'observateur et l'étoile peut être trouvée très simplement à l'aide de la construction suivante:

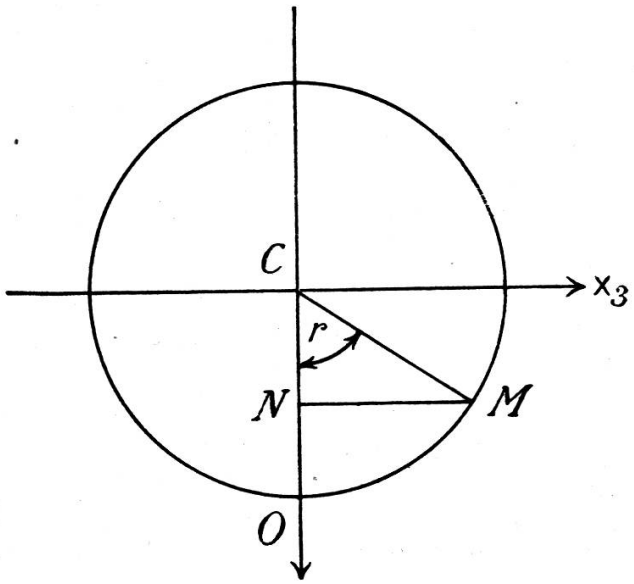

Fig. 1.

Soit C le centre de l'hyperboloïde. Joignons le sommet O de l'hyperbole L avec le centre C par le segment CO qui est la moitié du plus petit diamètre de l'hyperbole. Dans le plan défini par ce diamètre et par l'axe des x_3, qui est perpendiculaire au plan de l'hyperbole, nous traçons un cercle de rayon CO = 1. Ce cercle coupe la ligne d'Univers Λ de l'étoile au

point marqué M. La longueur CM étant $= 1$, on voit que la projection de CM sur l'axe des x_3 est:

$$\mathrm{NM} = \sin r \ .$$

Projetant d'autre part CM sur le diamètre CO de l'hyperbole on obtient:

$$\mathrm{CN} = \cos r \ .$$

La droite CO formant avec l'axe des x_1 un angle de 45° dont le cosinus est:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \alpha \ ,$$

la position du point M est caractérisée par les coordonnées:

$$\xi_1 = \alpha \cos r \ , \qquad \xi_2 = \sin r \ ,$$

liées l'une à l'autre par l'équation (39), qui définit le plan de l'hyperbole Λ. On trouve donc:

$$\operatorname{tg} r = \alpha\beta$$

et, par conséquent, selon (40):

$$\frac{ds}{ds'} = 1 + \operatorname{tg} r \ . \tag{40a}$$

Si nous rétablissons, pour désigner le rayon de l'Univers, le symbole A au lieu de 1, nous obtenons, à la place de (40*a*) la formule:

$$\frac{ds}{ds'} = 1 + \operatorname{tg} \frac{r}{\mathrm{A}} \ . \tag{40b}$$

Il est peut-être utile d'ajouter à ces considérations deux remarques:

Notons d'abord que l'observateur ne peut être en relation avec l'étoile, par la propagation de la lumière, que si la ligne Λ est située sur l'une des moitiés de la surface de l'hyperboloïde, et que, de toute façon, le point M doit se trouver du même côté de l'axe des x_3 que le sommet O.

Il en résulte que l'angle $\frac{r}{\mathrm{A}}$ doit être compris entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$ dans une direction quelconque de l'espace autour du point O.

D'autre part, la formule (40 *b*) exprimant le rapport entre les indications de deux horloges installées dans deux points d'Univers différents, montre que dans l'Univers de De Sitter le temps statique est en réalité une fonction de la distance r. En ce qui concerne l'Univers dans son ensemble cette solution est statique seulement en apparence, car on peut, au moyen de la formule (40 *b*), établir une relation entre les coordonnées r et t d'un point de l'espace et considérer f comme une fonction de t, au lieu de r.

Mais le fait le plus important est le suivant: Les équations cosmologiques d'Einstein ont une solution compatible avec l'hypothèse d'un espace vide de matière, donc une solution qui est en contradiction avec le principe de Mach.

En utilisant l'expression (35 *a*) de l'invariant quadratique et en y éliminant dx_3 au moyen de l'équation de l'hyperboloïde on obtient la forme quadratique suivante des différentielles dx_1 et dx_2:

$$ds^2 = -\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2 dx_1^2 - 2\frac{1 - x_1 x_2}{x_3^2}\, dx_1\, dx_2 - \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 dx_2^2 \,.$$

Si dans cette formule on pose: $x_3 = \pm\infty$ on passe aux limites extrêmes de la portion de l'hyperboloïde qui, par suite de la propagation de la lumière, est en relation avec un point d'Univers déterminé. Dans ces points « les plus éloignés » de l'espace pour lesquels $r = \frac{\pi A}{2}$ on a:

$$g_{ik} = 0 \,.$$

Cette conséquence, comme le fait observer J. Becquerel [1], est très satisfaisante. Quoique l'espace de De Sitter soit sphérique, il se comporte comme un espace elliptique, puisque aux limites $r = \frac{\pi A}{2}$ la vitesse de la lumière devient nulle; aussi l'existence des anti-soleils et des anti-étoiles est-elle exclue par la structure hyperbolique de l'Univers.

Il n'en est pas moins vrai que cette conception est en contradiction avec le principe de Mach postulé par Einstein [2]. Si

[1] J. Becquerel, *l. c.*
[2] A. Einstein, *l. c.*

nous plaçons dans l'Univers de De Sitter, complètement vide de matière, un seul corps, celui-ci se trouvera soumis au champ métrique de la multiplicité qui provient ici uniquement de la constante cosmologique λ; mais il n'y a plus de relation entre cette constante et un contenu matériel quelconque de l'espace.

Cette contradiction est-elle irrémédiable ? Je ne puis le croire.

La solution de De Sitter prouve en tout cas cette propriété importante des équations cosmologiques de garantir l'existence d'un espace fermé, même si $T_{ik} = 0$. La présence de la matière aurait alors pour effet de modifier la courbure primordiale, et, de même que dans la théorie primitive de Newton, il y aurait deux causes différentes, dont l'une géométrique, l'autre matérielle, produisant des effets analogues.

Si l'on veut échapper à cette conséquence difficilement conciliable avec l'idée fondamentale de la relativité, il ne reste qu'un moyen: il faut supposer que la constante cosmologique λ n'est pas une grandeur de même nature que les g_{ik} et les R_{ik}. Il n'est pas dit que la courbure ne puisse pas être un effet de la matière, même si, par hypothèse, on a exclu la matière de l'espace. Il ne faut pas oublier, en effet, que la théorie de De Sitter moins encore que celle d'Einstein, ne peut prétendre à être une théorie complète. Dans la théorie d'Einstein on fait abstraction seulement du mouvement de la matière, dans celle de De Sitter on fait abstraction de la matière elle-même.

La constante cosmologique λ n'est donc pas nécessairement, si l'on adopte la théorie de De Sitter, une simple grandeur géométrique. Elle doit avoir une signification qui est en relation avec la matière, mais cette relation elle-même est peut-être inaccessible aux théories actuelles.

Peut-être est-ce trop de demander à la théorie de la relativité qu'elle fournisse à elle seule non seulement les lois de la gravitation qui déterminent les courbures locales, mais aussi la raison profonde de la courbure générale qui, dans la théorie de De Sitter, n'est pas mise en relation avec la matière présente.

L'observation pourrait, en principe, trancher entre les théories de l'Univers cylindrique et hyperbolique. En effet, si

nous appliquons les considérations données à la fin du chapitre II aux relations intérieures de l'Univers hyperbolique, exprimées par la formule (40 *b*), nous constatons qu'une raie du spectre d'une étoile doit être déplacée vers le rouge vis-à-vis de la raie terrestre correspondante, et cela d'autant plus que l'étoile est plus éloignée de la Terre.

Soit λ_0 la longueur d'onde correspondant à la période ds observée sur la Terre, la longueur d'onde de la même raie produite par une source terrestre, on a:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{ds}{ds'} = 1 + \operatorname{tg}\frac{r}{A}.$$

D'où:

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \operatorname{tg}\frac{r}{A}. \tag{41}$$

Or il semble, selon les chiffres cités par J. Becquerel[1], que les nébuleuses spirales les plus éloignées qui ont été observées fournissent, pour la plupart, des raies spectrales déplacées vers le rouge. Dans deux cas ce déplacement est même très considérable.

Les données actuelles sont du reste trop incertaines, en ce qui concerne les distances et les mouvements de ces corps, pour qu'on puisse arriver à une conclusion précise.

Comme nous venons de le voir, la théorie de la relativité générale a apporté des idées nouvelles permettant d'aborder d'un nouveau point de vue le problème astronomique de la structure du Cosmos. Elle a permis de formuler avec précision des questions qui antérieurement n'ont pu être posées que d'une façon très vague. Si elle ne conduit pas à une solution du problème entièrement satisfaisante, elle a tout au moins limité le nombre des réponses possibles, et elle indique de plus un moyen permettant de trancher, par l'observation, entre les théories qui semblent le mieux répondre aux connaissances actuellement acquises.

[1] J. Becquerel, *l. c.*