

**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 3 (1921)

**Artikel:** Sur une classe importante de jeux de combinaisons  
**Autor:** Rivier, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-741102>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR UNE  
CLASSE IMPORTANTE DE JEUX DE COMBINAISONS

PAR

**W. RIVIER**

(Avec 3 fig.).

INTRODUCTION.

Tout jeu peut être rangé dans une des trois catégories suivantes.

I. *Jeux de hasard.* — Nous appelons jeu de hasard tout jeu dont l'issue dépend entièrement ou partiellement de facteurs sur lesquels ni l'adresse ni l'intelligence des joueurs n'exercent d'influence.

II. *Jeux d'adresse.* — Nous appelons jeu d'adresse tout jeu qui n'appartient pas à la catégorie précédente et dont l'issue dépend entièrement ou partiellement de l'adresse des joueurs.

III. *Jeux de combinaisons.* — Nous appelons jeu de combinaison tout jeu qui n'appartient à aucune des deux catégories précédentes.

Cette dernière catégorie comprend tout un ensemble de jeux menés par deux adversaires jouant alternativement et poursuivant des fins opposées ; les théories que nous développons à propos du jeu des échecs, type le plus achevé de cet ensemble, s'appliquent indistinctement à chacun d'eux, à condition de fixer un sens à la fois général et précis à certaines expressions qui reviendront constamment sous notre plume dans la présente étude.

1. Nous employons l'expression « les blancs » pour désigner celui des deux adversaires qui joue le premier coup de la partie ; l'expression « les noirs » s'applique au deuxième adversaire.

2. Nous appelons *position* l'ensemble des facteurs qui conditionnent, à un moment donné de la partie, le coup qui va se jouer. Ainsi au jeu d'échec, la position est déterminée à chaque instant par la distribution des pièces sur l'échiquier.

3. Une position de *mat* est une position qui, d'après les règles constitutives du jeu envisagé et quand elle est produite par un coup de l'un des deux joueurs, met fin à la partie en faveur de ce joueur.

4. Une position de *pat* est une position qui, lorsqu'elle est produite par un coup de l'un des deux joueurs (ou parfois indifféremment par un coup de l'un ou de l'autre joueur) met fin à la partie sans qu'aucune décision intervienne ; cet effet toutefois doit résulter des règles constitutives du jeu et non pas de telle convention particulière et indépendante de ces règles que l'on aurait fixée, par exemple, au début de la partie.

5. Nous qualifierons d'*ordinaire* toute position qui n'est ni une position de mat ni une position de pat.

6. Une partie terminée sans qu'aucune décision soit intervenue s'appelle une partie *nulle* ou partie *remise*.

7. Enfin, sans préciser plus qu'il n'est nécessaire pour l'instant, rappelons que seul doit être considéré comme *gagnant* un coup qui, à supposer qu'il ne conduise pas sur le champ à une position de mat, ne laisse à l'adversaire que le choix entre des coups perdants, tandis qu'il suffit, pour qu'un coup soit *perdant*, que l'adversaire puisse y répondre par *un* coup gagnant.

§ 1. — Supposons que l'on ait dénombré l'ensemble de toutes les positions qui peuvent se présenter au jeu d'échec ou à tel autre jeu de même nature et soit  $N$  le nombre de ces positions<sup>1</sup>. À chacune d'entr'elles faisons correspondre une des colonnes que nous aurons formées à l'aide de  $N + 1$  verticales tracées dans un plan. En travers de ces  $N$  colonnes, traçons  $S$  lignes horizontales formant  $S - 1$  bandes dont nous teindrons en gris celles qui occupent un rang pair à partir de la plus haute. Le nombre  $S$  sera déterminé tout à l'heure. Sur chacune de ces

<sup>1</sup> Pour les jeux qui fixent notre attention, ce nombre  $N$  est toujours fini. Au jeu d'échec, par exemple, on peut établir qu'il est inférieur à  $65^{16} \times 305^{16}$ .

lignes, marquons un point à l'intérieur de chaque colonne, point qui sera représentatif de la position correspondant à la colonne<sup>1</sup>.

Cela fait, relions par un trait celui des points de la première ligne horizontale qui correspond à la position initiale du jeu à chacun des points de la deuxième ligne qui correspondent à des positions que l'on peut atteindre par un coup des blancs en partant de la position initiale. Puis relions de même chaque point ainsi atteint sur la deuxième ligne à tous les points de la troisième ligne qui correspondent à des positions que l'on peut atteindre par un coup des noirs en partant de la position correspondant à ce premier point; et continuons de la sorte jusqu'à ce que nous soyons parvenus à la dernière ligne du diagramme. Les traits tirés sur les bandes blanches représenteront alors des coups des blancs, ceux tirés sur les bandes grises des coups des noirs.

Considérons maintenant un chemin quelconque, continu, formé à l'aide de ces traits et descendant du point initial de la première ligne, soit jusqu'à un point correspondant à une position de mat ou de pat<sup>2</sup>, soit jusqu'à un point quelconque de la dernière ligne. On se rendra facilement compte que, si  $S$  a été choisi assez grand (égal à  $2N + 1$  par exemple), aucun de ces chemins ne pourra atteindre la dernière ligne en un point correspondant à une position ordinaire sans que deux points au moins de ce chemin ne soient situés dans une même colonne et sur des lignes horizontales de rangs de même parité. Nous choisirons  $S$  égal au plus petit nombre impair satisfaisant à cette condition et nous écrirons ce nombre sous la forme  $2L + 1$  (on aura certainement alors :  $L \leq N$ ). Le diagramme contiendra donc exactement  $L$  bandes blanches et  $L$  bandes grises et se terminera par une bande grise. Cela étant, il est clair que tout chemin de la nature considérée représentera une partie entière si nous introduisons la convention suivante: toute partie non terminée avant le  $(L + 1)^{\text{ième}}$  coup des blancs sera interrompue immédiatement après le  $L^{\text{ième}}$  coup des noirs et déclarée nulle.

<sup>1</sup> Ainsi chaque colonne contiendra  $S$  points représentant tous une seule et même position.

<sup>2</sup> De tels points ne sont naturellement reliés à aucun autre placé au-dessous d'eux.

Cette convention ne change pratiquement rien au caractère du jeu et se trouve justifiée en ce sens que, dans toute partie non terminée avant le  $(L + 1)^{\text{ième}}$  coup des blancs, deux au moins des  $2L + 1$  premiers déplacements de pièces auront été effectués par le même joueur dans la même position. Il importe de remarquer à ce propos que le choix de S entraîne de plus les conséquences suivantes: 1<sup>o</sup> Sur le diagramme de  $2L + 1$  lignes, chacune des N colonnes sera utilisée au moins une fois, ce qui revient à dire que toute position possible peut être atteinte en moins de  $2L + 1$  mouvements de pièces<sup>1</sup>.

2<sup>o</sup> Le diagramme de  $2L + 1$  lignes peut être prolongé indéfiniment sans qu'il soit nécessaire à cet effet de recourir à des données autres que celles qu'on tire de ce diagramme lui-même, ce qui revient à dire que ce diagramme suffit à caractériser intégralement le jeu auquel il correspond<sup>2</sup>,

§ 2. — Nous allons maintenant colorer certains traits du diagramme suivant un principe qui s'appliquera successivement à chaque bande, à condition de commencer par la plus basse et de remonter de proche en proche jusqu'à la première.

I. Nous teignons en vert: 1<sup>o</sup> Sur chaque bande grise: tout trait aboutissant sur le bord inférieur de la bande à un *point de mat* ou (mais ceci ne saurait concerner la dernière bande) à un point

<sup>1</sup> On peut ajouter: Toute colonne correspondant à une position susceptible d'être amenée par l'un et l'autre des joueurs sera utilisée au moins deux fois, une fois sur une ligne de rang impair et une fois sur une ligne de rang pair.

La propriété 1<sup>o</sup> ainsi que la propriété 2<sup>o</sup> énoncée ensuite dans le texte peuvent appartenir à des diagrammes de moins de  $2L + 1$  lignes; il faut et il suffit, en effet, pour qu'un diagramme jouisse de ces deux propriétés qu'il n'y ait pas de colonne qui soit utilisée sur la dernière ligne en un point ordinaire sans l'être au moins une fois auparavant sur une ligne de rang de même parité.

<sup>2</sup> Rien ne s'oppose à ce qu'on assimile à une seule et même position toutes les positions de mat et que l'on en fasse autant pour les positions de pat, à condition toutefois que l'on ait soin de compter pour deux chaque position qui se présente comme d'espèce différente (position de mat, position de pat, position ordinaire) suivant qu'elle résulte d'un coup des blancs ou d'un coup des noirs; cette opération aura le plus souvent comme effet de diminuer le nombre N des colonnes; mais, en revanche, L restera toujours inaltéré.

d'où ne descendent que des traits verts sur la bande blanche contiguë ;

2° Sur chaque bande blanche : tout trait dont l'extrémité inférieure est le point de départ d'au moins un trait vert sur la bande grise contiguë.

II. Nous teignons en rouge : 1° Sur chaque bande grise : tout trait dont l'extrémité inférieure est le point de départ d'au moins un trait rouge sur la bande blanche contiguë (cette opération ne pouvant s'appliquer à la bande la plus basse du diagramme, celle-ci ne sera traversée d'aucun trait rouge);

2° Sur chaque bande blanche : tout trait aboutissant sur le bord inférieur de la bande à un *point de mat* où à un point d'où ne partent que des traits rouges sur la bande grise contiguë.

Ces opérations terminées, assimilons la partie à un mobile qui chemine de haut en bas sur notre diagramme. Le choix de la route appartient aux blancs sur toute bande blanche et aux noirs sur toute bande grise. A l'extrémité inférieure d'un trait rouge, le choix des blancs peut toujours se porter sur un trait rouge tandis que celui des noirs est nécessairement limité à de pareils traits ; il en résulte que, si, à un moment donné, la partie chemine sur la couleur rouge, les blancs pourront l'y maintenir en dépit des efforts des noirs cherchant à échapper au mat qui les attend à l'extrémité de tout chemin rouge. Les chemins verts jouent par rapport aux noirs le même rôle que les chemins rouges par rapport aux blancs. Enfin les blancs ne peuvent abandonner un chemin non coloré que pour s'engager sur un trait vert, les noirs que pour s'engager sur un trait rouge ; il en résulte que, si la partie progresse à un moment donné sur un chemin non coloré, elle y restera tant qu'il n'y aura pas de faute commise de part et d'autre ; or un tel chemin, ne pouvant se terminer ni en un point de mat des noirs, ni en un point de mat des blancs, aboutira nécessairement à un point correspondant à une position de nullité (point de pat ou point de la dernière ligne horizontale autre qu'un point de mat).

§ 3. — Celà dit, si l'on examine la première bande, trois éventualités exclusives les unes des autres peuvent se produire : 1° la première bande contient au moins un trait rouge ; 2° elle ne contient pas de trait rouge, mais elle contient au moins un trait

non coloré; 3° elle ne contient que des traits verts. Dans le premier cas, il faudrait conclure au gain théorique des blanches, dans le deuxième à la nullité théoriquement assurée aux noirs, dans le troisième au gain théorique des noirs. La définition à donner de ce que l'on entend par « partie idéale » dépend essentiellement de celle de ces trois éventualités qui se présente. Nous envisagerons d'abord la deuxième hypothèse.

Devra dans ce cas être appelée « partie idéale » toute partie représentée par un chemin descendant qui n'emprunte au diagramme que des traits non colorés<sup>1</sup>. En effet, sur tout chemin représentant une partie jouée, l'apparition d'un trait rouge (apparition qui se produit toujours sur une bande grise) marque un coup faux des noirs donnant théoriquement le gain aux blanches, tandis que l'apparition d'un trait non coloré faisant suite à un trait rouge, ou celle d'un trait vert faisant suite à un trait rouge ou à un trait non coloré (apparitions qui ne se produisent que sur des bandes blanches) marque une faute des blancs assurant aux noirs la nullité dans le premier cas et le gain dans le deuxième, étant bien entendu, naturellement, qu'aucune autre faute n'est commise ensuite de part et d'autre.

Envisageons maintenant la première hypothèse. On pourra dans ce cas, pour définir la « partie idéale », partir du principe, d'ailleurs discutable, que les blancs ont intérêt à parvenir dans le nombre minimum de coups à une position de mat, tandis que les noirs doivent chercher à faire durer la partie le plus longtemps possible. En raisonnant sur cette base, nous allons indiquer un procédé qui nous permettra non seulement de définir avec précision la notion de partie idéale, mais encore de déceler toutes les parties qui méritent cette qualification.

Appliqué indépendamment des trois hypothèses ci-dessus, ce procédé montrera en même temps comment les blancs pourront exploiter de la manière la plus rapide toute faute commise par les noirs et entraînant leur perte, la résistance de ces derniers, une fois la faute faite, supposée maximum.

Ce procédé consiste à affecter les extrémités des traits rouges

<sup>1</sup> Il est important de remarquer qu'un trait non coloré peut toujours être prolongé jusqu'à un point de pat ou à un point de la dernière ligne et qu'il existe donc des parties de l'espèce envisagée.

tirés sur les bandes blanches de coefficients choisis d'après une loi qui s'appliquera successivement à chaque bande blanche, à condition de partir de la dernière et de remonter de proche en proche jusqu'à la première. Pour plus de clarté, imaginons un instant qu'on ait effacé sur le diagramme tout trait qui ne soit pas rouge et tout point qui ne soit pas une extrémité d'au moins un trait rouge. Dans ces conditions nous pouvons énoncer notre loi de la manière suivante :

1. Sur le bord inférieur de chaque bande blanche, nous affèterons tout point de mat du coefficient 0, et tout autre point d'un coefficient égal à la valeur maximum des coefficients affectant les points reliés à lui et situés sur le bord supérieur de la bande blanche immédiatement au-dessous<sup>1</sup>.

2. Un point quelconque du bord supérieur d'une bande blanche quelconque sera affecté d'un coefficient égal au nombre que l'on obtient en ajoutant 1 à la valeur minimum des coefficients affectant les points reliés à ce premier point et situés sur le bord inférieur de la bande.

Ces coefficients placés, nous pouvons énoncer les trois propositions suivantes :

1. Le coefficient affectant l'extrémité supérieure d'un trait rouge quelconque tracé sur une bande blanche exprime le nombre minimum de coups qu'il faut aux blancs pour parvenir, en partant de la position représentée par ce point, à une position de mat, à supposer que les noirs offrent à chaque instant leur maximum de résistance<sup>2</sup>.

2. La suite des coups réalisant ce résultat sera représentée par tout chemin descendant, rouge, partant du point considéré et passant par une succession de points tels que leurs coefficients aillent en diminuant d'une unité quand le chemin traverse une bande blanche et demeurent inaltérés quand il traverse une bande grise.

<sup>1</sup> Il est essentiel de remarquer que cette seconde partie du principe ne concerne pas le bord inférieur de la dernière bande blanche, sur lequel les points envisagés ne peuvent être que des points de mat.

<sup>2</sup> En termes plus précis, le coefficient exprime le nombre de coups le plus petit que les blancs peuvent s'astreindre à ne pas dépasser pour parvenir au mat.

3. Il y aura au moins un chemin de cette nature pour chaque extrémité supérieure de trait rouge tracé sur bande blanche.

Appliquons maintenant ces résultats au cas de la première éventualité. Le point initial est alors affecté d'un coefficient et nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

I. Il existe une ou plusieurs parties idéales.

II. Le coefficient affectant le point initial exprime le nombre de coups des blancs que comportent cette ou ces parties idéales.

III. Représentera une partie idéale tout chemin rouge et descendant qui, partant du point initial, passe par des points dont les coefficients satisfont aux conditions énoncées précédemment (voir la proposition 2 ci-dessus).

En opérant d'une manière analogue sur les traits verts tirés sur les bandes grises, nous parviendrons à des conclusions toutes semblables concernant les parties gagnées par les noirs et la troisième éventualité.

Dans l'exemple illustré par notre diagramme A, figurent simultanément les coefficients relatifs aux chemins rouges et verts. Ce diagramme correspond à un jeu fictif pour lequel on a :  $N = 7$  et  $L = 3$ ; parmi les sept positions possibles, il y en a une de mat des noirs (V), une (VI) de mat des blancs et une (VII) de pat des noirs; les quatre autres sont des positions ordinaires.

On constatera que ce jeu n'admet qu'une partie idéale, à savoir la partie

I II III I IV V

gagnée en trois coups par les blancs.

§ 4. — Dorénavant nous raisonnons sur un diagramme construit comme le précédent, mais dont le nombre  $S$  de lignes horizontales sera donné par la formule :

$$S = 2\Lambda_k + 2r + 1$$

où  $r$  représente un entier  $\geq 0$  et  $\Lambda_k$  le plus petit des nombres  $\Lambda$  satisfaisant à la condition suivante : tout chemin aboutissant en un point ordinaire sur la dernière ligne du diagramme construit avec  $2\Lambda + 1$  lignes possède au moins  $k + 1$  points situés dans une même colonne et sur des lignes de rangs de

même parité. On démontre aisément que l'on a :  $\Lambda_k \leq kN$ . Il importe de remarquer en outre que par définition :  $\Lambda_1 = L$  et qu'en conséquence, si l'on choisit  $k = 1$  et  $r = 0$ , on retrouve le diagramme primitif. Il sera bien entendu que, dans ce qui suivra,  $r$  et  $k$  sont supposés fixés une fois pour toutes.

Diagramme A.

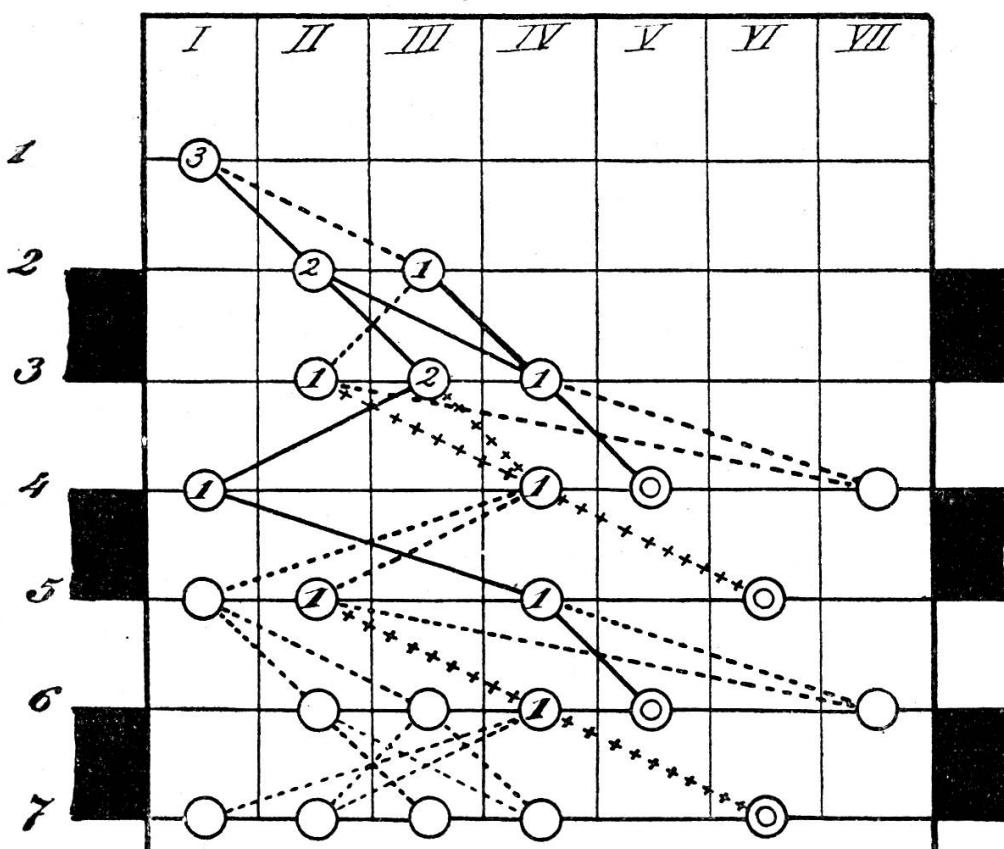
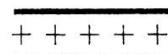


Fig. 1.

Traits rouges

Traits verts

Traits non colorés



*Observation :* Au point III 3 devrait figurer un deuxième coefficient, à savoir : le coefficient 1, relatif à la couleur verte.

En chaque point de ce nouveau diagramme, nous ne ferons figurer que le coefficient relatif à la couleur des traits dont ce point forme l'extrémité inférieure (tous ces traits sont alors colorés de la même manière). Si ces traits ne sont pas colorés, le point sera considéré comme n'admettant pas de coefficient<sup>1</sup>. En

<sup>1</sup> Il faudra assimiler le point initial à l'extrémité inférieure d'un trait rouge, non coloré ou vert, suivant celle des trois éventualités envisagées plus haut (v. § 3) qui se présente.

outre, pour distinguer les coefficients relatifs aux traits verts des autres, nous les affecterons du signe —. Grâce à ces conventions les différences de coloration deviennent superflues : un trait équivaudra à un trait rouge, non coloré ou vert, suivant qu'à son extrémité inférieure figurera un coefficient positif, ne figurera pas de coefficient, ou figurera un coefficient négatif<sup>1</sup>. Ajoutons qu'il est bien entendu qu'une nouvelle convention de nullité limitant la partie à  $S - 1$  déplacements de pièces a remplacé la première. Nous donnerons à cette nouvelle convention le nom de *convention généralisée (d'ordre S)* pour la distinguer de l'ancienne qui sera dite « convention primitive ».

Il sera utile de définir tout de suite quelques autres termes se rapportant au nouveau diagramme (nous désignerons désormais ce dernier sous le nom de diagramme généralisé).

Seront dits *similaires* deux points<sup>2</sup> situés dans la même colonne et sur des lignes horizontales de rangs de même parité.

Sera appelé *tronçon* une portion quelconque, pouvant éventuellement se réduire à un trait, d'un chemin représentant une partie.

Sera qualifié de *direct* tout tronçon tel que les coefficients de ses points se succèdent suivant la loi énoncée plus haut (v. § 3, prop. 2.) dans le cas où le premier coefficient du tronçon est positif, et suivant la loi correspondante (augmentation d'une unité quand le chemin traverse une bande grise et pas de changement quand il traverse une bande blanche) dans le cas où le premier coefficient du tronçon est négatif.

Seront dits *justes*: 1. tout trait dont les deux extrémités n'admettent pas de coefficient ; 2. tout trait constituant un tronçon direct. Tout autre trait sera appelé *trait de faute*. Un trait de faute sera dit de première espèce ou de deuxième espèce suivant qu'il est tiré sur une bande blanche ou sur une bande grise.

§ 5.— Celà posé, nous nous proposons de substituer à la conven-

<sup>1</sup> Dans le cas où son extrémité inférieure est affectée du coefficient 0, le trait équivaudra à un trait rouge ou vert, suivant qu'il est tiré sur une bande blanche ou sur une bande grise.

<sup>2</sup> Bien entendu le nom de *point* est réservé, ici comme ailleurs, aux extrémités des traits figurant sur le diagramme.

tion généralisée une troisième convention que nous appellerons la *convention normale d'ordre k* et qui s'énonce comme suit: La partie est interrompue et déclarée nulle à l'instant où pour la première fois l'un des deux joueurs se retrouve avec le trait devant une position qu'il a déjà rencontrée auparavant  $k$  fois dans les mêmes conditions.

Le point représentant cette position à sa  $(k + 1)^{\text{ième}}$  apparition dans la partie sera dit « *1<sup>er</sup> point d'itération d'ordre k* » du chemin correspondant, et la position elle-même la première position d'itération d'ordre  $k$  de la partie.

La convention normale d'ordre  $k$  une fois introduite, le coefficient d'un point donné du diagramme généralisé gardera-t-il sa signification ou la perdra-t-il? L'un et l'autre cas peuvent se présenter suivant le chemin qui a conduit à ce point; dans le second cas, deux éventualités sont à envisager: ou il faudra augmenter la valeur absolue du coefficient, le nombre minimum de coups dont doit disposer le gagnant s'étant accrû par suite des restrictions introduites, ou il faudra supprimer le coefficient, la position correspondante s'étant transformée en une position où le gain ne peut être forcé ni d'un côté ni de l'autre<sup>1</sup>.

Les propositions suivantes, qui se déduisent sans peine les unes des autres, vont nous permettre de nous rendre plus exactement compte de ce qui se passera.

*Théorème I.* — Si l'on substitue à la convention généralisée la convention normale d'ordre  $k$ , toute partie aura encore sa représentation complète sur le diagramme généralisé. Cette représentation sera constituée soit par un chemin aboutissant à un point de mat ou de pat et ne présentant pas de point d'itération d'ordre  $k$ , soit par un chemin interrompu à son premier point d'itération d'ordre  $k$ .

*Lemme I.* — Si, sur le diagramme construit avec  $S$  lignes,  $A'$  est un point similaire de  $A$ , situé au-dessous de  $A$ , et si  $A$  admet un coefficient,  $A'$  admettra ce même coefficient ou n'en admettra pas. Si  $x$  désigne la valeur du coefficient de  $A$  et  $y$  le numéro d'ordre de la ligne horizontale sur laquelle se trouve

<sup>1</sup> C'est dans ce dernier cas qu'on se trouvera en particulier, si le point considéré est le premier point d'itération d'ordre  $k$  du chemin suivi.

$A'$ , la condition nécessaire et suffisante pour que  $A'$  admette le coefficient  $x$  s'exprimera par la relation :

$$y + 2x < S + 1$$

si  $x$  est positif, et la relation :

$$y - 2x \leq S + 1$$

si  $x$  est négatif.

*Lemme II.* — Un tronçon direct ne peut jamais présenter de points similaires.

*Lemme III.* — Un tronçon limité en deux points similaires affectés de coefficients possède au moins un trait de faute, de première espèce, si les deux coefficients extrêmes sont positifs, de deuxième espèce, si ces deux coefficients sont négatifs.

*Théorème II.* — Si, après l'introduction de la convention normale d'ordre  $k$ , le coefficient marqué en un point appartenant à un chemin représentatif (dans l'hypothèse de cette convention) d'une partie complète<sup>1</sup> a perdu sa signification pour ce chemin, ce dernier présente avant le point considéré au moins  $k$  traits de fautes, de première espèce ou de deuxième espèce, suivant que le coefficient à modifier ou à supprimer est positif ou négatif.

Nous pouvons déduire de ce théorème les remarques suivantes :

1. Dans le cas où les parties idéales définies comme précédemment, mais à l'aide du diagramme généralisé, c'est-à-dire donc en appliquant la convention généralisée, sont gagnantes, l'ensemble de ces parties reste identique à lui-même quand on substitue à la convention généralisée la convention normale d'ordre  $k$ . Dans le cas où ces parties idéales sont nulles, il en sera encore de même, à condition de limiter à sa première position d'itération d'ordre  $k$  chacune de celles qui en possèdent.

2. Soit  $k = 1$ . Puisque la remarque précédente s'applique quelle que soit la valeur attribuée à  $r$  dans l'expression de  $S = 2L + 2r + 1$ , on peut affirmer que l'ensemble des parties idéales dans le cas de la convention généralisée est indépendant

<sup>1</sup> Ce chemin ne présente donc pas de point d'itération d'ordre  $k$  avant le point considéré.

du nombre pair  $S - 1$  de déplacements de pièces auquel cette convention limite la partie, à condition toutefois que ce nombre reste égal ou supérieur à  $2 \Lambda_1 = 2 L$  et que, dans l'hypothèse des parties idéales nulles, ces parties soient interrompues à leur première position d'itération d'ordre 1.

Cette dernière remarque peut être généralisée comme suit :

*Théorème III.* — Dans le cas de la convention généralisée, l'ensemble des parties présentant  $k - 1$  coups faux des blancs au plus et  $k - 1$  coups faux des noirs au plus (coups correspondant respectivement à des traits de faute de première et de deuxième espèce) est indépendant<sup>1</sup> du nombre pair  $S - 1$  de déplacements de pièces auquel cette convention limite la partie, à condition toutefois que ce nombre reste égal ou supérieur à  $2\Lambda_k$  et que l'on interrompe à la première position d'itération d'ordre  $k$  celles de ces parties qui en possèdent<sup>2</sup>.

Outre la convention primitive, la convention généralisée d'ordre  $S$  et la convention normale d'ordre  $k$ , il y aurait encore à envisager celle que nous pourrions appeler la *convention usuelle d'ordre k* et qui limite la partie à la position correspondant à l'extrémité inférieure du *premier trait d'itération d'ordre k*, en désignant par cette expression le premier trait dont les extrémités supérieure et inférieure sont respectivement des points similaires des extrémités supérieures et inférieures de  $k$  autres traits le précédent sur le chemin qui figure la partie. Toute partie régie par cette convention trouvera sa représentation complète sur un diagramme de  $2\Lambda_{k\mu} + 3$  lignes,  $\mu$  désignant le plus grand des nombres obtenus en comptant en chaque point du diagramme primitif les traits qui ont ce point comme extrémité supérieure ( $\mu$  est certainement inférieur ou égal à  $N$  et par suite  $\Lambda_{k\mu}$  à  $kN^2$ ).

§ 6. — Si l'on envisage les points qui, sur un diagramme donné, ne sont affectés d'aucun coefficient, il importe de distinguer entre

<sup>1</sup> Par ensemble indépendant il faut entendre un ensemble de parties qui non seulement restent les mêmes, mais encore ne subissent aucune modification quant aux coefficients des points se succédant sur les chemins qui les représentent, quand on change de convention.

<sup>2</sup> De telles positions correspondent nécessairement à des points sans coefficient sur le diagramme généralisé.

ceux qui conservent ce caractère quand on prolonge le diagramme d'un nombre quelconque de lignes, et ceux qui ne jouissent pas de cette propriété. Nous conviendrons d'affecter les premiers du coefficient  $\infty$  tandis que nous continuerons à considérer les seconds comme n'en possédant aucun sur le diagramme donné.

Cela posé, il est facile de démontrer qu'un point affecté du coefficient infini sur un diagramme donné conserve cette propriété sur tout autre diagramme et la partage avec tous ses similaires (v. Lemme I).

En outre les remarques que nous avons déduites du théorème II nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

*Théorème IV.* — Pour tout jeu à parties idéales nulles, tout point appartenant au chemin représentatif de l'une quelconque de ces parties limitée à sa première position d'itération d'ordre 1 est affecté du coefficient infini.

Si le jeu comporte des parties idéales gagnantes, l'existence de points à coefficients  $\infty$  autres que des points de pat n'est pas assurée (v. Diagramme A).

Pour distinguer sur un diagramme donné les points qu'il faudra affecter du coefficient  $\infty$  de ceux qui resteront sans coefficient, nous pourrons utiliser les propositions suivantes :

*Lemme IV.* — Sur le diagramme de  $S = 2\Lambda_k + 2r + 1$  lignes, tout point sans coefficient possède au-dessus de lui au moins  $k - 1$  points similaires à coefficients positifs ou négatifs.

Les Lemmes I et IV nous permettent d'affirmer :

*Théorème V.* — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point du diagramme primitif admette le coefficient  $\infty$  est que ni ce point, ni aucun de ses similaires ne soient affectés de coefficients positifs, négatifs ou nuls sur le diagramme généralisé de  $2\Lambda_2 + 1$  lignes.

Ce théorème établit la possibilité d'obtenir, en opérant sur le diagramme de  $2\Lambda_2 + 1$  lignes et en se servant du lemme I, un diagramme de  $2L + 1$  lignes sur lequel chaque point soit affecté d'un coefficient (limité ou infini). Les indications fournies par ce nouveau diagramme, que nous pourrions dénommer le *diagramme fondamental* se rapporteront aux  $2L$  premiers déplacements de pièces de toutes les parties possibles jouées.

sans fixation préalable d'une convention de nullité d'aucune sorte. Relativement à ce diagramme fondamental, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*Théorème VI.* — Pour obtenir le diagramme fondamental, il suffit de réduire purement et simplement à ses  $2L + 1$  lignes le diagramme généralisé de  $2(L + N) + 1$  lignes ( $k = 1; r = N$ ).

La démonstration de ce dernier théorème s'appuie sur le lemme suivant :

*Lemme V.* — La valeur absolue d'un coefficient positif ou négatif ne peut jamais dépasser  $N^1$ .

#### APPENDICE

Le jeu auquel correspond le diagramme B est figuré ci-dessous. Au premier coup, le blanc s'introduit obliquement dans le carré de 9 cases, après quoi la partie se poursuit selon les règles du jeu de dames, les deux pions se comportant comme des dames auxquelles il serait interdit de sortir du carré de 9 cases.

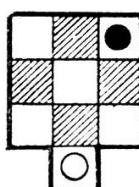


Fig. 2.

Ce jeu ne présente pas de positions de pat et les diverses positions de mat ont été assimilées à une seule et même position. On a dans ces conditions :  $N = 12$ . On trouve d'autre part :  $L = 3; \Lambda_2 = 5; \Lambda_3 = 7; \Lambda_4 = 9; \dots$ ; d'une manière générale :  $\Lambda_k = 2k + 1$ . Le diagramme figuré est le diagramme généralisé d'ordre  $S = 19$ , c'est dire qu'il est caractérisé indifféremment par l'un des 4 systèmes de valeurs de  $k$  et de  $r$  : ( $k = 1; r = 6$ ), ( $k = 2; r = 4$ ), ( $k = 3; r = 2$ ) ou ( $k = 4; r = 1$ ).

<sup>1</sup> Cette proposition peut être remplacée par la suivante, un coefficient ne peut jamais dépasser en valeur absolue le plus petit des deux nombres  $N$  et  $\Lambda_2$ .

$r = 0$ ). Sur ce diagramme, on ne constatera la présence que d'un seul point sans coefficient, à savoir le point figuré par un cercle plein ; les cercles vides y représentent les points à coefficients infinis.

Diagramme B.

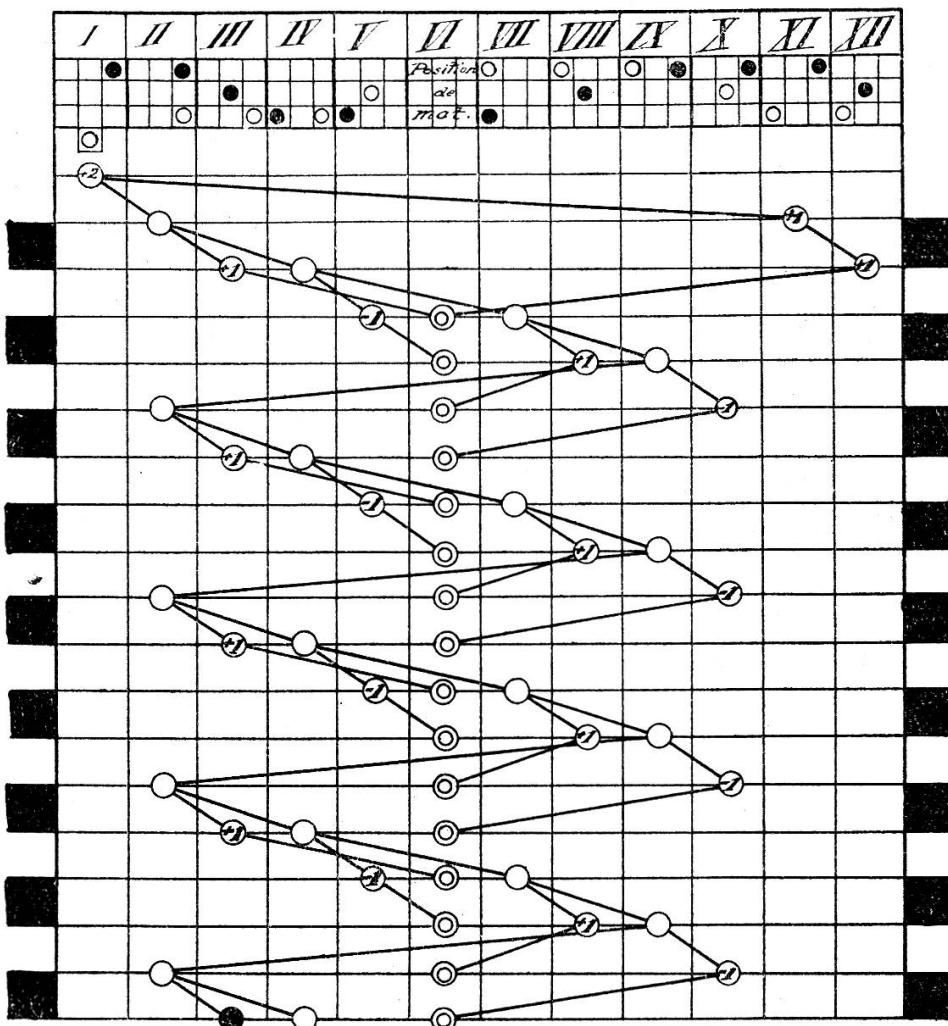


Fig. 3.

Le retour, à la huitième ligne, de la *période* que l'on voit débuter à la quatrième est un phénomène d'un ordre général qui se produira plus ou moins tard suivant le jeu envisagé. En effet, si l'on prolonge de ligne en ligne le diagramme correspondant, on finira par aboutir à une ligne présentant exactement les mêmes points ordinaires que l'une de celles de rangs de même parité qui la précédent; c'est la portion du diagramme comprise entre ces deux lignes que nous désignons sous le nom

de *période*, parce qu'elle se reproduira sans cesse si l'on prolonge indéfiniment le diagramme. Dans tous les cas, la période figurera intégralement au moins une fois sur le diagramme de  $2^{n+1} - 1$  lignes.

Dans cette étude, nous avons admis implicitement que les jeux envisagés comportaient des parties à nombre illimité de coups. Les § 1, 2 et 3 s'étendent presque sans modifications aux jeux qui ne présentent pas ce caractère : il suffit de laisser tomber les considérations relatives à la convention de nullité (v. § 1) et de remplacer la définition donnée pour L par la suivante : L représente le nombre maximum de coups des blancs que peut comporter une partie au jeu envisagé ; en revanche, le contenu des § 4, 5 et 6, ainsi que les considérations finales, perdent toute signification pour les jeux de cette espèce particulière.

Lausanne, août 1920.

---