Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 4 (1922)

Artikel: Essai de théorie de l'influence du champ magnétique sur l'émission des rayons X

Autor: Winiewski, Félix-Joachim de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741958

ESSAI DE THÉORIE

DE

L'INFLUENCE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

SUR L'ÉMISSION DES RAYONS X

PAR

Félix-Joachim de WIŚNIEWSKI

I

Le but de la présente note, est l'étude de l'émission des rayons caractéristiques de Röntgen dans un champ magnétique d'intensité H.

Pour aborder ce problème je fais les hypothèses suivantes:

1° Chaque molécule possède un moment magnétique M. 2° Chaque molécule a deux degrés de liberté. 3° Les axes de rotation sont normaux à la direction du moment magnétique. 4° Les anneaux entre lesquels se fait l'échange des électrons pendant l'émission sont situés dans un même plan qui est perpendiculaire au moment magnétique M.

Dans ce qui suit, je suppose que la direction du champ magnétique coïncide avec la direction de l'axe des z.

En désignant alors par θ l'angle que fait le moment M avec la direction du champ magnétique; par φ l'azimut et par $\mathfrak{J}$ le moment d'inertie de la molécule, on trouve pour l'expression de l'énergie cinétique T:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathfrak{J}\,.\,[\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,.\,\dot{\varphi}^2]$$

et pour l'énergie potentielle u

$$u = M\,.\,\mathrm{H}(1 - \cos\theta)$$

L'énergie totale $u + \mathrm{T} = \mathrm{E}_0$ s'écrit

$$\mathrm{E}_0 = \frac{\mathcal{J}}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, . \, \dot{\varphi}^2) + M \, . \, \mathrm{H}(1 - \cos\theta) \, .$$

En posant:

$$p_\theta = \mathcal{J} \, . \, \dot{\theta} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta} \; ; \qquad p_\varphi = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \varphi} = \mathcal{J} \sin^2\dot{\theta} \, . \, \varphi$$

On forme à partir de l'expression de l'énergie totale l'équation de Jacobi:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \varphi}\right)^2 + 2M \, . \, \mathrm{H} \, . \, \mathcal{J}(1 - \cos\theta) = 2\mathcal{J} \, . \, \mathrm{E}_0$$

qui s'intègre par séparation des variables.

Posons:

$$\mathrm{W} = \mathrm{W}_1(\varphi) + \mathrm{W}_2(\theta)$$

où

$$\mathrm{W}_1(\varphi) = \gamma \, . \, \varphi \qquad (\gamma = \text{constante})$$

alors pour $\mathrm{W}_2(\theta)$ on tire de l'équation de Jacobi

$$\mathrm{W}_2(\theta) = \int d\theta \sqrt{2 \, . \, \mathcal{J} \, . \, \mathrm{E}_0 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\theta} - 2M \, . \, \mathcal{J} \, . \, \mathrm{H}(1 - \cos\theta)}$$

A l'aide de la relation connue:

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{E}_0} = \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial \mathrm{E}_0} = t - t_0$$

on trouve:

$$t - t_0 = \mathcal{J} \, . \int \frac{d\theta}{\sqrt{2\mathcal{J} \, . \, \mathrm{E}_0 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\theta} - 2 \, . \, \mathcal{J}M \, . \, \mathrm{H}(1 - \cos\theta)}}$$

Nous nous restreignons au cas qui satisfait à la condition:

$$\theta = \text{constant} \, .$$

Or, pour que cette condition soit satisfaite, il faut:

1° que

$$\dot{\theta} = 0$$

c'est-à-dire qu'on ait l'équation:

$$\mathcal{J} \, . \, M \, . \, \mathrm{H}x^3 + \mathcal{J}(\mathrm{E}_0 - \mathrm{H} \, . \, M)x^2 - \mathcal{J} \, . \, M\mathrm{H} \, . \, x - \left[\mathcal{J}(\mathrm{E}_0 - \mathrm{H} \, . \, M) - \frac{\gamma^2}{2}\right] = 0 \qquad (8)$$

ou $x = \cos\theta$.

2° que cette équation possède une racine double en x, car en cas contraire, θ variera avec le temps entre les limites qui sont les racines de l'équation (8); x doit donc satisfaire aussi à l'équation:

$$3 \cdot \mathfrak{J} \cdot M \cdot \mathrm{H} x^2 + 2\mathfrak{J}(\mathrm{E}_0 - M \cdot \mathrm{H})x - \mathfrak{J} \cdot M \cdot \mathrm{H} = 0 \,.$$

MH étant par hypothèse petit, vis-à-vis de E_0, on trouve comme solution approchée des deux équations

$$x = \cos\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot \mathrm{H}}{\mathrm{E}_0}$$

ou E_0 est lié à γ par la relation:

$$\mathrm{E}_0 = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\mathfrak{J}} + \frac{M \cdot \mathrm{H}}{\mathfrak{J}}$$

En négligeant M.H par rapport à γ^2 on a

$$\cos\theta = \frac{\mathfrak{J} \cdot M \cdot \mathrm{H}}{\gamma^2}$$

En appliquant la théorie des quanta, on doit poser:

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = n \cdot h$$

où h, est la constante de Planck et n, un nombre entier positif.

Or

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \varphi} = \gamma \,,$$

donc

$$\gamma = \frac{n \cdot h}{2\pi}$$

et

$$\cos\theta = 4\pi^2 \frac{\mathfrak{J} \cdot M \cdot \mathrm{H}}{n^2 h^2}$$

En désignant par H_n la composante de H perpendiculaire aux plans des anneaux d'électrons on trouve:

$$\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \cdot \cos\theta = 4\pi^2 \frac{\mathfrak{J} \cdot M \cdot \mathrm{H}}{n^2 h^2}$$

Passons maintenant au problème de l'émission du rayonnement caractéristique $\mathcal{K}$ par des molécules soumises à l'action d'un champ magnétique constant.

On admettra que la composante H_n du champ magnétique soit indépendante du temps, ce qui est précisément le point de vue de MM. Sommerfeld et Deby'e dans leur étude du phénomène de Zeeman.

II

Représentons-nous un noyau de charge positive Ze, et un anneau de N électrons qui circulent autour du noyau.

Je désigne dans ce § par H_n la composante de H (champ magnétique) perpendiculaire au plan dans lequel se trouve l'anneau d'électrons en l'absence de tout champ magnétique, et par H_ρ la composante de H tangente au même plan.

Comme origine des coordonnées on prendra le noyau et on disposera des axes, de telle sorte que l'axe des z soit parallèle à H_n.

En introduisant les coordonnées semi-polaires ρ_i, θ_i, z_i ($i = 1$, $2 \ldots$ N) on obtient pour l'expression de l'énergie cinétique des N électrons:

$$T' = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{i=N} \left\{ \dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \dot{z}_i^2 \right\}$$

où μ désigne la masse d'un électron.

Pour le travail élémentaire $d\mathfrak{T}$ des forces magnétiques on obtient facilement l'expression:

$$d\mathfrak{T} = \sum_1^N \frac{e}{c} \left\{ - H_n \rho_i \rho_i' + \dot{z}_i \rho_i \cdot H_\rho \cos\theta \right\} \delta\theta_i$$

$$+ \sum_1^N \frac{e}{c} \left\{ H_n \cdot \rho_i \cdot \dot{\theta}_i + \dot{z}_i \cdot H_\rho \cdot \sin\theta_i \right\} \delta\rho_i -$$

$$- \sum_1^N \frac{e}{c} \left\{ \rho_i \dot{\theta}_i \cos\theta_i + \dot{\rho}_i \cdot \sin\theta_i \right\} H_\rho \cdot \delta z_i$$

e désigne la charge élémentaire et c la vitesse de la lumière.

La fonction de force u ($\varrho_i\ \theta_i\ z_i$) a la propriété connue de satisfaire l'équation:

$$\sum \frac{\partial u}{\partial \theta_i} = 0$$

Pour u on a

$$u = \sum \frac{Ze^2}{r_i} - \sum \frac{e^2}{r_{ij}}$$

Les équations du mouvement des électrons s'écrivent alors:

$$\mu \ddot{\rho}_i - \mu \rho_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{\partial u}{\partial \rho_i} + \frac{e}{c} \left\{ H_n \rho_i \dot{\theta}_2 + \dot{z}_i H_\rho \sin \theta_i \right\} \qquad (a)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \mu \rho_i^2 \dot{\theta}_i \right\} = \frac{\partial u}{\partial \theta_i} + \frac{e}{c} \left\{ - H_n \rho_i \dot{\rho}_i + \dot{z}_i \rho_i H_\rho \cos \theta_i \right\} \qquad (b)$$

$$\mu \ddot{z}_i = \frac{\partial u}{\partial z_i} - \frac{e}{c} \cdot H_\rho \left\{ \rho_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i + \dot{\rho}_i \sin \theta_i \right\} \qquad (c)$$

où $i = 1, 2 \ldots N$.

L'équation relative à l'énergie s'écrit alors:

$$E' = \frac{\mu}{2} \sum \left\{ \dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_i^2 \right\} - u$$

Nous résoudrons ces équations en admettant que les forces mécaniques d'origine magnétique sont faibles vis-à-vis des forces mécaniques d'origine électrique.

Il suit de là, que les déformations de l'orbite provoquées par les forces d'origine magnétique sont aussi très faibles.

Donc, comme en absence du champ magnétique on a $z = 0$, il suit que z et z' seront toujours très petits et négligeables en première approximation.

En ajoutant toutes les équations (b) au nombre de N on obtient:

$$\frac{d}{dt} \sum \left\{ \mu \rho_i^2 \dot{\theta}_i + \frac{1}{2} \frac{e}{c} H_n \rho_i^2 \right\} = \sum \frac{e}{c} \rho_i \dot{z}_i H_\rho \cos \theta_i \qquad (b')$$

En première approximation on peut poser dans la partie droite de l'équation (b') $\dot{z}_i = 0$.

En l'intégrant on obtient:

$$\sum \left\{ \mu \rho_i^2 \dot{\theta}_i + \frac{1}{2} \frac{e}{c} H_n \rho_i^2 \right\} = \Delta \qquad \Delta = \text{constante}$$

En posant:

$$\rho_i = \rho \; ; \qquad \dot{\theta}_i = \theta \qquad (f)$$

pour $i = 1, 2, \ldots$ N (ce qui est permis vu les petitesses des déformations); on obtient:

$$\mu\rho^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{e}{c}\,\mathrm{H}_n\rho^2 = \frac{\Delta}{\mathrm{N}} \qquad (\alpha)$$

En tenant compte de cette équation dans l'équation (a) et négligeant les termes de l'ordre de $\left(\frac{e}{c}\,\mathrm{H}\right)^2$, on trouve:

$$\mu\ddot{\rho}_i - \mu\frac{\Delta^2}{\mathrm{N}^2}\frac{1}{\rho^3} = \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

Cette équation montre qu'en première approximation les champs magnétiques extérieurs n'influent pas sur les rayons vecteurs des électrons.

Quant à la coordonnée z on peut démontrer qu'elle est de l'ordre de $\left(\frac{e}{\mu e}\,\mathrm{H}\rho\right)$.

En effet on peut remplacer dans l'équation (c)

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = -\frac{\mathrm{Z}e^2 z_i}{r_i^3} + e^2\sum\frac{z_j - z_i}{r_{ij}^3}$$

où

$$r_i^2 = \rho_i^2 + z_i^2\,; \qquad r_{ij}^2 = \rho_{ij}^2 + (z_j - z_i)^2$$

par

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = -\frac{\mathrm{Z}\,.\,e^2}{\rho_i^3}\,z_i + e^2\sum\frac{z_j - z_i}{\rho_{ij}^3}$$

$$\left\{\rho_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j\cos(\rho_i\rho_j)\right\}$$

en faisant une erreur de l'ordre de z^2.

L'équation (c) s'écrira alors

$$\mu\ddot{z}_i = -\frac{\mathrm{Z}e^2}{\rho_i^3}\,.\,z_i + e^2\sum\frac{z_j - z_i}{\rho_{ij}^3} - \frac{e}{c}\,.\,\mathrm{H}_\rho\,.\left\{\rho_i\dot{\theta}_i\cos\theta_i + \dot{\rho}_i\sin\theta_i\right\}$$

En posant dans la partie droite de l'équation $\dot{z}_i = 0$ et pour θ_i et ϱ_i leurs expressions si $\mathrm{H} = 0$ on obtient

$$\mu \ddot{z}_i = \frac{e}{c} H_\rho \cdot \rho \frac{d \sin \theta_i}{dt} \qquad (\theta_i = \omega t)$$

d'où

$$\mu \dot{z}_i = \frac{e}{c} H_\rho \cdot \rho \sin \theta_i \ ; \qquad \mu z_i = \frac{e}{c} \frac{H_\rho}{\omega} \cdot \rho \left\{ \cos \omega t - 1 \right\}$$

car pour $t = 0$ on a

$$z_i = 0 \ ; \qquad \dot{z}_i = 0 \ .$$

Tous ces résultats expriment que la composante H_ρ n'a d'influence sur les mouvements des électrons qu'en deuxième approximation. Donc, en première approximation, on doit tenir compte seulement de la composante H_n de l'intensité du champ magnétique.

Pour l'expression de l'énergie totale E_0 en l'absence du champ H, on a selon nos hypothèses:

$$E_0 = \frac{\mu}{2} N \left\{ \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}_0^2 \right\} - u$$

On a pour E' en tenant compte de (f)

$$E' = \frac{\mu}{2} N \left\{ \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}_1^2 \right\} - u$$

En éliminant $\dot{\theta}$ par l'intermédiaire de l'équation (α) et négligeant les termes de l'ordre de $\left(\frac{e}{\mu c} H\right)^2$ on obtient pour E' l'expression:

$$E' = \frac{\mu}{2} N \left\{ \dot{\rho}^2 + \frac{\Delta^2}{N^2} \frac{1}{\rho^2} \right\} - \frac{1}{2} \frac{e}{\mu c} \Delta \cdot H_n - u$$

Or, comme on a aussi

$$\mu \rho^2 \dot{\theta}_0 = \frac{\Delta}{N}$$

il vient:

$$E_0 = \frac{\mu}{2} N \left\{ \dot{\rho}^2 + \frac{\Delta^2}{N^2} \frac{1}{\rho^2} \right\} - u$$

En retranchant E_0 de E' on obtient la relation cherchée:

$$E' = E_0 - \frac{1}{2} \frac{e}{\mu c} \cdot \Delta \cdot H_n$$

Conformément à l'hypothèse de M. Bohr on doit poser

$$\Delta = N \, . \, \frac{m \, . \, h}{2\pi}$$

où h est la constante de Planck et m un nombre entier.

Pour E′ on obtient enfin:

$$E' = E_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{e}{\mu c} \, . \, N \, . \, H_n \, . \, m \, . \, h$$

Avant l'émission on a sur l'anneau à 1 quantum ($n = 1$) 2 électrons et sur l'anneau à 2 quanta ($n = 2$) 9 électrons. L'énergie totale $W_{2,9}$ de ce système est égale à:

$$W_{2,9} = E'_2 + E'_9 = E_{02} + E_{09} - \frac{20}{4\pi} \frac{e}{\mu c} H_n \, . \, h$$

Après l'émission, le premier anneau contient 3 électrons et le second 8 électrons; leur énergie totale $W_{3,8}$ est:

$$W_{3,8} = E'_3 + E'_8 = E_{03} + E_{08} - \frac{19}{4\pi} \frac{e}{\mu c} H_n \, . \, h$$

Or, d'après M. Bohr, on a:

$$h \, . \, \nu = W_{2,9} - W_{3,8}$$

ν fréquence.

Donc si l'on désigne par ν_k la fréquence du rayonnement $\mathcal{K}$ pour H = 0

$$h\nu_k = E_{02} + E_{09} - E_{03} - E_{08}$$

on aura pour la fréquence ν du même rayonnement sous l'influence d'un champ magnétique extérieur:

$$\nu = \nu_k - \frac{1}{4\pi} \frac{e}{\mu c} H_n$$

Or:

$$H_n = 4\pi^2 \mathcal{J} \frac{M \, . \, H^2}{n^2 h^2} \qquad (n = 1, 2 \ldots)$$

donc:

$$\nu = \nu_k - \pi \frac{e}{\mu c} \frac{\mathcal{J} \, . \, M \, . \, H^2}{h^2} \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

L'influence du champ magnétique extérieur sur l'émission du rayonnement caractéristique $\mathcal{K}$ par des molécules se traduit par la décomposition de la raie $\mathcal{K}$ en une série de raies, si les molécules ont un moment magnétique M et se comportent conformément aux hypothèses que nous avons faites.

La série est située du côté des ondes plus courtes que la longueur d'onde de la ligne $\mathcal{K}$.

Le cas étudié ici est un cas très particulier; il a été choisi uniquement à cause de la simplicité qu'il présente au point de vue mathématique pour montrer l'influence du mouvement calorifique sur la longueur d'onde émise dans l'intérieur de la molécule.

III.

Nous allons appliquer maintenant les résultats obtenus à l'émission de spectres analogues à celui de l'hydrogène. Nous supposons que les molécules qui émettent ces spectres ont un moment magnétique M et satisfont à nos hypothèses.

D'après les calculs de M. Sommerfeld on a pour la différence $\Delta\nu$ entre la fréquence du rayonnement émis sous l'influence d'un champ magnétique H, et la fréquence du même rayonnement pour $H = 0$

$$\Delta\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{\mu . c} H_n (s - r)$$

ou $s, r = 1, 2, 3...$

Or

$$H_n = 4\pi^2 \frac{\mathcal{J} . M H^2}{n^2 h^2} \qquad \text{ou} \quad n = 1, 2, 3...$$

donc

$$\Delta\nu = \pi \frac{e}{\mu . c} . \frac{\mathcal{J} M . H^2}{h^2} \frac{(s - r)}{n^2}$$

Il en résulte que chaque ligne du triplet se décompose en une série de nouvelles lignes.

Varsovie, Mai 1921.