Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 4 (1922)

Artikel: Recherches sur les pertes dans le fer aux fréquences élevées par hystérésis et courants de Foucault

Autor: Brasey, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741959

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

RECHERCHES

SUR LES

PERTES DANS LE FER AUX FRÉQUENCES ÉLEVÉES

PAR HYSTÉRÉSIS ET COURANTS DE FOUCAULT

PAR

E. BRASEY

Avec 3 fig.

Introduction.

Les recherches sur la perméabilité et la dissipation d'énergie par cycle d'hystérésis, en courant alternatif, peuvent se classer en trois groupes:

1° Celles, et ce sont les premières en date, dans lesquelles il semble qu'on se soit préoccupé insuffisamment ou même pas du tout des courants de Foucault; les résultats en sont peu concordants.

2° Celles dans lesquelles on a, soit évalué, soit calculé les pertes par courants de Foucault pour les retrancher des pertes mesurées; l'incertitude du calcul rend les résultats fort imprécis.

3° Celles, enfin, plus récentes où, par une série d'essais sur du fer de plus en plus divisé on détermine expérimentalement l'état de division pour lequel, après une décroissance continue, l'action des courants de Foucault devient négligeable; ces dernières (Maurain, Guye et Herzfeld), qui s'étendent jusqu'à la fréquence 1200, concordent et établissent que l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis est indépendante de la fréquence.

Le présent travail est l'exposé de recherches entreprises dans le domaine de fréquences 4000 — 10 000 et que nous avons reliées aux travaux précédents et aux données obtenues en

courant continu, par une série de mesures entre les fréquences 400 et 600. Ces dernières servent en même temps de justification de la méthode employée.

Nous ne nous sommes pas préoccupé de diminuer l'importance des courants de Foucault. Nous nous sommes placé plutôt dans un cas où les pertes par courants de Foucault sont environ du même ordre de grandeur que les pertes par hystérésis et nous avons essayé d'en déterminer par le calcul, la somme, en fonction de l'amplitude de l'induction résultante, pour la comparer aux résultats expérimentaux.

I

Exposons brièvement les méthodes employées dans les études antérieures.

Les premiers travaux en date, ceux de Warburg et Hoenig[1], de Borgmann[2], de Tanakadaté[3], de Evershed et Vignoles[4] consistent à mesurer par une méthode calorimétrique la quantité d'énergie transformée en chaleur dans un noyau soumis à un champ alternatif rapide, la quantité d'énergie dépensée dans une variation lente étant mesurée par l'aire de la courbe d'aimantation. Les résultats sont peu concordants; on peut attribuer les divergences observées 1° aux erreurs que comporte la mesure calorimétrique proprement dite, 2° au fait qu'on néglige l'importance des courants induits; on peut se demander aussi si toute l'énergie dissipée dans l'aimantation se retrouve bien dans la mesure calorimétrique.

M. Wien[5], par la comparaison d'une self sans fer et d'un électro-aimant dont le bobinage est identique trouve jusqu'à la fréquence 520 que l'énergie dissipée par cycle augmente avec la fréquence pour un champ donné; la précision des résultats

[1] Warburg et Hoenig. *Wied. Ann.*, t. XX, p. 814, 1883.

[2] J. Borgmann. *Journal de la Soc. Physico-chimique russe*, t. XIV, p. 67, 1882. *Journal de Ph.* (2), t. II, p. 574, 1883.

[3] Tanakadaté. *Phil. mag.* (5), t. XXVIII, p. 207, 1889.

[4] Evershed et Vignoles. *The Electrician*, t. XXIX, p. 583 et 605, 1892.

[5] M. Wien. *Wied. Ann.*, t. LXVI, p. 859, 1898.

est assez difficile à juger en raison du calcul compliqué qu'introduisent les harmoniques du courant employé dans l'interprétation des résultats expérimentaux et l'évaluation de l'énergie dissipée par courants induits.

Steinmetz [1], dans un cas où les courants induits ne sont pas négligeables trouve, par la méthode du wattmètre, une augmentation de l'énergie dissipée par cycle, avec la fréquence. L'incertitude du calcul des courants de Foucault rend le résultat peu sûr.

Gray [2], par la même méthode, trouve qu'aux fréquences 50 à 130 l'énergie dissipée reste la même.

Maurain [3] se sert d'une méthode de détermination par points de Hopkinson. Il trouve que, dans un noyau plein, en raison des courants de Foucault, l'énergie totale dissipée est plus faible qu'en courant continu; l'écart observé diminue si le tore est constitué par du fil de fer et enfin arrive à être nul pour du fil suffisamment fin. La manière continue dont il atteint ce dernier résultat montre bien qu'à ce moment-là les courants de Foucault sont négligeables et que l'énergie dissipée par cycle — qui est trouvée indépendante de la fréquence — est celle dissipée par hystérésis.

Guye et Herzfeld [4] forment de deux fils de fer identiques un bolomètre, dont l'un des bras soumis à l'action d'un champ alternatif à haute fréquence, est le siège d'une dissipation d'énergie et prend, en raison de sa petitesse, presque instantanément une nouvelle température stationnaire. Ils démontrent que la déviation du galvanomètre est proportionnelle à l'énergie dissipée.

D'essais faits jusqu'à la fréquence 1200 sur du fil fin de 0,0038 cm de diamètre, ils tirent la conclusion que les pertes par cycles d'hystérésis sont indépendantes de la fréquence. Des recherches entreprises par Guye et Schidlof [5] par le même pro-

[1] STEINMETZ. *Trans. of the Amer. Inst. of el. eng.*, t. IX, p. 8, 1892.
[2] H. GRAY. *Proc. Roy. Soc.*, London, t. LVI, p. 48, 1894.
[3] CH. MAURAIN. *Ann. de Ch. et de Ph.* (7), t. XIV, p. 254, 1898. *Journal de Ph.* (3), t. VII, p. 461, 1898.
[4] GUYE et HERZFELD. *C. R.*, 20 avril 1903. *Arch.* (4), vol. XIV, p. 380, 1902.
[5] GUYE et SCHIDLOF, *Arch.* (4), vol. XVIII, p. 576, 1904.

cédé, par Schidlof et Chamié[1], Ch.-E. Guye et Albert[2], Schidlof et Albert[3] sur le même échantillon de fer et aux mêmes fréquences, par la méthode de l'électromètre-wattmètre, confirment ce résultat.

Méthode employée.

La méthode expérimentale employée est celle du wattmètre électrique. D'autre part, pour rendre le problème accessible au calcul, nous avons cherché à obtenir un flux d'aimantation sinusoïdal et par conséquent, d'après la formule de Maxwell, une tension sinusoïdale. Le travail expérimental consiste à mesurer les pertes totales dans le fer et l'amplitude maximum de l'induction qui leur correspond.

Le fer à étudier constitue un tore composé de fils isolés et muni d'un enroulement magnétisant.

Les mesures de puissance ont été effectuées au moyen d'un wattmètre thermique à haute fréquence qui nous servait en même temps de voltmètre et dont on trouvera ailleurs[4] le principe et la description.

Les valeurs lues pour la puissance W et la tension E doivent être débarrassées des éléments correspondant à la chaleur de Joule dissipée dans le cuivre w et à la chute de tension e relative à cette énergie. Un calcul très simple permet de les éliminer.

L'induction magnétique est reliée à la tension par la formule de Maxwell:

$$e = - \mathrm{N} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cdot 10^{-8} = - s \cdot \mathrm{N} \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \cdot 10^{-8}$$

f désignant le nombre de spires et s la section du fer.

En notant $e = \mathrm{E_M} \sin \omega t$, on trouve par intégration

$$\mathfrak{B} = - \frac{\mathrm{E_M} \cos \omega t}{\mathrm{N} \cdot s \cdot \omega} \cdot 10^8$$

$$\mathfrak{B}_\mathrm{M} = - \frac{\mathrm{E_M}}{\mathrm{N} \cdot s \cdot \omega} \cdot 10^8$$

[1] A. Schidlof et Mlle C. Chamié. *Arch.* (4), vol. XXXVI, p. 13, 1913.

[2] Ch.-Eug. Guye et Mlle A. Albert. *Arch.* (4), vol. XXXVII, p. 20, 1914.

[3] Schidlof et Mlle A. Albert. *Arch.*, (4), vol. XXXVII, p. 117, 1914.

[4] P. Joye et E. Brasey. Wattmètre pour haute fréquence. *Bull. Soc. Suisse Electr.* $\mathrm{N}_{0,4}$. 1922.

Nous avons aussi

$$\mathfrak{B}_M = \frac{E \text{ eff } \sqrt{2}}{N \cdot s \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot 10^8$$

f désignant la fréquence et enfin

$$\mathfrak{B}_M = \frac{E \text{ eff}}{4{,}443 \cdot f \cdot N \cdot s} \cdot 10^8$$

Aux fréquences élevées, en raison de l'effet des courants de Foucault, l'induction n'est pas uniforme dans le conducteur magnétique; la formule précédente relie à la tension efficace l'amplitude maximum d'une certaine induction ainsi définie: elle est la résultante des valeurs de l'induction dans chacune des couches cylindriques qui vont de la périphérie au centre du fil de fer.

Les courbes théoriques.

Des travaux de Maurain[1] et de ceux de Guye, Herzfeld[2] et Schidlof il ressort avec netteté que, dans l'intervalle de fréquence de 300 à 1200, la perméabilité et l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis sont indépendantes de la fréquence à condition que dans le fer suffisamment divisé l'action des courants de Foucault soit négligeable. Le calcul de nos courbes théoriques suppose que cette indépendance est maintenue aux fréquences 1200 à 10 000 et admet que, dans le domaine que nous venons d'indiquer, la perméabilité et l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis sont les mêmes qu'en courant continu.

Lorsque le conducteur magnétique est un fil de diamètre tel que l'action des courants de Foucault n'est plus négligeable, les hypothèses posées ne peuvent s'appliquer qu'à des couches *infiniment minces.* Le fil est alors décomposé en cylindres infiniment minces de même axe et de rayons décroissants. Chacun de ces cylindres est le siège de courants de Foucault dus à la variation du flux dans la portion de fil qu'il recouvre. A leur tour, les courants de Foucault créent un champ qui s'oppose, — mais avec un certain décalage, dû à la dissipation

[1] *Loc. cit.*
[2] *Loc. cit.*

d'énergie — au champ qui leur a donné naissance. En passant de la surface à l'intérieur du fil, les champs produits dans chacun des cylindres par les courants de Foucault se composent et diminuent l'aimantation[1].

L'étude théorique déterminera en premier lieu la loi suivant laquelle s'effectue la décroissance de l'aimantation en fonction de la profondeur. On en déduira par intégration une formule donnant le flux résultant, valeur accessible à l'expérience, puis par les formules d'induction, les pertes par courant de Foucault.

La valeur des pertes par hystérésis sera le produit de la fréquence par la dissipation d'énergie d'un *cycle moyen* qui tienne compte de l'inégalité de l'aimantation dans le fil. En effet, pour un champ alternatif donné, l'amplitude maximum de l'aimantation et par conséquent l'énergie dissipée par hystérésis diminuent à mesure qu'on se rapproche du centre du fil. Nous pouvons définir la surface du « cycle moyen » comme la moyenne arithmétique des surfaces cycliques d'aimantation pour toutes les couches allant de la périphérie au centre du fil. Les formules établies permettent de construire la courbe de l'amplitude maximum d'aimantation en fonction de la profondeur. On aura, d'autre part, établi la courbe en courant continu des pertes par hystérésis en fonction de l'induction maximum. On en déduit facilement la courbe de l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis en fonction du carré de la distance au centre du fil, valeur proportionnelle à la surface utilisée par le flux.

Les résultats expérimentaux donnent les pertes par courants de Foucault et par hystérésis sous forme d'une somme qu'on ne peut pas décomposer.

Pour comparer les résultats expérimentaux et les résultats théoriques, on réunira donc en une seule courbe les pertes par courants de Foucault et les pertes par hystérésis qui auront été obtenues théoriquement en fonction de l'amplitude maximum de l'induction.

[1] Jusqu'à la faire changer de sens (voir plus loin).

Distribution du flux magnétique alternatif dans un conducteur en fer et énergie dissipée par courants de Foucault.

Steinmetz[1] résoud le problème de la distribution du flux magnétique dans une tôle de fer en admettant que la perméabilité du fer est constante. Cette supposition, imposée par la difficulté d'exprimer analytiquement la courbe vierge d'aimantation, fait donner aux formules obtenues pour l'induction résultante et les pertes par courants de Foucault des résultats très approximatifs dus à l'incertitude dans le choix d'une perméabilité moyenne. On peut obtenir une plus grande précision en assimilant la courbe vierge d'aimantation à une ligne brisée et en exprimant l'induction par la formule $\mathfrak{B} = a_i + \nu_i \mathfrak{H}$ où a_i et ν_i sont des valeurs différentes pour chaque segment rectiligne de la ligne brisée.

Si l'on reprend dans ces conditions le calcul de répartition du flux, le terme a_i disparaît dans la différentiation de $\mathfrak{B}$ et la perméabilité μ est simplement remplacée par ν_i qui exprime la pente de la courbe d'aimantation, la formule obtenue n'étant cette fois valable que pour le segment de ligne brisée auquel correspond la constante ν_i.

L'application de cette formule est évidemment moins simple que celle de la formule approximative: l'induction à la périphérie, $\mathfrak{B}_0$, étant connue par la valeur du champ, on devra d'abord chercher à quelle profondeur l'induction tombe à la valeur $\mathfrak{B}_1$, premier point de la brisure de la « courbe brisée »; une nouvelle application de la formule avec la seconde valeur de V_i et $\mathfrak{B}_1$, indiquera la profondeur pour laquelle l'induction tombe à la valeur $\mathfrak{B}_2$ du second point de brisure. On est ainsi conduit à diviser le conducteur en « zones » concentriques et nous n'arrivons à connaître l'induction au centre qu'après avoir déterminé par « zones » la pénétration du flux d'induction dans le conducteur entier. On voit immédiatement qu'il est impossible de donner une formule soit pour l'induction moyenne (si ce

[1] STEINMETZ. Théorie et calculs des phénomènes électriques de transition et des oscillations. (Traduit de l'anglais par P. Bunet, p. 368).

n'est par zones), soit pour l'induction au centre, soit enfin pour la profondeur de pénétration.

Distribution du flux magnétique alternatif.

1° Dans un *conducteur cylindrique*[1].

Prenons, comme point de départ, les équations fondamentales de HERTZ-MAXWELL.

$$\text{(I)} \quad \int \mathfrak{h}\, dl = 4 \,.\, \pi \,.\, \int\int i \,.\, dS$$

$$\text{(II)} \quad \int e\, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int\int \mathfrak{b} \,.\, dS$$

e = f. e. m induite par unité de longueur donnant naissance aux courants de Foucault.

i = densité des courants de Foucault.

L'équation (I) s'applique à la section longitudinale et l'équation (II) à la section transversale. Introduisons les unités pratiques (volt-amp.) et notons λ = conductibilité électrique, ν défini par $\mathfrak{B} = \nu \mathfrak{H} + a$

$$\int \mathfrak{h} \,.\, dl = \mathfrak{h}_{x+dx} - \mathfrak{h}_x = \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x} \,.\, dx$$

$$\int\int i \,.\, dS = e \,.\, \lambda \,.\, dx$$

l'équation (I) devient

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x} = 0{,}4\, \pi \,.\, \lambda \,.\, e$$

l'équation (II) devient

$$2 \,.\, \pi \,.\, x \,.\, e = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x 2 \,.\, \pi \,.\, x \,.\, \mathfrak{b} \,.\, dx\, 10^{-8}$$

$$\frac{\partial (x \,.\, e)}{\partial x} = -\frac{\partial (x \,.\, \mathfrak{b})\, 10^{-8}}{\partial t}$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial (x \,.\, e)}{\partial x} = -x \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t} 10^{-8} \,.$$

[1] On trouve dans WINCKELMANN, *Handbuch der Physik*, B. V, II. Aufl., II. Teil, p. 600, un développement analogue à celui qui suit à propos de la distribution du courant alternatif dans un conducteur cylindrique.

Dans le domaine d'une « zone », l'équation $\mathfrak{b} = a_i + \nu_i \mathfrak{h}$ a ses deux paramètres bien déterminés; désignons les par a et ν.

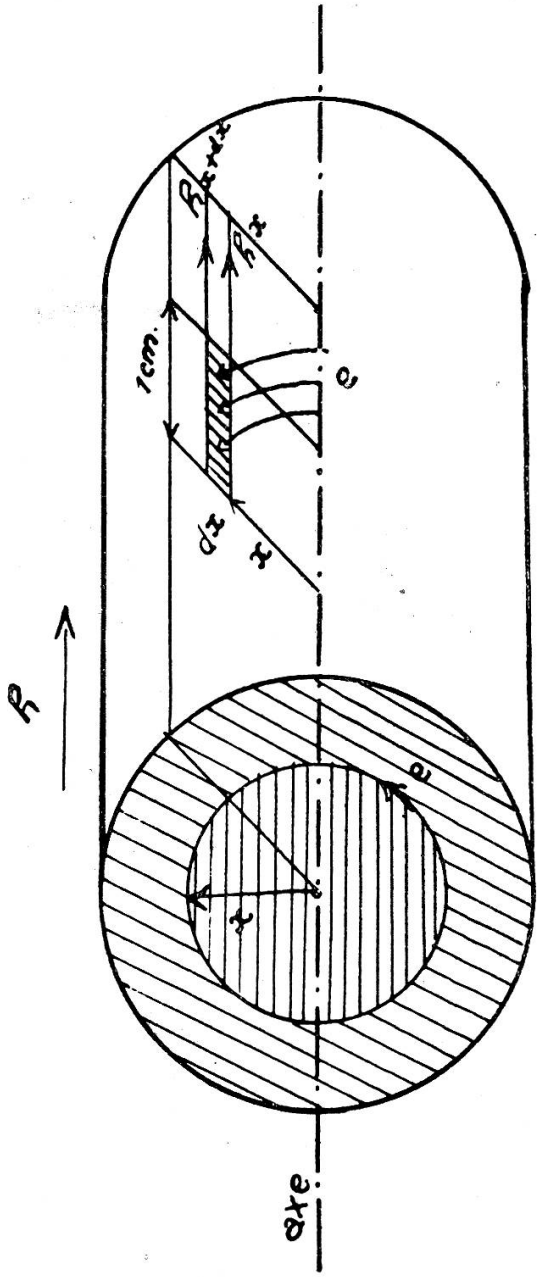


Fig. 1.

Nous tirons de là $\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial x} = \nu \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial x}$. L'équation (1) s'écrit

$$(1') \qquad \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial x} = 0{,}4 \,.\, \pi \,.\, \lambda \,.\, \nu \,.\, e \;.$$

Si la force électromotrice appliquée est sinusoïdale, $\mathfrak{b}$ l'est aussi.

Nous pouvons écrire $\mathfrak{b} = \mathfrak{B}.\varepsilon^{j.\omega.t}$ où $\mathfrak{B}$ l'amplitude maximum de l'induction est encore fonction de x.

On a de même $e = \mathrm{E}\,\varepsilon^{j.\omega.t}$.

L'équation (2) devient:

$$\frac{\partial(xe)}{\partial x} = -j.\omega.\varepsilon^{j.\omega.t}\,\mathfrak{B}.x.10^{-8}$$

(2′)

$$\frac{\partial(xe)}{\partial x} = -j.\omega.\mathfrak{b}.x.10^{-8}\ .$$

Les équations (1′) et (2′) sont indépendantes de t; $\mathfrak{b}$ et e étant sinusoidales, nous pouvons passer aux valeurs des amplitudes qui sont uniquement fonctions de x.

Posons

$$0{,}4.\pi.\lambda.\nu = b_1^2$$

et

$$\omega.10^{-8} = 2.\pi.f.10^{-8} = b_2^2$$

(I′)
$$\frac{d\mathfrak{B}}{dx} = b_1^2.\mathrm{E}$$

(II′)
$$\frac{d(x.\mathrm{E})}{dx} = -j.b_2^2\mathfrak{B}x\ .$$

Developpons II′

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx} + \frac{\mathrm{E}}{x} = -j.b_2^2.\mathfrak{B}\ .$$

De (1′) nous tirons

$$\frac{\mathrm{E}}{x} = \frac{1}{b_1^2}.\frac{1}{x}.\frac{d\mathfrak{B}}{dx}$$

$$\frac{d\mathrm{E}}{dx} = \frac{1}{b_1^2}.\frac{d^2\mathfrak{B}}{dx^2}$$

En notant $b^2 = b_1.b_2$, nous arrivons à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\mathfrak{B}(x)}{dx} + \frac{1}{x}.\frac{d\mathfrak{B}(x)}{dx} + j.b^2.\mathfrak{B}(x) = 0\ .$$

Effectuons le changement de coordonnées $x = \frac{y}{\mu}$. L'équation devient alors

$$\mu^2 \frac{d^2 . \mathfrak{B}\left(\frac{y}{\mu}\right)}{dy^2} + \frac{\mu^2}{y} . \frac{d\,\mathfrak{B}\left(\frac{y}{\mu}\right)}{dy} + j . b^2 . \mathfrak{B}\left(\frac{y}{\mu}\right) = 0 .$$

Pour $\mu = b . \sqrt{j}$, cette équation se ramène à l'équation de BESSEL

$$\frac{d^2 \mathfrak{B}(y)}{dy^2} + \frac{1}{y} . \frac{d\,\mathfrak{B}(y)}{dy} + \mathfrak{B}(y) = 0$$

dont la solution est

$$\mathfrak{B} = \mathrm{A} . \mathrm{I}_0(y) = \mathrm{A} . \mathrm{I}_0(\sqrt{j} . b . x)$$

où $\mathrm{I}_0(\sqrt{j} . b . x)$ est défini par le développement

$$\left\{ 1 - \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^4}{2!^2} + \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^8}{4!^2} - \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^{12}}{6!\,2} + \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^{16}}{8!^2} - \dots \right\}$$

$$- j \left\{ \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^2}{1!^2} - \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^6}{3!^2} + \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^{10}}{5!^2} - \frac{\left(\frac{bx}{2}\right)^{14}}{7!^2} + \dots \right\}$$

Déterminons la constante A.

Pour $x = r_0$ on a $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{B}_0$ désignant l'induction à la périphérie du fil, $\mathfrak{B}_0 = \mathrm{A} . \mathrm{I}_0 (\sqrt{j} . b . r_0)$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \frac{\mathrm{I}_0(\sqrt{j} . b . x)}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j} . b . r_0)}$$

qui est la *formule de distribution.*

Valeur absolue et phase de $\mathfrak{B}$

Désignons par $\mathrm{R}_0 (\sqrt{j} b x)$ et $\mathrm{J}_0 (\sqrt{j} b x)$ les composantes réelles et imaginaires[1] de $\mathrm{I}_0 (\sqrt{j} b x)$ qui s'écrit alors:

$$\mathrm{I}_0(\sqrt{j} b x) = \mathrm{R}_0(\sqrt{j} b x) + j \mathrm{J}_0(\sqrt{j} b x)$$

[1] Ce sont les fonctions ber et bei de lord Kelvin.

et dont la valeur absolue est

$$|I_0(\sqrt{j}\,b\,x)| = \sqrt{R_0^2(\sqrt{j}\,b\,x) + J_0^2(\sqrt{j}\,b\,x)}$$

La valeur absolue de $\mathfrak{B}$ est donnée par:

$$|\mathfrak{B}| = \sqrt{\frac{R_0^2(\sqrt{j}\,b\,x) + J_0^2(\sqrt{j}\,b\,x)}{R_0^2(\sqrt{j}\,b\,r_0) + J_0^2(\sqrt{j}\,b\,r_0)}}$$

En posant

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{J_0(\sqrt{j}\,b\,x)}{R_0(\sqrt{j}\,b\,x)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{J_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)}{R_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)}$$

φ exprime le décalage de $\mathfrak{B}$ par rapport à l'induction au centre du fil, $\mathfrak{B}_c$ et φ_0 le décalage de $\mathfrak{B}_0$ par rapport à $\mathfrak{B}_c$, mais seulement lorsque $\mathfrak{B}_c$ appartient au même segment de la courbe d'aimantation que $\mathfrak{B}_0$.

La différence

$$\varphi - \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{J_0(\sqrt{j}\,b\,x)}{R_0(\sqrt{j}\,b\,x)} - \operatorname{arc.\,tg}\frac{J_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)}{R_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)}$$

que nous désignerons dorénavant par $\varphi(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_0)$ représente le décalage de $\mathfrak{B}$ par rapport à $\mathfrak{B}_0$. Notons que $\varphi - \varphi_0$ n'a de sens que dans l'intervalle d'une zone. Les décalages entre points appartenant à des zones différentes ne peuvent s'obtenir que de proche en proche.

Induction résultante d'une « Zone ».

Soit

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \frac{I_0(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)}{I_0(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r_0)}\,,$$

l'induction en un point d'une zone limitée aux rayons r_0 et r_1 $(r_0 > r_1)$, $\mathfrak{B}_0$ désignant l'induction à la périphérie de la zone (à une distance r_0 du centre) et la distance du point considérée

au centre du conducteur. L'induction résultante de la zone est

$$\mathfrak{B}_{0,1} = \frac{1}{\pi(r_0^2 - r_1^2)} \int_{r_1}^{r_0} 2 \,.\, \pi \,.\, x \mathfrak{B} \,.\, dx = \frac{2 \,.\, \mathfrak{B}_0}{(r_0^2 - r_1^2)} \frac{\int x \,.\, \mathrm{I}_0(\sqrt{j} \,.\, b \,.\, x) \,.\, dx}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j} \,.\, b \,.\, r_0)} \,.$$

On a la formule

$$\int x \,.\, \mathrm{I}_0(x) \,.\, dx = x \,.\, \mathrm{I}_1(x) \,.$$

Comme les tables donnent les valeurs de $\sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1(\sqrt{j} \,.\, b \,.\, x)$ nous noterons finalement, après transformation:

$$\mathfrak{B}_{0,1} = \frac{\mathfrak{B}_0}{(r_0^2 - r_1^2)} \,.\, \frac{1 - j}{b} \,.\, \frac{\left[x \,.\, \left\{\sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1(\sqrt{j} \,.\, b\, x)\right\}\right]_{r_1}^{r_0}}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j} \,.\, b \,.\, r_0)} \,.$$

Lorsque l'induction dans tout le fil appartient à *une seule zone*, on a $r_1 = 0$ et $\mathrm{I}_1(r_1) = 0$ et la formule précédente se réduit à

$$\mathfrak{B}_{0,1} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b r_0}(1 - j) \frac{\sqrt{2}\, \mathrm{I}_1(\sqrt{j}\, b\, r_0)}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j} \,.\, b \,.\, r_0)} \,.$$

Comme il n'y a pas à se préoccuper du décalage, on calcule immédiatement

$$|\mathfrak{B}_{0,1}| = \frac{\mathfrak{B}_0 \sqrt{2}}{b \,.\, r_0} \frac{|\sqrt{2}\, \mathrm{I}_1(\sqrt{j}\, b\, r_0)|}{|\mathrm{I}_0(\sqrt{j}\, b\, r_0)|} \,.$$

Si l'induction dans le fil appartient à *plusieurs zones*, l'induction résultante sera la composante vectorielle des flux de chaque zone, divisée par $\pi\, r_0^2$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{r_0^2} \sum (r_i^2 \,.\, r_{i+1}^2)\, \mathfrak{B}_{i,\, i+1} \,.$$

On calculera donc dans ce cas pour chaque zone non pas les

$\mathfrak{B}_{i,i+1}$, mais les

$$(r_i^2 - r_{i+1}^2)\,\mathfrak{B}_{i,i+1} = \frac{\mathfrak{B}_i}{b}(1-j)\frac{\left[x\left\{\sqrt{2}\,I_1(\sqrt{j}\,b\,x)\right\}\right]_{r_{i+1}}^{r_i}}{I_0(\sqrt{j}\,b\,r_i)}$$

dont on aura à déterminer la valeur absolue, le décalage et ensuite la résultante.

Courants de Foucault.

La puissance consommée par unité de longueur dans un tube cylindrique d'épaisseur dx et de rayon x est

$$(2\,.\,\pi\,.\,x\,.\,\mathrm{E\ eff})^2\,.\,\frac{\lambda\,.\,dx}{2\,.\,\pi\,.\,x} = 2\,.\,\pi\,.\,\lambda\,.\,x\,.\,\mathrm{E}_{\mathrm{eff}}^2\,.\,dx\ .$$

Si nous considérons un tube coïncidant avec une « zone » définie plus haut, la puissance qui est y consommée par unité de longueur est

$$w_{0,1} = 2\,.\,\pi\,.\,\lambda\,.\int_{r_1}^{r_0} \mathrm{E}_{\mathrm{eff}}^2\,.\,x\,.\,dx\ .$$

La somme des w obtenus pour les différentes zones, divisée par $\pi.r_0^2$ nous donne les pertes par cm³.

Calcul de E, force électromotrice des courants de Foucault.

Nous tirons de (I')

$$\mathrm{E} = \frac{1}{b_1^2}\,.\,\frac{d\mathfrak{B}}{dx}\ .$$

En introduisant la valeur de $\mathfrak{B}$ et en observant que

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = -\,I_1(x)$$

on obtient:

$$-\,\mathrm{E} = \frac{b_2\sqrt{j}}{b_1}\,.\,\mathfrak{B}_0\,.\,\frac{I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)}{I_0(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r_0)}\ .$$

Pour une forme sinusoïdale,

$$E^2_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b_1}\right)^2 \mathfrak{B}_0^2 \frac{|I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)|^2}{|I_0(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r_0)|^2}$$

d'où enfin

$$w_{0,1} = \pi\,.\,\lambda\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \mathfrak{B}_0^2 \frac{\int_{r_1}^{r_0} |I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)|^2\,.\,x\,.\,dx}{|I_0(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r)|^2}$$

Développement de $|I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)|^2$.

Le carré de la valeur absolue obtenu en faisant la somme des carrés des composantes réelle et imaginaire est de la forme

$$|I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)|^2 = \frac{b^2\,.\,x^2}{8}\,.\,2$$

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{bx}{2}\right)^{4n} \frac{1}{n!^2(n+1)!^2}\,\frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,\ldots\,n(n+1)}{6\,.\,10\,.\,14\,.\,18\,\ldots\,(4n+2)}\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{bx}{2}\right)^{4n+2} \frac{1}{n!\,(n+1)!\,(2n+1)!}$$

$$\int |I_1(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,x)|^2\,x\,.\,dx = \frac{1}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{bx}{2}\right)^{4n+4} \frac{1}{(n+1)!^2(2n+1)!}$$

que nous désignerons, pour simplifier, par

$$\frac{1}{b^2}\,.\,B(bx)$$

d'où

$$w_0 = \frac{\pi\,.\,\lambda\,\frac{1}{b_1^4}\,.\,\mathfrak{B}_0^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{bx}{2}\right)^{4n+4}\frac{1}{(n+1)!^2(2n+1)!}\right]_{r_1}^{r_0}}{|I_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)|^2}$$

$$= \frac{\frac{\pi\,.\,\lambda}{b_1^4}\,.\,\mathfrak{B}_0^2\left[B(bx)\right]_{r_1}^{r_0}}{|I_0(\sqrt{j}\,b\,r_0)|^2}$$

II

Tables des fonctions $I_0(x\sqrt{j})$, $|I_0(x\sqrt{j})|$, $\sqrt{2}\, I_1(x\sqrt{j})$, $B(x)$.

On trouve des tables des fonctions $I_0(x\sqrt{j})$ et $\sqrt{2}.I_1(x\sqrt{j})$ pour des valeurs de x comprises entre 0,1 et 6 dans Jahnke und Emde, Funktionentafeln (p. 137, 138) et dans Proc. Roy. Soc. London, 66 p. (42-43), 1900. St. Aldis.

L'intervalle de deux valeurs consécutives de x est de 0,1. La forme exponentielle de ces fonctions fait que l'interpolation rectiligne est inexacte entre des valeurs aussi écartées. Pour éviter un calcul fastidieux d'interpolation, nous avons préféré établir de nouvelles tables dans lesquelles l'intervalle est de 0,02. Ces tables ont été vérifiées 1° par comparaison avec les tables citées, puis pour les valeurs intermédiaires, par la méthode des différences successives. Il suffit pour la pratique de connaître 4 et même 3 décimales. En poussant à la limite l'utilisation de la machine à calcul dont nous disposions pour ce travail, nous sommes arrivé à connaître la 7me décimale à l'unité près environ.

Les conditions d'expériences donnent 3,5 pour la valeur maximum de $b.r_0$. Nous nous sommes contenté de pousser nos calculs jusqu'à $x = 4{,}6$.

Aux deux tables indiquées: $I_0(x\sqrt{j})$ et $\sqrt{2}\, I_1(x\sqrt{j})$ sont jointes celle de la valeur absolue de $I_0(x\sqrt{j})$, très utile pour la détermination des zones, et enfin celle de la fonction

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+4} \frac{1}{(n+1)!^2\,(2n+1)!}$$

introduite dans les pertes par courants de Foucault.

III

Dispositif expérimental.

Le courant employé est fourni par un alternateur à fer tournant denté[1] entraîné par un moteur à courant continu dont on peut faire varier la vitesse de rotation entre 1200 et 3000 tours à la minute. Le nombre de dents étant de 200, la fréquence du courant produit s'étendra de 4000 à 10 000. Cet alternateur construit par la C^le^ de l'Industrie électrique, à Genève, comprend comme partie fixe un noyau cylindrique dans lequel le bobinage excitateur crée un champ parallèle à l'axe de la machine. Ce noyau se prolonge par un cylindre denté, de plus grand diamètre, dans lequel les lignes de force magnétique s'épanouissent, suivant ainsi le chemin de réluctance minimum qui est créé par le fer tournant. Un conducteur isolé passe d'une encoche à l'autre enfermant dans une boucle simple les 400 dents du cylindre qui forme ainsi l'induit fixe de la machine.

Le fer tournant est une cloche dont la paroi intérieure, cylindrique, est entaillée de 200 dents; successivement elles ferment le circuit magnétique sur une encoche, puis sur la dent voisine, produisant ainsi dans chaque spire la f. e. m. d'induction. La tension aux bornes est 200 volts et l'intensité maximum 8 ampères.

La haute fréquence du courant ne permettait pas de vérifier à l'oscillographe si la courbe de tension est sinusoïdale.

Des essais ont été faits par la méthode de résonance de Pupin[2] pour déceler les harmoniques éventuels. Ils ont permis de constater que l'amplitude des 11 premiers harmoniques est négligeable pour une excitation poussée jusqu'à 0,6 amp., valeur maximum que nous avons utilisée.

Cette même méthode a permis de vérifier l'exactitude du compteur de tours en connaissant la capacité et la self du circuit de résonance.

[1] Décrit par Ch.-Eug. Guye. *L'Eclairage électrique*, t. IX, p. 157, 1896.

[2] Pupin. *American Journal of Science*, mai 1893.
— *Lumière électrique*, t. LIII, p. 288, 1894.

Le courant de fréquence 400 à 600 était fourni par un alternateur à inducteur tournant, muni de 24 pôles alternés, entraîné par un moteur dont on peut faire varier la vitesse de 2000 à 3000 tours. L'induit immobile est fixé sur la surface interne de la carcasse. Cette machine, construite par la maison Ercole Marelli, Milano, a une tension aux bornes de 200 volts et peut fournir un courant maximum de 7,5 ampères.

Le relevé de la courbe de tension à l'oscillographe révèle la présence des harmoniques 3 et 7 dont les amplitudes et le décalage par rapport à l'onde fondamentale E_1, s'expriment par la formule

$$E = E_1 + E_3 + E_7 = E_M\,[0.85 \sin(\omega t - 3^\circ) + 0.17 \sin(3\,\omega t - 78^\circ) + 0.12 \sin(7\,\omega t - 3^\circ)] \text{ où } E_3 = 0{,}17 \text{ et } E_7 = 0{,}12$$

sont obtenus avec une approximation de 40 resp. 60 %.

Si l'on intègre l'équation précédente, on trouve

$$.\,N\,.\,s\,.\,10^8\,.\,\mathfrak{B} = \frac{E_M}{\omega}\,[0.85 \cos(\omega t - 3^\circ) + 0.057 \cos(3\,\omega t - 78) + 0.017 \cos(7\,\omega t - 3^\circ)]$$

dont la forme diffère peu d'une sinusoïde et dont l'amplitude maximum est environ 0,83, valeur de 2 à 2,5 % inférieure à l'amplitude déduite de l'onde fondamentale.

Nous pouvons donc, d'une part, dans le calcul de $\mathfrak{B}$ remplacer l'onde de tension par une sinusoïde équivalente qui diffère peu, en première approximation, de l'onde fondamentale de tension.

Calculons sa valeur efficace

$$E_1^2 = E^2 - E_3^2 - E_7^2 = 0{,}6792$$

$E_1 = 0{,}8245$ qui est de 3 % inférieure à E lue au voltmètre. Nous avons vu que les harmoniques, tout en laissant à la courbe d'aimantation la forme très approchée d'une sinusoïde, réduisent, d'autre part, de 2 à 2,5 % l'amplitude qu'elle aurait si, seule, l'onde fondamentale existait. Il faut donc, pour calculer $\mathfrak{B}$, remplacer la courbe de tension par une sinusoïde équivalente dont la valeur efficace est de 5 à 5,5 % inférieure à la valeur efficace lue, on en déduit facilement l'amplitude.

$$e_M = e \text{ eff. } \sqrt{2} = E \text{ eff. } \sqrt{2} \times 0{,}945 \text{ d'où } \mathfrak{B} = 0{,}945\,\frac{E \text{ eff.}}{0{,}4443\,N\,.\,s\,.\,f}$$

Janet[1] donne pour le coefficient que nous venons de déterminer, une formule tenant compte de la répartition et de l'espacement des dents, lorsque celles-ci ont une section rectangulaire. Cette formule n'était pas applicable dans notre cas, à cause des épanouissements polaires très importants des dents de l'inducteur.

On peut négliger dans le calcul des points théoriques les harmoniques que nous venons d'indiquer. L'observation montre en effet que la diminution de flux par courants de Foucault ne dépasse pas 1 % et que les pertes résultant de ces courants sont le 10 % des pertes totales. Une correction sur ces deux termes est donc de très faible importance.

Dispositif de mesure.

La méthode employée ne permet pas d'intercaler entre l'enroulement et les bornes de la machine une résistance de réglage dont l'effet serait de déformer l'onde de tension aux bornes de l'enroulement.

On règlait l'intensité par la tension aux bornes de la machine dont la valeur était pratiquement obtenue en agissant sur le courant d'excitation. Le circuit de consommation comprend donc simplement le tore, l'ampèremètre et le wattmètre servant en même temps de voltmètre.

L'ampèremètre est un instrument thermique. Nous avons obtenu un appareil sensible et très stable dont les indications étaient indépendantes de la fréquence en débarrassant de sa résistance additionnelle un voltmètre thermique Hartmann et Braun. Au moyen de shunts, on pouvait utiliser l'instrument de 160 MA à 1,5 A.

Les courants de plus forte intensité ont été mesurés par un ampèremètre type haute fréquence Hartmann et Braun.

Le noyau de fer.

Nous avons apporté le plus grand soin à la confection du noyau de fer. Le calcul des courants de Foucault n'est possible

[1] JANET, *Electrotechnique générale*, p. 261 (Coefficients de Kapp).

qu'à la condition que les fils du noyau soient parfaitement isolés les uns des autres.

Nous y sommes parvenus en le constituant par une série de couches cylindriques isolées les unes des autres par un papier enduit de vernis Zapon. Chacune des couches est obtenue par enroulement sur un tour dont le pas d'avancement est légèrement supérieur au diamètre du fil, ce qui supprime tout contact entre les spires d'une même couche. Le noyau ainsi construit est protégé par une enveloppe de carton de 1,5 à 1,8 mm d'épaisseur qui lui donne une rigidité absolue.

Pour rendre le champ de l'enroulement et le flux d'induction aussi uniformes que possible, le noyau a reçu la forme d'un cylindre creux à parois minces.

Le noyau se compose de 16 couches de fil comprenant chacune en moyenne 232 spires.

Les dimensions sont les suivantes:
diam. int. 10,3 cm, diam. ext. 11,09 cm, Hauteur du cyl. 7,32 cm. Poids de fer employé 422,13 gr; son volume: 54,85 cm^3.

On déduit de là

le diam. moyen, 10,7 cm.
la section globale du noyau, $7,32 \times 0,395 = 2,89$ cm^2.
la section utile occupée par le fer : 1,63 cm^2.

Le diamètre du fil est égal à 0,0236 cm.

La moyenne d'une série de mesures nous a donné pour la conductivité à 15° du fer employé $\lambda = 7,914 . 10^4$ mhos.

Enroulement magnétisant.

L'enroulement se compose de deux couches de 324 spires progressant en sens contraire pour éviter une aimantation perpendiculaire à l'aimantation principale[1]. Chaque couche est divisée en 6 sections de 54 spires qu'on peut coupler différemment suivant la fréquence employée et l'aimantation que l'on veut obtenir mais de façon à utiliser toujours tout l'enroulement avec un courant égal dans toutes les sections.

[1] Bouasse, *Cours de Physique*, T. III, IIme partie, IIme édition, p. 43.

La 1re couche bobinée directement sur le carton a une section de 6,13 cm², la 2e couche a une section de 7,51 cm², ce qui nous donne pour la section moyenne des spires 6,82 cm².

Les couplages employés ont été

648	spires,	c'est-à-dire les deux couches	en série,	
324	»	»	»	» en parallèle.
162	»	»	4 demi-couches	»
54	»	»	toutes les sections	»

Le champ produit est égal à

$$H = I . \frac{4 \pi N}{10 . \pi . d_m} = 0{,}03738 \text{ NI} .$$

N représentant le nombre de spires et I l'intensité en ampères.

Mesures des températures dans le noyau de fer.

L'importance des courants de Foucault diminue notablement avec la température, par la diminution de la conductibilité du fer. Dans le but de mesurer la température du noyau, nous avons enroulé, sur la paroi extérieure du cylindre une dizaine de spires d'un fil de nickel de 0,15mm de diamètre dont le coefficient de variation de résistance avec la température est d'environ 4 ‰. Par sa position ce circuit n'est pas soumis à l'action inductive de l'enroulement. Il est cependant placé dans le champ et subit de ce fait la même aimantation que le fer. Des essais ont montré que sa résistance est indépendante du champ dans les limites où nous avons travaillé (0 à 70 gauss).

Cet enroulement thermométrique a été étalonné en plaçant le transformateur entier dans une étuve maintenue à température constante pour un certain nombre de points compris entre 10° et 100°.

Les résultats obtenus s'expriment par la formule

$$R = 36{,}58 \, (1{,}003683)^t$$

36,58 représentant la résistance à 0° et $3{,}683 \times 10^{-3}$ le coefficient de variation avec la température.

IV

Aimantation en courant continu.

Les deux courbes en courant continu: courbe vierge d'aimantation et courbe des pertes par hystérésis en fonction de l'induction qui doivent servir de point de départ à nos calculs, nécessitent la connaissance d'un nombre aussi grand que possible de cycles d'hystérésis décrits pour des inductions différentes. Nous avons obtenu ces cycles par la méthode du galvanomètre balistique, ce dernier étant relié à un bobinage de 100 spires de fil fin superposé à l'enroulement magnétique: le fer ayant été soigneusement démagnétisé au moyen du courant alternatif, on lui faisait parcourir un certain nombre de fois le cycle que l'on voulait déterminer puis on mesurait les élongations obtenues au balistique pour des variations de champ de plus en plus grandes dont le point de départ était toujours le champ maximum du cycle. On évitait ainsi l'addition des erreurs qui se produit lorsqu'on passe du champ maximum positif au champ maximum négatif par arrêts aux valeurs intermédiaires. Entre chaque mesure d'un même cycle on faisait subir au fer un certain nombre de cycles complets.

Le tableau suivant exprime les résultats obtenus pour $\mathfrak{B}_m$ et pour l'énergie dissipée h, fournie par la surface s de la courbe lorsque abscisse et ordonnée sont exprimées en gauss. $h = \frac{s}{4\pi}$

Nous avons vu qu'il faut remplacer la courbe d'aimantation par une ligne brisée dont le parcours se confonde à une approximation suffisante avec la courbe expérimentale.

Nous donnons dans le tableau les points de brisure de cette ligne et les éléments qu'elle nous fournit pour le calcul.

Ce sont:

$\mathfrak{H}$ le champ magnétisant (calculé d'après la formule connue),

$\mathfrak{B}$ l'amplitude maximum de l'induction correspondante prise sur la courbe initiale d'aimantation,

$\frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i-1}}$ le rapport des inductions de deux points de brisures consécutifs,

ν la pente de chaque segment rectiligne, c'est-à-dire le rapport

$$\frac{\mathfrak{B}_i - \mathfrak{B}_{i-1}}{\mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_{i-1}}$$

la constante $b_1 = \sqrt{0{,}4 \,.\, \pi \,.\, \lambda \,.\, \nu}$ dans laquelle $\lambda = 7{,}914 \times 10^4$ et enfin la valeur $\frac{\pi\lambda}{b_1^4}\,\mathfrak{B}_0^2$ utile pour le calcul des pertes par courants de Foucault.

La constante b qui figure dans nos formules est le produit $b_1\, b_2$ dans lequel b_2 dépendant de la fréquence est donné par la formule $b_2 = \sqrt{\omega \,.\, 10^{-8}} = 2{,}5066 \,.\, 10^{-4} \sqrt{f}$. On remarque que b_1 et par conséquent b passe par un maximum pour une induc-

$\mathfrak{H}$ gauss	$\mathfrak{B}_M$ gauss	h ergs/cm³	Formules de Steinmetz interprétant les résultats obtenus.
0,2422	28,82	0,1317	
0,4844	69,10	0,84	
0,9688	171,4	7,61	
1,211	239,9	15,45	
1,453	319,1	27,10	
1,696	394,8	43,55	$h = 1{,}563.10^{-4} \,.\, \mathfrak{B}^{2{,}08}$
1,938	501,7	73,08	
2,180	627,0	110,18	
2,422	766,4	175,8	
2,906	1207	384,2	$h = 1{,}341.10^{-3} \,.\, \mathfrak{B}^{1{,}775}$
3,149	1538	604,6	
3,391	1839	833,8	
4,117	2893	1708	
4,844	3909	2827	
6,056	5332	4504	$h = 5{,}044.10^{-3} \,.\, \mathfrak{B}^{1{,}598}$
7,266	6341	6090	
9,690	7868	8500	
12,11	8998	10500	
14,53	9896	12240	
19,38	11330	14815	$h = 1{,}2734.10^{-2} \,.\, \mathfrak{B}^{1{,}497}$
33,91	13866	20150	
36,33	14238	20750	
72,67	16613	23160	

tion d'environ 5000 gauss, on en déduit immédiatement et d'une façon générale que la diminution de l'aimantation avec la profondeur et la fréquence, passera aussi par un maximum dans la région du coude de la courbe d'aimantation, pour décroître aux hautes inductions. A partir de ce point cependant les pertes par courants de Foucault, en raison de leur proportionalité avec le carré de l'aimantation continuent à augmenter, quoique moins rapidement.

N° de segment	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{B}$	$\frac{\mathfrak{B}_i}{\mathfrak{B}_{i-1}}$	ν	$b_{10^{-3}}$	$\frac{\pi\lambda}{b_1^4}\mathfrak{B}_0^2$
1	0,436	61,31		140,6	3,739	$4,7817 . 10^{-6}$
2	0,792	128,8	2,1001	189,5	4,342	$1,1601 . 10^{-5}$
3	1,386	294,3	2,2856	278,9	5,267	2,7983 . »
4	1,836	459,8	1,5623	367,4	6,045	3,9366 . »
5	2,238	656,0	1,4267	488,0	6,966	4,5428 . »
6	2,420	766,4	1,1683	606,6	7,767	4,0122 . »
7	2,614	919,7	1,2000	790	8,864	3,4066 . »
8	2,924	1226	1,3330	988	9,913	3,8720 . »
9	5,523	4782	3,9005	1368	11,670	$3,0715 . 10^{-4}$
10	6,15	5457	1,1411	1077	10,350	6,4544 . »
11	7,00	6131	1,1235	793	8,880	$1,5027 . 10^{-3}$
12	7,75	6701	1,0930	760	8,694	1,9568 . »
13	9,69	7866	1,1738	600,5	7,728	4,3352 . »
14	12,11	8998	1,1439	468,0	6,822	9,2934 . »
15	14,53	9896	1,0998	371,0	6,075	$1,7881 . 10^{-2}$
16	16,96	10656	1,0768	312,8	5,578	2,9168 . »
17	19,38	11330	1,0632	278,5	5,263	4,1594 . »
18	21,80	11850	1,0459	214,9	4,623	7,6448 . »
19	24,22	12290	1,0371	181,8	4,252	$1,1488 . 10^{-1}$
20	30,28	13340	1,0854	173,3	4,151	1,4903 . »
21	36,33	14240	1,0675	148,8	3,847	2,3016 . »
22	42,39	14920	1,0477	112,2	3,341	4,4436 . »
23	48,44	15410	1,0328	81,0	2,838	9,0992 . »
24	54,50	15825	1,0269	68,5	2,610	1,3418
25	60,56	16160	1,0212	55,3	2,345	2,1463
26	66,61	16425	1,0164	43,80	2,087	3,5349
27	72,67	16630	1,0125	33,82	1,834	6,0780

Courbes théoriques.

La courbe théorique à chaque fréquence représente, en fonction de l'amplitude maximum de l'induction résultante, la somme, en watts/cm^3, des pertes par hystérésis et des pertes par courants de Foucault.

A chaque point de brisure de la courbe initiale, nous avons fait correspondre un point théorique en prenant l'induction en ce point comme amplitude maximum de l'induction périphérique.

Pour expliquer le maniement des formules établies, calculons, à titre d'exemple, le point théorique obtenu à la fréquence 10000 et à la température de 15° pour une induction périphérique de 4782 gauss, point de brisure supérieur du 9me segment de la courbe d'aimantation.

La valeur de b_1 correspondant à ce segment est $b_1 = 11670$.

D'autre part $b_2 = 2{,}5066 \,.\, 10^{-4} \,.\, \sqrt{f}$, $b_2 = 2{,}5066 \,.\, 10^{-2}$ $b = b_1 b_2 = 292{,}5$; $r_0 = 1{,}18 \,.\, 10^{-2}$ étant le rayon du fil, on a $b \,.\, r_0 = 3.4515$.

L'amplitude maximum de l'aimantation au centre du fil est égale à

$$\mathfrak{B}_c = \frac{\mathfrak{B}_0}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j}\, b r_0)} ;$$

elle appartient encore au 9me segment pourvu que

$$\frac{\mathfrak{B}_0}{\mathfrak{B}_c} = \mathrm{I}_0(\sqrt{j}\, b r_0)$$

soit inférieur au rapport $\frac{\mathfrak{B}_9}{\mathfrak{B}_8} = 3{,}9$; or la table nous donne $|\,\mathrm{I}_0(3{,}4515\sqrt{j})\,| = 2{,}50624$.

Donc *le fil ne comprend qu'une zone* et *l'induction au centre* est égale à

$$\mathfrak{B}_c = \frac{4782{,}3}{2.50624} = 1908 \,.$$

L'*induction résultante* s'obtient par la formule réduite

$$\mathfrak{B}_{0,1} = \frac{\mathfrak{B}_0}{b \,.\, r_0} \,.\, \sqrt{2} \,.\, \frac{\sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1(\sqrt{j}\, b r_0)}{\mathrm{I}_0(\sqrt{j}\, b r_0)} \,.$$

La table nous donne $\sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1\,(3.4515\sqrt{j}) = 2{,}751029 - j \,.$ $1{,}732.683$ dont la valeur absolue est $3{,}251.208$.

On en tire

$$\mathfrak{B}_{0,1} = \mathfrak{B}_r = \frac{4782{,}3 \times \sqrt{2}}{3{,}4515} \,.\, \frac{3{,}25121}{2{,}50624} = \underline{2549} \,.$$

La formule

$$w_{0,1} = \frac{\pi \,.\, \lambda}{b_1^4} \,.\, \mathfrak{B}_0^2 \,.\, \frac{\left[\mathrm{B}\,(bx)\right]_{r_1}^{r_0}}{|\,\mathrm{I}_0(\sqrt{j}\, bx)\,|^2}$$

exprime les pertes par courants de Foucault dans 1 cm de longueur de la zone qui, dans notre exemple, s'étend à tout le fil.

Elle se réduit puisque $r_1 = 0$, à

$$w_{0,1} = \frac{\pi \cdot \lambda}{b_1^4} \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot \frac{B(br_0)}{|I_0(\sqrt{j}\, br_0)|^2} = 3{,}0715 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{12{,}1286}{6.2810}$$
$$= 5.9312 \cdot 10^{-4}$$

watt par cm de longueur de fil.

En divisant par $\pi . r_0^2 = 4{,}3744 . 10^{-4}$, il vient pour les pertes par courants de Foucault.

$$F = 1{,}356 \text{ watt/cm}^3.$$

Pertes par hystérésis.

La formule

$$\mathfrak{B} = \frac{I_0(\sqrt{j}\ bx)}{I_0(\sqrt{j}\ br_0)} \cdot \mathfrak{B}_0$$

nous permet de calculer l'induction le long du rayon du fil. En regard de ces valeurs, portons h, la valeur en ergs de l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis.

On a le tableau

$r . 10^2$	$\mathfrak{B}$	h
1,18	4,782	3,845
1.	3,563	2,450
0,9	3,069	1,910
0,8	2,680	1,540
0,5	2,040	995
0.	1,908	890

En dessinant la courbe $h = f(r^2)$, on détermine graphiquement la valeur de h_m correspondant au cycle moyen défini plus haut. On trouve $h_m = 1898$.

On a finalement, pour les pertes par hystérésis

$$H = h . f. = 1898 \times 10^4 . \text{ ergs/sec.} = 1{,}898 \text{ watt/cm}^3$$

et pour les pertes totales

$W = F + H = 3{,}254$ watt/cm³ correspondant à une aimantation résultante d'amplitude maximum

$\mathfrak{B}_r = 2549$ gauss.

Traitons encore brièvement un cas où, le fil se divisant en plusieurs zones, interviennent les décalages.

Prenons $f = 10.000$ et $\mathfrak{B}_0 = 5457$ (10me segment). On a alors $\frac{\mathfrak{B}_{10}}{\mathfrak{B}_9} = 1{,}14103$ et $b_1 = 10350$, $b_2 = 2{,}5066.\ 10^{-2}$, $b = b_1\, b_2 = 259{,}43$, $br_0 = 3{,}061$.

$I_0\,(3{,}061\sqrt{j}) = 2{,}0169$ est supérieure à $\frac{\mathfrak{B}_{10}}{\mathfrak{B}_9}$. Nous en concluons que l'aimantation ne peut pas être représentée uniquement par les valeurs qui correspondent au 10me segment: *le fil comprend donc plus d'une zone.*

Calculons le rayon où se termine la 1re zone. C'est le point où l'induction est tombée à la valeur $\mathfrak{B}_9 = 4782$. On a donc

$$\frac{I_0\,(\sqrt{j}\,br_1)}{I_0\,(\sqrt{j}\,b\,.\,r_0)} = \frac{\mathfrak{B}_9}{\mathfrak{B}_{10}}$$

$$I_0\,(\sqrt{j}\,br_1) = \frac{2{,}0619}{1{,}14103} = 1{,}76761$$

Les tables permettent d'en tirer $br_1 = 2{,}8148$

$$r_1 = 1{,}085\,.\,10^{-2}$$

L'induction, à partir de ce point, appartient au 9me segment; b prend donc une nouvelle valeur

$b' = 292{,}5$ et l'on a $\frac{\mathfrak{B}_9}{\mathfrak{B}_8} = 3.9$. d'où $b'.r_1 = 3{,}1736$.

$I_0\,(3{,}1736\ \sqrt{j}) = 2.1442$, valeur inférieure à $\frac{\mathfrak{B}_9}{\mathfrak{B}_8}$

L'aimantation au centre appartient donc au 9me segment; sa valeur est

$$\mathfrak{B}_e = \frac{4782}{2.14442} = 2230.$$

Le fil est donc décomposé en deux zones et le rayon qui les délimite a pour valeur $r_1 = 1{,}085\ 10^{-2}$ cm.

Induction résultante.

On trouve dans la table

$$\sqrt{2}\,.\,I_1\,(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r_1) = \sqrt{2}\ I_1\,(3{,}061\ \sqrt{j}) = 2{,}50380 - j\ 0{,}81055$$
$$\sqrt{2}\,.\,I_1\,(\sqrt{j}\,.\,b\,.\,r_0) = \sqrt{2}\ I_1\,(2{,}8148\sqrt{j}) = 2{,}27310 - j\ 0{,}36363$$

d'où l'on tire, en multipliant la 1re équation par r_0 et la seconde

par r_1, et prenant la différence

$$\left[x \,.\, \sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1 (\sqrt{j} \,.\, b \,.\, x)\right]_{r_1}^{r_0} = (0{,}48817 - j\ 0{,}56191) \,.\, 10^{-2}$$

et sa valeur absolue

$$0{,}74435 \,.\, 10^{-2}$$

On a d'autre part

$$\frac{\mathfrak{B}_0 \,.\, \sqrt{2}}{b} = 29{,}762$$

D'où enfin $(r_0^2 - r_1^2)\, \mathfrak{B}_{0.1}$

$$= \frac{29.762 \,.\, 0{,}74435}{2{,}0169} \,.\, 10^{-2} = 0{,}10984 \text{ gauss.}$$

On trouve pour la seconde zone, en notant que $r_2 = 0$,

$$r_1^2 \,.\, \mathfrak{B}_{1,c} = 0{,}32752 \text{ gauss.}$$

Il faut avant de composer ces deux valeurs connaître leur décalage.

Dans la 1re zone, la phase relative de $\mathfrak{B}_0$ est donnée par

$$\mathrm{I}_0 (3{,}061\ \sqrt{j}) = -\ 0{,}319779 - j \,.\, 1{,}990294$$

celle de $\mathfrak{B}_1$ par

$$\mathrm{I}_0 (2{,}8148 \sqrt{j}) = 0{,}045832 - j\ 1{,}767010$$

celle de $\mathfrak{B}_{0.1}$ par

$$(1 - j)\left[x \,.\, \sqrt{2} \,.\, \mathrm{I}_1 (b \,.\, x \,.\, \sqrt{j})\right] = (1 - j)\ (0{,}48817 - j \,.\, 0{,}56191)$$

On en tire

$$\text{phase relative de } \mathfrak{B}_0 = \text{arc tg} \left(\frac{-\ 1.990294}{-\ 0{,}319779}\right) = -\ 99^\circ\ 7'\ 40''$$

$$\text{» \quad » \quad de } \mathfrak{B}_{0.1} = \text{arc tg} \left(\frac{-\ 0{,}56191}{+\ 0{,}48817}\right) - 45^\circ = -\ 94^\circ\ 1'\ 0''$$

$$\text{» \quad » \quad de } \mathfrak{B}_1 = \text{arc tg} \left(\frac{-\ 0{,}767010}{+\ 0{,}045832}\right) = -\ 88^\circ\ 30'\ 51''$$

et de là les décalages entre éléments de la 1re zone

$$\varphi\,(\mathfrak{B}_{0,1}\,,\,\mathfrak{B}_0) = 5^\circ\ \ 6'\ \ 40''$$
$$\varphi\,(\mathfrak{B}_1\,,\,\mathfrak{B}_0) = 10^\circ\ \ 36'\ \ 49''$$

On a dans la seconde zone

$$\text{phase relative de } \mathfrak{B}_1 = \text{arc tg}\left(\frac{-\,0{,}514832}{-\,2{,}081604}\right) = -\,103^\circ\ 53'\ 31''$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{de } \mathfrak{B}_{1,2} = \text{arc tg}\left(\frac{-\,1.05309}{+\,2{,}59401}\right) = -\ 67^\circ\ \ 8'\ 30''$$

d'où

$$\varphi\,(\mathfrak{B}_{1,2}\,,\,\mathfrak{B}_1) = 36^\circ\ 45'\ 1''$$

et enfin

$$\varphi\,(\mathfrak{B}_{1,2}\,,\,\mathfrak{B}_0) = \varphi\,(\mathfrak{B}_{1,2}\,,\,\mathfrak{B}_1) + \varphi\,(\mathfrak{B}_1\,,\,\mathfrak{B}_0) = 47^\circ\ 21'\ 50''\,.$$

Les deux valeurs, 0,10984 et 0,32752, qu'on peut composer soit par la méthode du triangle; soit par projection, ont pour résultante

$$r_0^2\,.\,\mathfrak{B}_r = 0{,}41543$$

d'où

$$\mathfrak{B}_r = 2983{,}5 \text{ gauss.}$$

Notons ici en passant que le décalage de l'induction au centre par rapport à l'induction au bord est

$$\varphi\,(\mathfrak{B}_c\,,\,\mathfrak{B}_0) = \varphi\,(\mathfrak{B}_c\,,\,\mathfrak{B}_1) + \varphi\,(\mathfrak{B}_1\,,\,\mathfrak{B}_0)$$
$$= 103^\circ\ 53'\ 31'' + 10^\circ\ 36'\ 49'' = 114^\circ\ 30'\ 20''$$

Donc au centre du fil l'induction est de sens contraire à l'induction au bord.

Pertes par courants de Foucault.

On trouve dans la table	$B\,(3{,}061) = 6{,}77984$
	$B\,(2{,}8148) = 4{,}57621$
dont la différence est	$\left[B(bx)\right]_{r_1}^{r_0} = 2{,}20363$

On a pour les pertes dans 1 cm de longueur de la 1re zone

	$w_{0,1} = 3{,}4964\ 10^{-4}$
de la 2e zone	$w_{1,c} = 5{,}3916\ 10^{-4}$
et dans 1 cm de long du fil	$w_{0,c} = 8{,}888\ \ 10^{-4}$

On en déduit pour les pertes par courants de Foucault

$$F = 2{,}0318 \text{ watts/cm}^3 .$$

Les pertes par hystérésis se calculent comme dans le cas précédent. On trouve.

$$H = 2{,}405 \text{ watts/cm}^3$$

La somme

$$W = 4{,}437 \text{ watts/cm}^3$$

représente les pertes totales correspondant à une induction résultante de

$$B = 2983{,}5 \text{ gauss} .$$

Calculons encore le diamètre ($2x$) du fil qu'il faudrait employer pour qu'à la fréquence 10.000 l'énergie dissipée par courants de Foucault soit inférieure au 1 $^0/_{00}$ des pertes par hystérésis.

Dans le 1er cas traité plus haut, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0 &= 4782 \\ b \,.\, r_0 &= 3{,}4515 \\ H &= 1{,}898 \text{ watt/cm}^3 \\ F &= 1{,}356 \text{ watt/cm}^3 , \end{aligned}$$

valeur dans laquelle le facteur variable avec le diamètre est

$$\frac{B\,(br_0)}{|\,I_0\,(\sqrt{j}\,.\,b\,r_0)\,|^2} = \frac{12.1286}{6{,}2810} = 1{,}931$$

Si l'action des courants de Foucault devient négligeable, la valeur de H est alors à peu près 3,845; l'énergie dissipée par courants de Foucault ne doit donc pas dépasser 0,0038 watt /cm³.

On aura donc

$$\frac{B\,(bx)}{|\,I_0\,(\sqrt{j}\,(bx)\,|^2} = 1{,}931 \,.\, \frac{0{,}0038}{1{,}898} = 0{,}003866 .$$

égalité satisfaite par la valeur $b.\,x = 0{,}499$.

On a donc

$$\frac{b\,.\,x}{b\,.\,r_0} = \frac{0.499}{3{,}45}$$

$$r_0 = 1{,}18 \,.\, 10^{-2} \text{ cm}$$
$$2x = 3{,}41 \,.\, 10^{-3} \text{ cm} .$$

Le diamètre de ce fil est tellement faible qu'il serait impossible de lui faire subir les manipulations qu'exige la confection d'un noyau à fils isolés.

Influence de la température.

La somme des pertes par hystérésis et par courants de Foucault a atteint dans nos mesures jusqu'à 9 watts/cm^3, dissipation d'énergie telle, que la température du fer atteignait 100° en moins de deux minutes. Il est impossible dans ces conditions de maintenir la température constante. L'enroulement thermométrique dont un aide mesurait la résistance au moment de chaque lecture nous a permis de connaître la température correspondant à chacune des valeurs mesurées.

L'augmentation de température a pour conséquence, par la diminution de conductibilité du fer, une réduction notable des courants de Foucault et par là même une pénétration plus grande du flux dans le fil.

Pour établir une comparaison plus serrée avec l'expérience, nous avons calculé trois nouvelles courbes théoriques correspondant aux températures de 65°, 115° et 215° : on les obtient simplement par interpolation.

En effet, la constante

$$b = b_1 \,.\, b_2 = \pi \sqrt{0{,}8\,\lambda \,.\, \nu \,.\, f} \,.\, 10^{-4}$$

dépend au même titre de λ et de f.

On peut donc obtenir la même variation de b en multipliant indifféremment λ ou f par un même facteur. Nous pourrons donc effectuer l'interpolation sur des courbes en fonction de la fréquence.

Or les valeurs théoriques de $\mathfrak{B}_r$, F, H obtenues aux différentes fréquences à la température de 15° peuvent être mises en courbe en fonction de la fréquence, chaque courbe réunissant les points qui ont la même induction périphérique. Ce sont là nos courbes d'interpolation.

Soit λ la conductibilité à 15° et (15° + t°) la température à laquelle on veut déterminer une nouvelle courbe. On a

$$\lambda' = \frac{\lambda}{1 + \alpha t}$$

Les pertes par hystérésis, H, dépendent de la formule de distribution qui ne contient λ que par l'intermédiaire de b. On a donc

$$\mathrm{H}\left(f, \frac{\lambda}{1+\alpha t}\right) = \mathrm{H}\left(\frac{f}{1+\alpha t}, \lambda\right).$$

Il en est de même pour $\mathfrak{B}_r$.

Pour une induction périphérique donnée, et à la fréquence f, on trouvera donc les valeurs H′ et $\mathfrak{B}'_r$ correspondant à la température $(15° + t°)$ en prenant sur la courbe d'interpolation les valeurs H

$$\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{1+\alpha t}\right) \text{ et } \mathfrak{B}_r\left(\frac{\lambda}{1+\alpha t}\right).$$

Pour F remarquons que la formule

$$w_{0,1} = \frac{\pi \cdot \lambda}{b_1^4} \cdot \mathfrak{B}_0^2 \cdot \frac{[\mathrm{B}(b \cdot x)]_{r_1}^{r_0}}{|\mathrm{I}_0(\sqrt{j} \cdot b \cdot r_0)|^2}$$

contient λ soit par l'intermédiaire de b, soit directement dans le facteur $\frac{\pi \cdot \lambda}{b_1^4}$; ce dernier à la température $(15° + t)$ devient

$$\pi \frac{\dfrac{\lambda}{1+\alpha t}}{\dfrac{b_1^4}{(1+\alpha t)^2}} = \frac{\pi \cdot \lambda}{b_1^4} \cdot (1 + \alpha t).$$

On a donc

$$\mathrm{F}\left(f \cdot \frac{\lambda}{1+\alpha t}\right) = (1 + \alpha t) \cdot \mathrm{F}\left(\lambda \cdot \frac{f}{1+\alpha t}\right).$$

Par conséquent, la valeur interpolée sur la courbe devra encore être multipliée par $(1 + \alpha t)$.

La moyenne d'une série de mesures nous a fourni, pour le coefficient de variation de la résistance avec la température, la valeur

$$\alpha = 4{,}2 \times 10^{-3}.$$

V.

Résultats des expériences.

Le simple examen des tableaux ne permet pas d'établir, à première vue, une comparaison entre l'expérience et la théorie. Il faudrait, pour cela, qu'à chaque point calculé, correspondît un point expérimental; or ce dernier se déduit des lectures d'expériences par un calcul dans lequel entrent un certain nombre d'éléments, variables d'une mesure à l'autre. Il est donc impossible de se le fixer à l'avance. D'autre part, faire correspondre un point calculé à chaque point expérimental est encore moins aisé en raison des formules compliquées qui conduisent au résultat. Les tableaux de valeurs calculées ont été réunis sous forme de courbe $W = f(\mathfrak{B}_r)$ tandis que les points expérimentaux sont notés comme points isolés avec l'indication de la température à laquelle ils ont été obtenus.

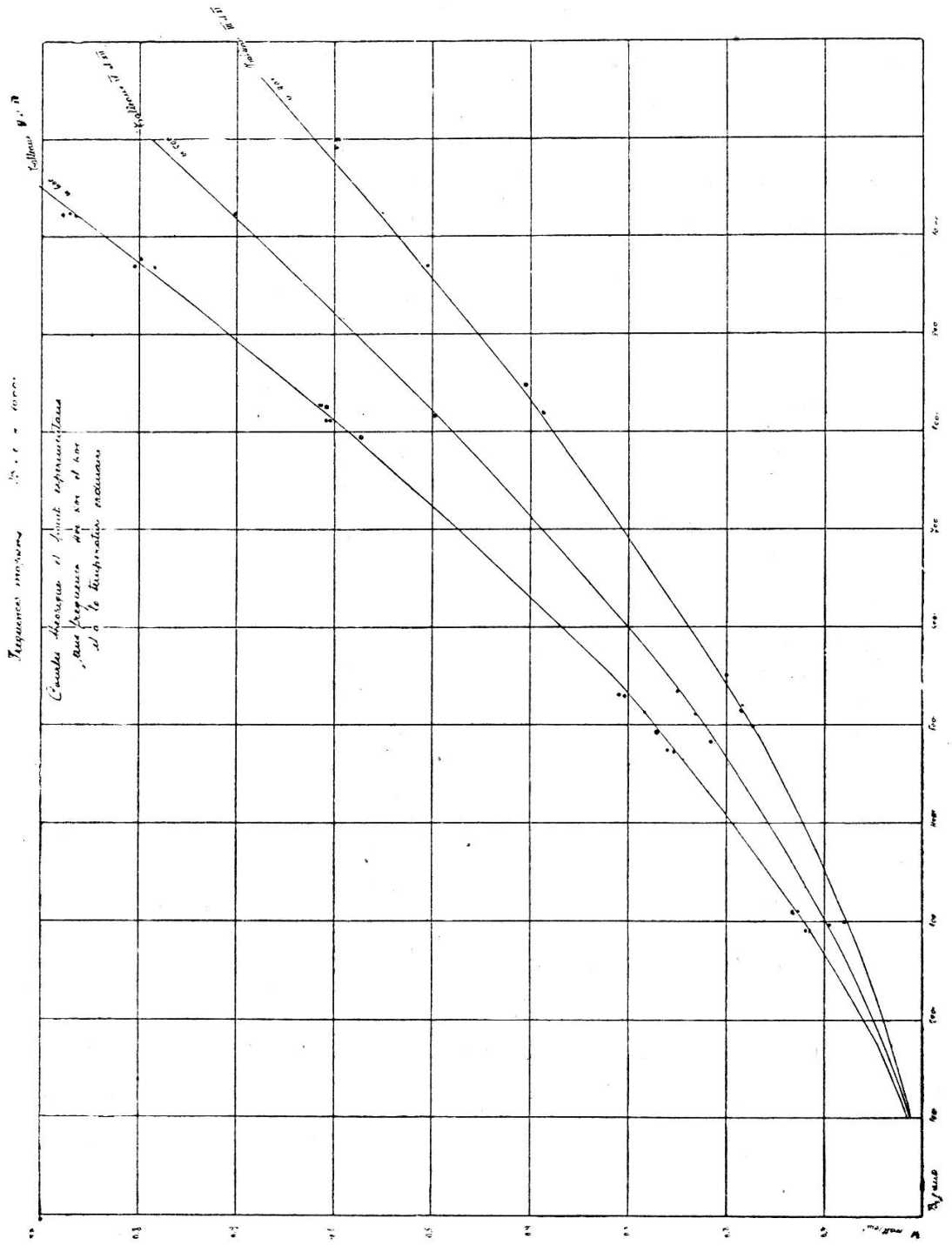
Moyenne fréquence.

En tenant compte des erreurs d'expérience on voit que les résultats expérimentaux se logent avec une exactitude remarquable sur les courbes calculées. Nous nous trouvons, ici, en parfaite concordance avec les résultats obtenus par Maurain et par Guye et ses collaborateurs, Herzfeld et A. Schidlof. La méthode que nous avons employée est donc légitime et exacte.

Haute fréquence.

Les résultats obtenus à haute fréquence ne présentent pas la même simplicité. Un premier examen des courbes montre que les points expérimentaux ne se placent pas, en général, sur les courbes calculées. Nous devons donc admettre que l'hypothèse mise à la base de notre étude ne se vérifie plus aux fréquences élevées que nous avons utilisées.

Pour faciliter l'interprétation des résultats, nous avons tracé une courbe de la façon suivante: pour chaque valeur de l'induction, on forme la différence (W expérimental — W théorique)



Courbe I.

TABLEAU I

Valeurs théoriques de $\mathfrak{B}_r$, l'induction résultante et de W, la somme des pertes par courants de Foucault et par hystérésie

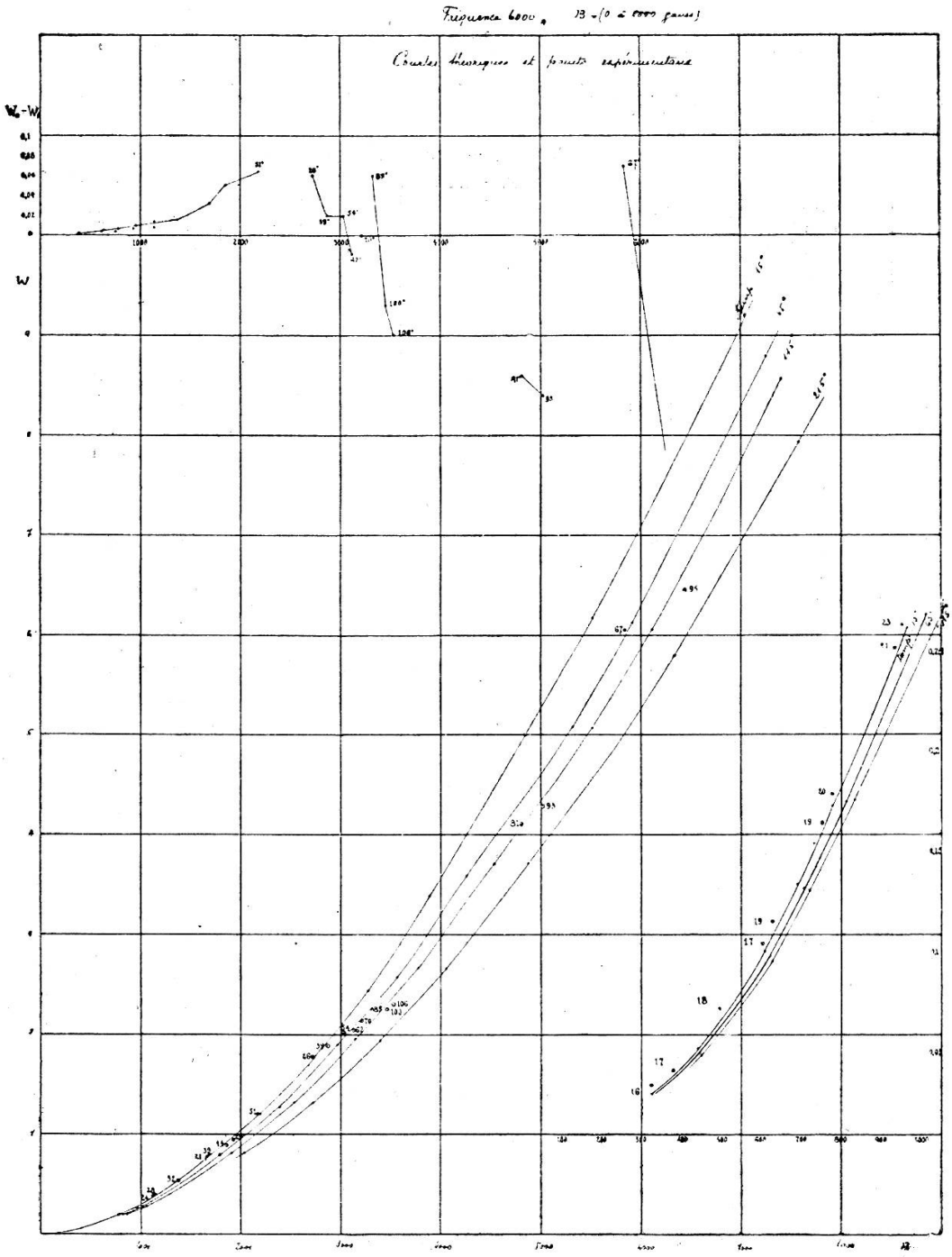
		Fréquence 400	Fréquence 500	Fréquence 600
N° de segment	$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_r$ [1]	W $\frac{\text{watts}}{\text{cm}^3}$	W $\frac{\text{watts}}{\text{cm}^3}$	W $\frac{\text{watts}}{\text{cm}^3}$
1	61,31			
2	128,8			
3	294,3	0,000971	0,00122	0,001489
4	459,8	0,002556	0,00321	0,00389
5	656,0	0,00519	0,00653	0,00791
6	766,4	0,00730	0,0092	0,01114
7	919,7	0,01031	0,0182	0,01570
8	1226	0,01655	0,0209	0,02531
9	3200	0,0873	0,1091	0,1326
.	4000	0,1244	0,1576	0,1916
.	4782	0,1638	0,2077	0,2528
10	5457	0,1992	0,2525	0,3072
11	6131	0,2472	0,3143	0,383
12	6701	0,2861	0,364	0,443
13	7866	0,366	0,466	0,569
14	8998	0,456	0,558	0,709
15	9896	0,5227	0,672	0,823
16	10656	0,592	0,755	0,922
17	11330	0,652	0,832	1,017
18	11850	0,701	0,894	1,093
19	12290	0,741	0,945	1,155

que l'on porte en ordonnée pour une abscisse représentant l'induction; on a noté les valeurs de cette différence dans la 4me colonne des tableaux de résultats expérimentaux. La vale ur de la température est notée à côté de chaque point.

On constate que pour les *faibles inductions*, 1° les pertes mesurées sont plus élevées que les pertes calculées. 2° leurs différences augmentent avec l'induction jusqu'à

$\mathfrak{B} = 3600$	pour la	fréquence	4000,
$\mathfrak{B} = 2700$	»	»	5000
$\mathfrak{B} = 2200$	»	»	6000
$\mathfrak{B} = 2200$	»	»	8000
$\mathfrak{B} = 1500$	»	»	10000

[1] Aux fréquences 400, 500, 600, les différences entre $\mathfrak{B}_0$ et $\mathfrak{B}_r$ sont très petites; elles atteignent au maximum 7 ‰.



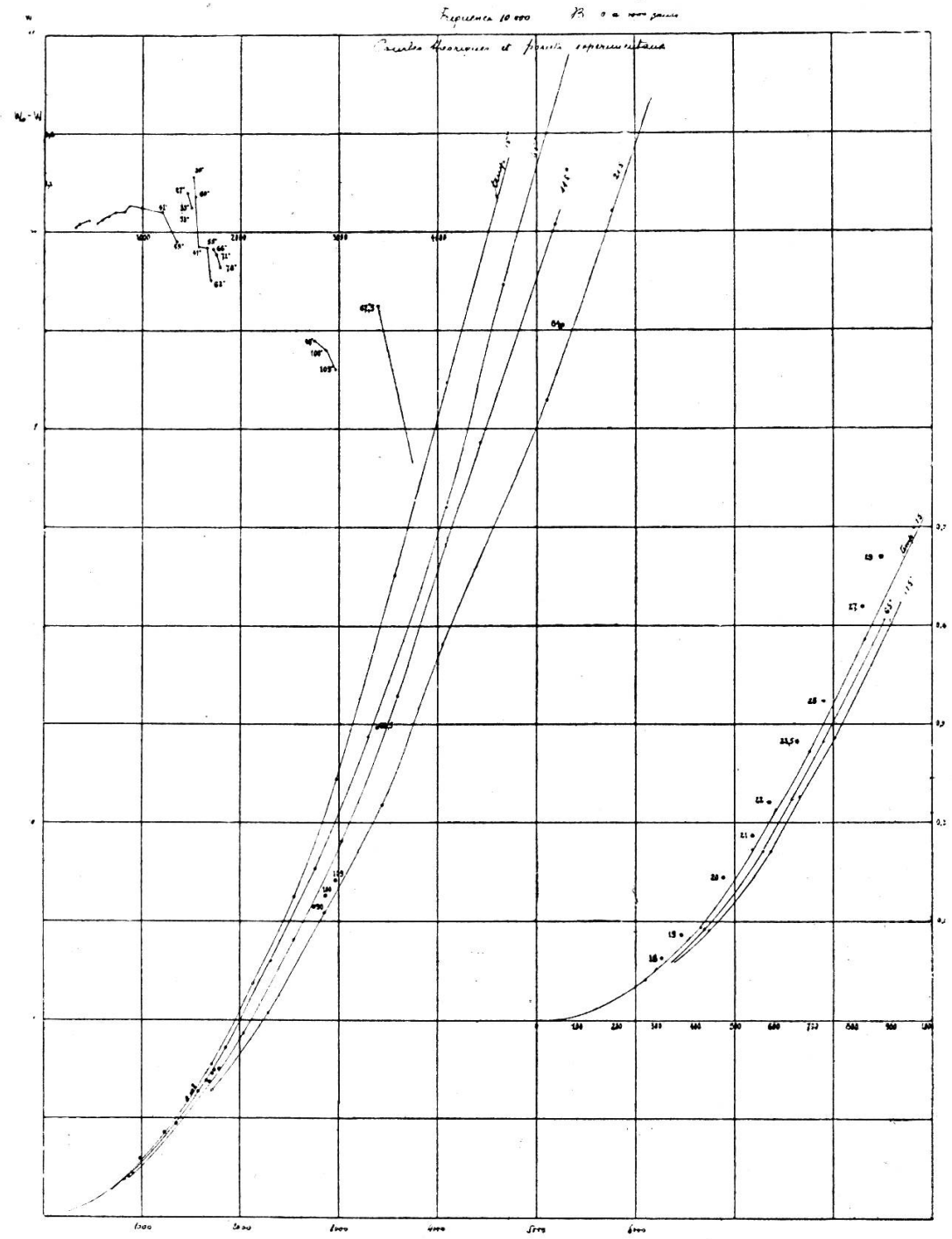
Courbe II.

TABLEAU II
Résultats expérimentaux.

Fréquence : 400		Fréquence : 500		Fréquence : 600	
$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$
955,1	0,0130	677,5	0,0073	1040	0,01995
1050	0,0131	1040	0,0156	2881	0,1147
2990	0,0805	1091	0,0191	2899	0,1186
4976	0,1741	1103	0,0190	3095	0,1276
5150	0,1841	2908	0,0953	3106	0,1331
5196	0,1832	4829	0,2156	4721	0,2541
5500	0,2002	4988	0,2289	4916	0,2722
8181	0,3887	5108	0,2317	5100	0,2837
8213	0,3876	5388	0,2502	5279	0,3046
8217	0,3864	8008	0,4725	5296	0,3099
8458	0,4047	8151	0,4975	7944	0,5730
9767	0,5054	8375	0,4945	8115	0,6055
10227	0,5517	8396	0,4921	8118	0,6087
10944	0,5980	9699	0,6416	8265	0,6088
		10241	0,7020	8274	0,6143
				9676	0,7843
				9683	0,8049
				9746	0,7982
				10206	0,8688
				10215	0,8776
				10219	0,8663

TABLEAU III
Courbes théoriques à la fréquence 6000.

	temp. = 15°		temp. = 65°		temp. = 115°		temp. = 215°	
N° de segmt	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$
1	60,96							
2	127,4							
3	286,9		289,4		290,6			
4	440,2	0,0535	445,9	0,0513	449,3	0,0500		
5	608	0,1018	622	0,0991	630	0,0968		
6	685,1	0,1357	708	0,1335	721,7	0,1321		
7	778,9	0,1745	812	0,1763	835,2	0,1772		
8	964,1	0,2637	1024	0,2709	1063	0,274		
9	1647	0,7440	1790	0,788	1900	0,808	2040	0,812
.	2195	1,2017	2390	1,277	2530	1,321	2720	1,331
.	2744	1,787	2985	1,899	3157	1,958	3400	1,941
.	3281	2,430	3575	2,587	3779	2,664	4060	2,656
10	3888	3,384	4260	3,591	4535	3,70	4880	3,715
11	4855	4,994	5325	5,070	5540	5,076	5760	4,885
12	5520	6,184	5920	6,134	6115	6,065	6330	5,80



Courbe III.

TABLEAU IV

Résultats expérimentaux à la fréquence 6000.

$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	temp.	$W_e - W_{th}$	$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	temp.	$W_e - W_{th}$
326,4	0,0305	16	0	4814	4,1009	81	— 0,14
379,3	0,0429	17	0,002	5015	4,2911	93	— 0,16
494,8	0,0731	18	0,007	5834	6,0537	67	+ 0,07
602,7	0,1057	17	0,006	6425	6,4524	95	— 0,34
626,4	0,1166	19	0,007				
753,3	0,1662	19	0,0045				
778,4	0,1807	20	0,007				
933,9	0,2543	21	0,007				
952,5	0,2655	23	0,010				
1145	0,3767	24	0,008				
1146	0,3834	28	0,014				
1370	0,5332	32	0,016				
1669	0,7679	21	0,016				
1689	0,7783	39	0,032				
1850	0,8943	44	0,050				
2183	1,207	51	0,064				
2718	1,7838	26	0,06				
2869	1,8972	39	0,02				
3036	2,0118	54	+ 0,02				
3127	2,047	62	— 0,02				
3209	2,138	70	0				
3318	2,2461	85	+ 0,06				
3462	2,2538	100	— 0,07				
3531	2,3049	106	— 0,10				

TABLEAU V

Courbes théoriques à la fréquence 10.000.

	temp. = 15°		temp. = 65°		temp. = 115°		temp. = 215°	
N° de segmt	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$	$\mathfrak{B}_r$	$W \frac{watts}{cm^3}$
1	60,11							
2	124,51							
1	274,4	0,0412	280		284			
4	413,9	0,0939	426	0,0925	434	0,0909		
5	547	0,1728	574	0,1708	594	0,1713		
6	603,6	0,2132	644	0,2233	664	0,226		
7	690,2	0,2718	724	0,282	753	0,286		
8	831,1	0,3859	878	0,406	920	0,424		
9	1706	1,550	1855	1,726	2040	1,874	2290	2,066
.	2132	2,364	2320	2,600	2550	2,811	2860	3,081
.	2549	3,254	2770	3,543	3040	3,806	3430	4,176
10	2984	4,437	3300	4,872	3594	5,28	4060	5,81
11	3571	6,519	4095	7,206	4475	7,86	5100	8,30
12	4102	8,477	4665	9,467	5190	10,08	5760	10,22
13	5645	15,050	6445	15,94	6790	15,61	7160	14,88
14	7381	23,003	7890	23,23	8180	21,93	8480	20,14
15	8666	30,731	9095	29,13	9300	27,8	9520	24,65

TABLEAU VI

Résultats expérimentaux à la fréquence 10 000.

$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	temp.	$W_e - W_{th}$	$\mathfrak{B}_M$	$W \frac{watts}{cm^3}$	temp.	$W_e - W_{th}$
315,6	0,0636	18	0,009	2748	3,143	90	—0,22
364,8	0,0864	19	0,016	2869	3,261	100	—0,24
470,4	0,1444	20	0,022	2963	3,42	109	—0,28
542,9	0,1869	21	0,018	3392	4,969	65,5	—0,15
586,6	0,2208	22	0,024	5261	9,057	84	—1,8
663,76	0,2828	23,5	0,032				
722,6	0,3338	25	0,038				
822,6	0,4187	27	0,040				
870	0,4704	29	0,054				
993,7	0,5980	32	0,05				
1215	0,8516	41	+ 0,04				
1348	0,9521	53	— 0,02				
1464	0,2061	53	+ 0,03				
1464	1,188	27	+ 0,08				
1505	1,2537	33	0,05				
1510	1,2753	25	0,05				
1520	1,3394	30	0,11				
1543	1,3111	60	+ 0,07				
1577	1,2725	41	— 0,03				
1657	1,3891	55	— 0,03				
1693	1,3658	62	— 0,1				
1719	1,4581	66	— 0,035				
1745	1,4939	71	— 0,045				
1788	1,5029	78	— 0,07				

Le tableau suivant contient, pour une induction donnée, 1° les pertes totales mesurées, W_e, 2° les pertes totales obtenues théoriquement W_{th}; et ses composants: F les pertes par courants de Foucault, H les pertes par hystérésis, valeurs tirées des courbes dessinées.

Le calcul des pertes par courants de Foucault est basé sur les lois fondamentales de l'électrodynamique, avec la seule hypothèse que la courbe vierge d'aimantation est indépendante de la fréquence. Nous avons donc le droit de considérer le résultat de ce calcul comme indépendant de la fréquence et partant d'imputer l'augmentation observée uniquement aux pertes par hystérésis. La valeur expérimentale de ces dernières s'obtiendra donc simplement en retranchant la valeur calculée, F, des pertes totales mesurées. Les valeurs de cette différence W exp.— F = H exp. sont notées dans la 6me colonne du tableau

précédent. La colonne suivante contient le rapport de la valeur expérimentale H exp., des pertes par hystérésis, à la valeur théorique H.

$\mathfrak{B} = 1000$ *gauss.*

Fréquence	$W_{exp.}$ watts/cm³	W_{th} watts/cm³	F watts/cm³	H watts/cm³	$W_{exp.}-F = H_{exp.}$	$\frac{H_{exp.}}{H}$	$\frac{W_{exp.}-H}{F}$
4000	0,166	0,16	0,042	0,118	0,124	1,051	1,14
5000	0,23	0,22	0,066	0,154	0,164	1,065	1,15
6000	0,291	0,28	0,090	0,201	0,201	1,058	1,122
8000	0,436	0,40	0,144	0,256	0,292	1,14	1,25
10000	0,608	0,56	0,213	0,347	0,395	1,138	1,255
$\mathfrak{B} = 1500$ *gauss.*							
4000	0,372	0,35	0,101	0,249	0,271	1,088	1,22
5000	0,517	0,49	0,147	0,433	0,37	1,079	1,183
6000	0,642	0,62	0,199	0,421	0,443	1,052	1,11
8000	0,96	0,88	0,326	0,554	0,634	1,144	1,245
10000	1,31	1,20	0,45	0,75	0,86	1,146	1,245
$\mathfrak{B} = 2000$ *gauss.*							
4000	0,64	0,59	0,16	0,43	0,48	1,116	1,31
5000	0,855	0,80	0,24	0,56	0,615	1,098	1,23
6000	1,066	1,01	0,354	0,656	0,712	1,085	1,158
8000	1,64	1,52	0,578	0,942	1,062	1,127	1,207

Pour une induction donnée, ce rapport augmente avec la fréquence de même que pour une fréquence donnée il croît avec l'induction. On voit donc se marquer une dépendance caractérisée entre l'accroissement observé et H . La loi d'augmentation soit avec la fréquence soit avec l'induction ne peut cependant pas être indiquée de façon exacte à cause de l'influence qu'on expliquera plus loin, de la température. En effet, quoique celle-ci influe peu sur la valeur des pertes totales W, elle a déjà un effet non négligeable sur la différence $W_e - W_{th}$.

L'impossibilité où l'on se trouve de connaître séparément par voie expérimentale les pertes par hystérésis et les pertes

par courants de Foucault, nous oblige à envisager le cas où les pertes par hystérésis seraient indépendantes de la fréquence; l'accroissement observé devrait donc être entièrement attribué aux courants de Foucault. Pour vérifier cette hypothèse, calculons le rapport $\frac{W_{exp.} - H}{F}$; les valeurs en sont notées dans la dernière colonne du tableau. Elles présentent des alternatives de croissance et de décroissance qui ne permettent d'en tirer aucune conclusion, même d'ordre qualitatif. Nous pouvons donc écarter cette dernière hypothèse d'autant plus qu'elle est contradictoire avec les lois d'électrodynamique que nous avons mises à la base du calcul théorique des courants de Foucault.

Nous admettons donc que l'accroissement des pertes observé est dû à un élargissement du cycle d'hystérésis.

Pourquoi, à partir de cette induction, ce phénomène ne garde-t-il plus la même allure, et pourquoi voyons-nous, aux *inductions plus élevées*, les pertes mesurées passer au contraire au-dessous des pertes calculées et s'en écarter d'autant plus que la fréquence est plus élevée ? Les courbes elles-mêmes nous en fournissent la réponse.

En effet, nous avons relié par un trait les points de la courbe des différences qui ont été obtenus dans une série ininterrompue de mesures. On est immédiatement frappé par le fait que la pente de ces fragments de courbe est toujours plus forte que la pente de la courbe moyenne qui passerait avec le plus de probabilité par tous les points expérimentaux. L'explication en est très simple: ces segments correspondent à des inductions où les pertes d'énergie sont déjà d'une importance telle que l'accroissement de température est très rapide. L'enroulement thermométrique placé sur le carton qui entoure le fer ne peut pas nous donner avec une rapidité suffisante la température du noyau. Il s'ensuit que nos chiffres de température — du moins pour les températures élevées — sont inférieurs à la réalité.

On peut donc admettre avec certitude que la courbe exacte des différences ne peut pas passer au-dessous de la cote supérieure de chacun de ces fragments sans que nous puissions dire qu'elle ne passe pas, même au-dessus de cette cote.

La conductibilité à 15° résulte de la moyenne d'une série de mesures. Nous avons utilisé sa valeur dans le calcul des courbes théoriques à 15°; pour de plus hautes températures on a introduit le coefficient de variation de conductibilité avec la température. Une incertitude subsiste dans la valeur exacte de ce dernier coefficient qui n'a été déterminé entre 15° et 90° que sur un petit nombre d'échantillons.

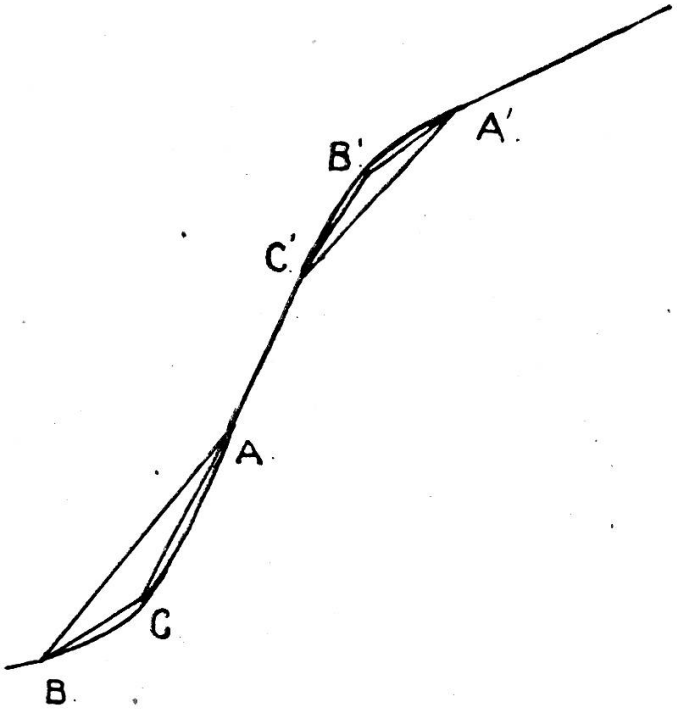


Fig. 2.

L'écart entre la position des courbes à 65°, 115° et 215° et la courbe à 15° n'est donc pas absolument défini. Par comparaison avec les études faites sur la conductibilité du fer il semble que la valeur choisie aux diverses températures est trop grande, spécialement à haute température [1].

Il en résulte que ces courbes théoriques s'écartent insuffisamment de la courbe à 15°.

En résumé, pour les inductions élevées:

[1] L. Holborn, *Ann. de Phys.* (59), p. 145, 1919.

D'une part, les points expérimentaux doivent être rapportés à des courbes théoriques dessinées pour des températures plus élevées que celles qui sont notées pour chaque point, c'est-à-dire à des courbes d'ordonnée plus faible.

D'autre part, les observations faites sur la conductibilité nous abaissent encore les courbes théoriques; l'écart diminue ainsi entre les valeurs observées et les valeurs calculées, et empêche de tirer la conclusion qui semble s'imposer, au premier examen des résultats, savoir: à haute fréquence, aux inductions élevées, les pertes par hystérésis sont plus petites qu'en courant continu.

Enfin, il peut se faire que la décomposition de notre courbe d'aimantation en segments rectilignes soit insuffisamment serrée. On peut facilement se rendre compte du changement apporté au calcul lorsqu'on remplace le segment AB par AC et BC, AC ayant une pente plus forte que AB, il en résultera que $\mathfrak{B}'_r$ obtenu avec la nouvelle décomposition est inférieure à $\mathfrak{B}_r$; H subira une très faible diminution et F une augmentation plus importante. On aura donc

$$\mathfrak{B}'_r < \mathfrak{B}_r$$

$$W' \geqslant W$$

Donc, notre courbe des pertes calculées se relèverait. Dans la portion de courbe d'aimantation dont la concavité est tournée vers le bas, l'effet obtenu sera l'opposé du précédent

$$\mathfrak{B}'_r > \mathfrak{B}_r$$

$$W < W$$

et ici, la courbe théorique s'abaissera. Notons que cette correction ne peut pas avoir une grande importance. Nous avons cru intéressant de le signaler en faisant cependant remarquer qu'elle exige une détermination du cycle en courant continu dont l'exactitude n'est pas compatible avec la méthode et les appareils employés.

Signalons, en finissant, deux améliorations susceptibles d'écar-

ter les inconvénients signalés plus haut: 1° l'emploi d'un fer très homogène pour lequel la conductibilité soit bien constante, 2° il est de toute nécessité de placer l'enroulement thermométrique à l'intérieur du noyau de fer et il y aurait un grand avantage à le constituer du même fil que celui employé pour le noyau. Il serait constitué, par exemple, par une couche de fil qu'on intercalerait au milieu de l'épaisseur du tore. Pour éviter l'action du champ magnétique dans le sens longitudinal du fil de cet enroulement et de plus, mesurer la résistance ohmique dans une direction perpendiculaire au champ, c'est-à-dire dans la direction que suivent les courants de Foucault, on pourrait le placer en zig-zag, intercalé entre deux couches de spires, pendant la confection du tore. Cet enroulement, enfermé ainsi au milieu de la masse du fer, en prendra la température presque instantanément. De plus, s'il est fait du même fil que l'enroulement, il nous indiquera pour chaque mesure la valeur de λ qu'il faut faire intervenir dans nos formules, valeur tenant compte de la température et du champ magnétique.

Résumé.

1° La méthode employée présente deux imperfections d'ordre expérimental: inhomogénéité du fer et connaissance incertaine de la valeur de la conductibilité dans les conditions particulières de chaque expérience; l'influence des défauts signalés est négligeable aux fréquences moyennes, de 400 à 600 et lorsque la température du fer ne s'élève que lentement. 2° Aux fréquences moyennes, l'énergie dissipée par cycle d'hystérésis en l'absence de courants de Foucault est trouvée indépendante de la fréquence, entre les fréquences 400 et 600 et a conservé la même valeur qu'en courant continu. 3° Les résultats précédents qui confirment ceux obtenus dans les recherches antérieures de Maurain et Guye, Herzfeld et Schidlof, par des méthodes différentes, prouvent l'exactitude et la légitimité de la méthode employée. 4° Entre les fréquences 3000 et 10 000, jusqu'à une induction comprise entre 1500 et 3600 gauss, suivant la fréquence, l'énergie dissipée par cycle d'hysté-

résis augmente avec la fréquence. Pour une fréquence donnée, le rapport de cet accroissement aux pertes par hystérésis augmente avec l'induction, dans le domaine indiqué. 5° Pour les inductions élevées, le problème doit être repris, en tenant compte, de plus près, de l'importante influence de la température. Dans nos recherches, celle-ci joue un rôle tel que l'on ne peut pas tirer la conclusion qui ressort à première vue des résultats expérimentaux.

Institut de Physique de l'Université de Fribourg.