Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 3 (1921)

Artikel: Les bases logiques de la théorie de relativité généralisée [suite et fin]

Autor: Schidlof, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-741100

LES BASES LOGIQUES

DE LA

THÉORIE DE RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE

PAR

A. SCHIDLOF

(Suite et fin).

IV. — La théorie de relativité généralisée.

Il est facile à voir que sous son nouvel aspect la conception relativiste est en contradiction avec le point de départ de la théorie restreinte.

Si la vitesse de la lumière est constante dans un système galiléen, elle ne le sera plus dans un système de référence qui effectue, par rapport au système galiléen, un mouvement quelconque, car si les rayons lumineux ont des trajets rectilignes dans un système galiléen, ces trajets seront, en général, curvilignes dans un système de référence animé d'un mouvement tournant. Du point de vue actuel, nous pouvons remplacer le mouvement curviligne d'un système par un certain champ de gravitation physiquement équivalent à ce mouvement. Il en résulte que *la vitesse de la lumière peut varier sous l'influence d'un champ de gravitation*[1].

[1] La courbure du rayon lumineux indique, selon le principe de Huyhens, une vitesse de propagation variable d'un point du champ à l'autre.

La vitesse de la lumière est toutefois constante dans tous les cas où l'action de la gravitation est négligeable. Dans l'état actuel de la physique, le principe de la constance de la vitesse de la lumière doit être considéré comme un principe expérimental très précis. Il est au moins aussi exact que l'indiquent les limites de précision de l'expérience de Michelson et Morley. Il n'est cependant pas d'une précision absolue, car les observations faites, au cours de l'éclipse totale de soleil du 29 mai 1919, ont mis en évidence la courbure des rayons lumineux produite par le champ de gravitation du soleil. La prévision théorique d'Einstein a été vérifiée quantitativement, et c'est là évidemment un argument expérimental décisif en faveur d'une conception franchement relativiste.

Si l'on abandonne le postulat d'une vitesse constante de la lumière, le continu chrono-spatial perd, en principe, toute propriété métrique. Cette indétermination est d'ailleurs nécessaire, car sous l'influence d'un mouvement curviligne, soit d'un champ de gravitation équivalent, la matière prend des propriétés métriques *incompatibles* avec celles du continu de Minkowski. On peut s'en convaincre à l'aide de l'exemple suivant donné par Einstein :

Considérons un système matériel tournant autour d'un certain axe avec une vitesse angulaire constante. Supposons des montres *identiques* disposées à des distances différentes de l'axe de rotation. Il résulte alors des conventions métriques de la théorie restreinte, applicables, de notre point de vue actuel, à la matière, mais non pas à l'espace, que les montres marchent d'autant plus lentement qu'elles sont plus éloignées de l'axe. La vitesse circonférencielle des montres est, en effet, d'autant plus grande que leur distance à l'axe est plus grande. D'après l'hypothèse chronométrique fondamentale de la théorie restreinte le retard dépend du carré de la vitesse, soit de l'*énergie* du champ de la force centrifuge. Si l'on attribue à ce résultat une signification générale pour un champ de gravitation quelconque, on peut calculer, d'après le même principe, le retard que subit une montre, soit la période des oscillations d'un électron émettant une raie spectrale, dans le champ de gravitation du soleil[1]. C'est ce qu'a fait Einstein. Il a pu ainsi prévoir, quantitativement, le déplacement vers le rouge que doivent subir les raies spectrales solaires. Cette seconde prévision semble actuellement aussi vérifiée avec une exactitude suffisante.

En ce qui concerne le principe métrique selon lequel la longueur d'un étalon dépend de sa vitesse, on obtient un résultat assez surprenant à première vue, en l'appliquant à l'exemple du corps tournant. Mesurons la circonférence d'un cercle, tracé dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et centré sur cet axe, puis, avec la même échelle, le diamètre de cette circonférence. Nous trouverons alors que le rapport entre la longueur de la circonférence et celle du diamètre est en tous cas inférieur à $\pi = 3{,}14...$, parce que la contraction de Lorentz intervient dans la première mesure, et non pas dans la seconde. L'écart sera d'autant plus grand que le carré de la vitesse, respectivement l'énergie du champ de gravitation, est plus grand. Il en découle la conséquence que, dans un champ de gravitation, la matière prend une métrique non-euclidienne.

La métrique de la matière est ainsi en général variable d'un point du continu chrono-spatial à l'autre, et si l'on impose à ce continu une métrique fixe, toute théorie physique devient impossible. Pour satisfaire au postulat fondamental de la relativité, il est donc nécessaire de renoncer à *toute* convention métrique imposée au continu chrono-spatial a priori, c'est-à-dire indépendamment des propriétés métriques de la matière.

[1] D'après la théorie restreinte la période T′ d'une montre animée d'une vitesse v est :

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - v^2}}$$

T étant la période de la même montre à l'état de repos. Si la montre se trouve à la distance r de l'axe du système tournant, et si ω est la vitesse angulaire, on a : $v^2 = \omega^2 r^2 = -2U$. U est l'énergie potentielle du champ de la force centrifuge à une distance r de l'axe. Dans le champ de gravitation d'un astre on a approximativement : $U = -\frac{\alpha}{r}$, α étant une grandeur proportionnelle à la masse de l'astre et r la distance entre le point considéré et le centre de l'astre. On obtient ainsi : $T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{2\alpha}{r}}}$.

formule qui indique un déplacement vers le rouge des raies spectrales.

Ceci dit, le postulat de relativité peut être énoncé mathématiquement comme suit :

Les lois physiques doivent avoir une forme covariante, vis-à-vis d'une transformation quelconque des coordonnées auxquelles on les rapporte.

Mettre les lois physiques sous une forme covariante vis-à-vis d'une transformation quelconque des coordonnées, est un problème purement mathématique qu'Einstein a eu la chance de trouver tout résolu au moment où il voulait achever sa théorie:

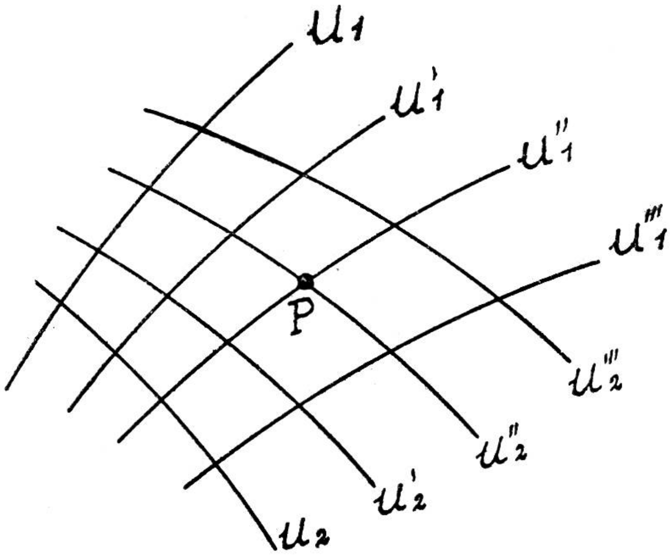

Fig. 2.

Dans un but d'analyse mathématique pure Gauss s'était posé le même problème ; sa théorie des surfaces en donne la solution. Une surface quelconque est un continu non-euclidien à deux dimensions. On peut tracer sur la surface deux familles de courbes quelconques. A chaque courbe de la première famille correspond une valeur constante d'un certain paramètre u_1 variant d'une façon continue entre cette courbe et les portions voisines de la surface. Il en est de même du paramètre u_2 attribué aux courbes de la seconde famille. Les courbes sont tracées de telle façon que chaque point P du continu est traversé par une seule courbe u_1 et par une seule courbe u_2 (voir la figure 2). La position d'un point quelconque du continu peut alors être caractérisée par les valeurs numériques des paramètres u_1 et u_2 qu'on appelle les coordonnées de Gauss.

Soient alors deux points infiniment voisins, le point P avec les coordonnées u_1 et u_2 et le point P' avec les coordonnées

$$u_1' = u_1 + du_1 \qquad \text{et} \qquad u_2' = u_2 + du_2 \, .$$

Le carré de la distance ds des points P et P' est défini par:

$$ds^2 = g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2 \tag{1}$$

Les coefficients g_{11}, g_{12}, g_{22} sont certaines fonctions de u_1 et de u_2. La forme de ces fonctions dépend évidemment des coordonnées choisies.

La proposition (1) n'est pas vraie d'une façon générale, mais seulement dans le cas où une portion infiniment petite de la surface se comporte comme un élément plan, en d'autres termes si la géométrie euclidienne est applicable dans l'infiniment petit.

En maintenant cette même restriction on peut utiliser les coordonnées de Gauss pour étudier la géométrie d'un continu quelconque à n dimensions. Le carré de la distance entre deux points infiniment voisins est exprimé par la formule:

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik}\, du_i\, du_k \, . \tag{2}$$

$$(i, k = 1, 2, 3 \ldots n)$$

La somme Σ renferme les n^2 produits $du_i du_k$. On peut en réduire le nombre de termes à $\frac{n(n+1)}{2}$ en tenant compte de la condition de symétrie des coefficients: $g_{ki} = g_{ik}$. Pour $n = 4$, il y a dix coefficients distincts. Ces coefficients sont des fonctions des n coordonnées u_i. On les appelle les composantes covariantes du «tenseur métrique». B. Riemann a pris la formule (2) comme point de départ de ses recherches sur les propriétés des continus non-euclidiens à n dimensions. La théorie de Gauss conduit au résultat important que la métrique d'une surface, dans le voisinage d'un point donné, est caractérisée, indépendamment des coordonnées choisies, par une seule grandeur que Gauss appelle la courbure. La courbure de Gauss se détermine par des mesures faites uniquement sur la surface même. Elle devient nulle pour une surface plane.

Riemann (14) a trouvé que la courbure de Gauss peut servir à l'étude des propriétés métriques générales des continus à n dimensions. Les mailles des réseaux des coordonnées de Gauss définissent $\frac{n(n-1)}{2}$ surfaces infiniment petites qui se rencontrent en un point du continu. L'invariant de courbure d'une surface quelconque passant par le point considéré s'obtient sous forme d'une expression quadratique de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables superficielles. Cette expression est la somme des produits des variables mentionnées, prises deux à deux et multipliées par des coefficients qui satisfont à certaines conditions de symétrie. Les coefficients distincts dont le nombre est $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ sont les composantes d'un tenseur appelé le tenseur de Riemann-Christoffel. Ce tenseur à 6 composantes pour $n = 3$, et 20 pour $n = 4$, fonctions des g_{ik} et de leurs dérivées premières et secondes. Si les g_{ik} sont des constantes, toutes leurs dérivées sont nulles, et alors toutes les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel sont également nulles; la géométrie du continu est euclidienne. Si la courbure est constante dans toutes les directions autour d'un point donné, elle est aussi la même pour tous les points du continu, et la géométrie est alors, ou bien la géométrie « hyperbolique » de Lobatchewski, ou bien la géométrie « elliptique » de Riemann.

L'emploi des coordonnées de Gauss permettant de s'affranchir de toute restriction métrique, Einstein a pu éprouver la valeur de sa théorie en abordant le problème capital de la gravitation universelle. Pour trouver la loi générale de la gravitation, il faut, avant tout, mettre les lois empiriques sous une forme satisfaisant au postulat fondamental de la théorie de relativité généralisée (15).

Par rapport à un système galiléen, le mouvement d'un point matériel libre est rectiligne et uniforme. Dans la géométrie générale de Riemann il n'existe pas de ligne droite, mais elle a son équivalent dans la ligne géodésique qui joue un rôle important dans les recherches analytiques de Gauss, de Riemann et des continuateurs de leurs théories. La ligne géodésique est la ligne la plus courte, ou plus exactement, la ligne dont la longueur entre deux points donnés est un extrêmum. Exprimée au moyen des coordonnées de Gauss, l'équation d'une géodésique peut aussi être interprétée comme l'équation du mouvement d'un point matériel sous l'influence d'un champ de gravitation. Cette équation n'a pas une forme covariante, et elle ne doit pas l'avoir, car, par un choix approprié des coordonnées, on doit pouvoir attribuer au mouvement d'un point un caractère cinématique quelconque.

Désignons par ds l'élément d'arc de la courbe géodésique. Celle-ci est alors caractérisée dans un continu riemannien à quatre dimensions par quatre équations différentielles de la forme suivante :

$$\frac{d^2 u_l}{ds^2} = \sum_{i,k} \Gamma^l_{ik} \frac{du_i}{ds} \frac{du_k}{ds} \tag{3}$$

$$(l = 1, 2, 3, 4)$$

Les dérivées $\frac{du_i}{ds}$ signifient la direction de l'élément d'arc par rapport aux coordonnées, et $\frac{d^2 u_l}{ds^2}$ est, par conséquent, le changement de direction. Les coefficients Γ^l_{ik} sont des fonctions linéaires homogènes des dérivées premières $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_l}$. Pour $n = 4$ le membre droit des équations (3) renferme dix coefficients distincts Γ^l_{ik}. Si l'on attribue à ds la signification de la *durée* d'un déplacement infiniment petit[1], les $\frac{d^2 u_l}{ds^2}$ sont les composantes de l'*accélération* et les $\frac{du_i}{ds}$ celles de la *vitesse* (à quatre dimensions) du mouvement. Les coefficients Γ^l_{ik} sont alors les *composantes du champ de gravitation*. Il y en a 40 en tout.

Ces 40 coefficients Γ^l_{ik} et leurs dérivées premières par rapport aux coordonnées u_i interviennent dans les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel qui s'expriment complètement au

[1] Dans la théorie de Minkowski, l'élément d'arc ds dont les composantes spatiales sont dx, dy, dz signifie la « durée propre » du déplacement infiniment petit en question, c'est-à-dire la durée qui serait marquée par une montre accompagnant la matière qui se déplace.

moyen de ces grandeurs. Les composantes du champ de gravitation satisfont donc à certaines relations covariantes parmi lesquelles doit se trouver la loi cherchée de la gravitation universelle. Toutefois cette loi elle-même est d'abord indéterminée, car étant donnée une relation covariante on peut en déduire une infinité d'autres. Comment savoir laquelle de toutes les relations possibles exprime la loi cherchée? Voici de quelle façon Einstein a pu résoudre ce problème : Au postulat de relativité généralisée il adjoint :

1. *Le principe de l'égalité de la masse inerte et de la masse pondérable;* cela veut dire que la métrique du continu ne doit dépendre que de la répartition des masses inertes, le champ de gravitation n'étant autre chose que le « champ métrique ».

2. *Les principes de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement qui doivent s'appliquer non seulement au « champ matériel » mais aussi au champ de gravitation.*

3. *Le postulat purement mathématique que les équations aux dérivées partielles exprimant la loi de gravitation en fonction des Γ^l_{ik} et de leurs dérivées ne doivent pas être d'un ordre supérieur au deuxième par rapport aux g_{ik}.*

D'après la théorie restreinte, les principes de conservation indiquent que la divergence du « tenseur d'énergie » T_{ik} doit être nulle. Il faut d'abord adapter ces formules au postulat de covariance des lois physiques en y introduisant les coordonnées de Gauss. Sous cette nouvelle forme, qui fait intervenir dans les équations les g_{ik} et leurs dérivées, elles n'indiquent plus que la divergence des T_{ik} est nulle. Cette loi ne serait satisfaite que si toutes les composantes Γ^l_{ik} du champ de gravitation étaient nulles.

Le principe 1 suggère l'idée de former des sommes des composantes du tenseur de Riemann-Christoffel constituant les composantes d'un tenseur symétrique G_{ik}. Ce tenseur, qu'on peut appeler le « tenseur réduit » de Riemann-Christoffel, a autant de composantes que le tenseur T_{ik}. La plus simple des relations possibles entre les deux tenseurs G_{ik} et T_{ik} s'obtient de la façon suivante: En multipliant T_{ik} par le facteur constant $\varkappa$, jouant ici le même rôle que la constante de la loi de Newton, on peut supposer que la somme tensorielle $G_{ik} + \varkappa\, T_{ik}$ est toujours nulle. On obtient ainsi dix équations du deuxième ordre qui satisfont au principe de relativité généralisée.

Cependant Einstein n'a pas admis ces équations parce qu'elles ne satisfont pas à la condition 2, à savoir aux principes de conservation. Il suffit du reste d'ajouter à la somme tensorielle précédente le tenseur g_{ik} multiplié par un facteur invariant pour obtenir des équations remplissant toutes les conditions voulues et exprimant, par conséquent, la loi générale de la gravitation.

Cette loi doit fournir et fournit en effet, en première approximation, la loi de Newton suivant laquelle l'attraction des masses est inversement proportionnelle au carré de la distance ; elle interprète donc, aussi bien que la loi de Newton, les mouvements planétaires. Mais, ce qui est bien plus remarquable, en effectuant le calcul d'une façon rigoureuse, on trouve que les orbites des planètes sont des ellipses qui tournent lentement dans leur propre plan suivant le sens du mouvement. L'effet en question n'est appréciable que pour la planète Mercure, et on trouve qu'il doit être, pour cette planète, de 43 secondes par siècle, ce qui concorde *exactement* avec le résultat des observations astronomiques.

On est rempli d'admiration en constatant qu'une théorie tellement parfaite a pu être construite en s'appuyant sur des hypothèses si peu nombreuses. Indépendamment de sa vérification expérimentale, qui dans l'état actuel des sciences physiques peut être considérée comme parfaite, la théorie donne à l'esprit une satisfaction rare. Son mérite intrinsèque est sa logique irréprochable, la beauté et la simplicité des idées étant le seul signe permettant de distinguer le chemin de la vérité des sentiers embroussaillés de l'erreur.

Disons encore quelques mots sur les écarts que présente effectivement le continu physique, selon Einstein, vis-à-vis d'un continu euclidien. Les orbites elliptiques des planètes sont les projections des courbes géodésiques du champ de gravitation du soleil. On pourrait penser que la courbure du continu doit être énorme, et on est tenté de se demander comment, dans ces conditions, on ne s'est pas aperçu depuis longtemps déjà que la métrique de l'univers est non-euclidienne. En fait, si nous utilisons les coordonnées habituelles de la théorie restreinte, la trajectoire tétradimensionnelle d'une planète est approximativement une courbe hélicoïdale, à peine différente d'une droite. Dans le cas de la terre, par exemple, le rayon de la spire est parcouru par la lumière en 8 minutes; le pas de la vis, par contre est le temps que met la terre pour décrire une spire, soit une année. Il est donc environ 65500 fois plus grand que le rayon de la spire.

Dans le vide, où la densité de l'énergie est pratiquement nulle, la courbure du continu chrono-spatial est partout extrêmement petite, comme l'indique aussi la petitesse des effets métriques signalés par Einstein. Des écarts plus considérables vis-à-vis de la géométrie euclidienne ne sont possibles qu'à l'intérieur de la matière, et là seulement par endroits.

Pour ce qui concerne la géométrie de l'espace, considéré en grand, Einstein admet que l'espace physique présente en moyenne une courbure constante. Ce serait un espace riemannien sphérique ou elliptique, mais il est certain que son « rayon de courbure » dépasse considérablement les plus grandes distances dont se préoccupent les astronomes[1].

V. — Les géométries riemanniennes peuvent-elles servir de base a une théorie physique?

Nous ne voulons pas terminer cette étude des bases logiques de la théorie d'Einstein sans consacrer quelques réflexions à des doutes qui ont pu se former dans l'esprit du lecteur. Oui, dira-t-on peut-être, la théorie d'Einstein est admirable aussi bien pour ses résultats que pour l'énorme effort de pensée auquel elle doit son éclosion. Nous concédons aussi qu'en elle-même cette théorie est, les points de départ du raisonnement admis, d'une logique impeccable; mais cette logique ne nous donnerait aucune satisfaction si, parmi les hypothèses de la théorie, il y en avait qui soient inconcevables.

[1] On admet actuellement que ce « rayon » est de 16 millions d'années de lumière. La lumière mettrait donc environ 100 millions d'années pour faire le tour du monde.

Il y a un demi-siècle ou quelques dizaines d'années, beaucoup d'idées, qui ne soulèvent actuellement aucune difficulté, auraient pu paraître inconcevables. Heureusement on a bien déblayé le terrain sur lequel peuvent maintenant se développer les théories physiques. Combien de préjugés enracinés n'ont-ils pas été détruits par Henri Poincaré ; pour combien d'axiomes admis comme vérités transcendantes, n'a-t-il su démontrer qu'ils ne sont que des conventions commodes !

Grâce à ce travail préparatoire la théorie de relativité restreinte a pu être assez facilement assimilée. Personne, ou presque personne, ne voyait un inconvénient à l'introduction d'une quatrième dimension représentant le temps. On se rendait bien compte qu'on peut concevoir des continus physiques ayant plus de trois dimensions. Du reste, Poincaré (16) a écrit cette phrase remarquable : « C'est la répétition qui a donné à l'espace ses caractères essentiels ; or la répétition suppose le temps ; c'est assez dire que le temps est antérieur logiquement à l'espace ». Au fond cela signifie que l'espace et le temps sont dans une liaison étroite et que le continu à quatre dimensions, espace-temps préexiste logiquement à l'espace pur et simple.

Pour autant qu'on attribue au continu physique, avec Minkowski, une métrique euclidienne on sera assuré de ne pas rencontrer d'objections.

Une difficulté plus sérieuse résulte de l'abandon de la géométrie euclidienne. Poincaré (17) a bien dit : « La géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse » ; mais à son point de vue toutes les géométries ne sont pas également avantageuses. Ne dit-il pas ailleurs : « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode. Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode. » Nous trouvons aussi ces lignes : « La géométrie euclidienne n'a rien à craindre d'expériences nouvelles ». Cela semble être assez en opposition avec les idées d'Einstein.

Etant donnée l'autorité incontestable de Poincaré, son opinion pourrait former un obstacle sérieux à la diffusion de la théorie d'Einstein. Aussi croyons-nous nécessaire d'analyser ici cette opinion.

Notons d'abord qu'en parlant de continus non-euclidiens, Poincaré ne prend pas même en considération la géométrie générale, ou comme il dit, les géométries, de Riemann. Ces géométries sont incompatibles avec le mouvement d'une figure invariable ; elles « ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide. »

Helmholtz et S. Lie (18) ont, en effet, établi un théorème important, en partant du postulat que des figures infiniment petites à 1, 2, 3, $n-1$ dimensions placées en un point du continu à n dimensions puissent tourner sans déformation autour d'un centre fixe. Ce postulat détermine la métrique du continu ; il n'est compatible qu'avec des continus à courbure invariable. D'après cela il n'y aurait que trois genres de géométrie : celle d'Euclide, celle de Lobatchewski, et la géométrie sphérique de Riemann (19). De ces trois, Poincaré préfère, pour des raisons qu'il expose, la géométrie d'Euclide. Il est cependant peu probable qu'en déclarant sa prédilection pour les raisonnements d'Euclide, Poincaré ait voulu prescrire pour toujours aux théories physiques la base mathématique sur laquelle elles doivent élever leurs constructions.

Dans un continu à courbure variable tout déplacement d'un corps solide est impossible. Einstein a reconnu qu'une nécessité logique inéluctable impose l'abandon de la notion du corps solide. Cela résulte de la mécanique de relativité élaborée par la théorie restreinte. Dans un champ de gravitation il ne peut y avoir ni d'étalons de longueur rigides, ni de montres rigides. Dès lors en explorant le champ au moyen d'un système de référence matériel on se heurte à cette difficulté que le système subit en chaque point du champ et à chaque instant des déformations absolument inconnues; il en est de même pour la marche des montres. Comment étudier le champ chrono-spatial à l'aide d'un pareil « mollusque de référence » ? L'emploi des coordonnées de Gauss est imposé par les circonstances.

Einstein insiste particulièrement sur le fait que les lois de la physique se rapportent uniquement à des coïncidences qui ont lieu dans certains points du continu chrono-spatial. La coïncidence qui a lieu en un point donné est, dans une certaine mesure, indépendante de ce qui se passe ailleurs. Les différents points sont cependant, d'après la théorie, reliés par la condition de continuité, mais il n'y a plus de métrique a priori.

Quant à une géométrie, dans le sens attribué par Poincaré à ce terme, elle n'existe évidemment plus si l'on rapporte les observations aux « mollusques de référence » d'Einstein. Aussi l'idée de l'homogénéité de l'espace opposée par Helmholtz et par S. Lie aux conceptions riemanniennes perd ici toute signification. Dans un continu dont les propriétés métriques non homogènes seraient données d'avance aucun déplacement de la matière ne serait possible, mais il n'en est plus de même si le « champ métrique » est déterminé par la répartition de la matière. C'est alors la matière elle-même qui en se déplaçant et en se déformant emporte son propre champ métrique.

D'après les idées de Riemann la seule chose qu'on sait avec certitude sur la nature de l'espace physique c'est qu'il forme une variété à trois dimensions. On peut même se demander s'il est continu ou non.

A cette question qu'il soulève, Riemann ne donne point de réponse, mais dans les conclusions de son mémoire « sur les hypothèses qui se trouvent à la base de la géométrie, » (1854) il fait la remarque suivante: Une variété discrète porte en soi-même ses principes métriques, mais pour une variété continue la métrique ne peut être due qu'à des causes extérieures. Riemann suppose que les rapports métriques sont imposés à l'espace physique par des forces de liaison. Ainsi le problème des propriétés métriques de l'espace se rattache à la physique.

Cette idée dont on ne semble pas avoir saisi la portée a été reprise par Einstein au bout de 70 ans. Notons du reste que parmi les idées suggérées par Riemann, Einstein a utilisé celles qui se rapprochent le plus des conceptions antérieures. La géométrie euclidienne reste vraie dans l'infiniment petit, provisoirement au moins, car on ne peut pas encore prévoir les surprises que nous réserve la théorie des quanta.

Poincaré a affirmé que la géométrie d'Euclide est à l'abri des vérifications expérimentales. Cette opinion peut être soutenue car la valeur d'une théorie mathématique est indépendante de son utilité pour la physique. Peut-on dire que les faits expérimentaux dont la découverte est due au génie d'Einstein, par exemple la courbure des rayons lumineux, enlèvent à la géométrie d'Euclide sa raison d'être? Cela serait absurde. Et d'abord il sera toujours impossible d'exposer, au début des leçons de géométrie, les théories de Gauss et de Riemann. Ces théories sont du reste, nous l'avons vu, basées sur celle d'Euclide. Un euclidien acharné d'autre part pourrait tenter d'interpréter les résultats de la théorie de relativité généralisée d'un point de vue euclidien, et peut-être même cette entreprise pourrait-elle réussir. Cet effort inutile ne serait pas moins absurde; car si l'on renonce à définir la droite par le rayon lumineux, la longueur par la distance de deux repères tracés sur un corps rigide, le temps par l'indication d'une montre à marche uniforme, quel sens attribuera-t-on aux notions fondamentales de la cinématique euclidienne?

Chercher à maintenir par des complications infinies des idées dépourvues de toute réalité physique serait certainement contraire à la pensée de H. Poincaré pour lequel les théories avaient de la valeur seulement en raison de leur clarté et de leur simplicité.

Si Einstein ne nous avait pas donné à temps sa théorie, les progrès de la science expérimentale auraient fini par placer les savants dans une situation bien embarrassante. On n'aurait pas eu d'explication satisfaisante pour l'absence de toute influence du mouvement de la terre sur les phénomènes optiques, sans parler d'autres faits de la cinématique et de la mécanique de relativité. Au déplacement du périhélie de Mercure se serait ajouté, au bout d'un certain temps, la découverte de la courbure des rayons lumineux. Peut-être même aurait-on constaté la trop petite fréquence des raies solaires. Pour tout cela on aurait donné des explications «euclidiennes», mais un jour, inévitablement, un savant aurait dit: Il est bien plus simple d'abandonner la notion des étalons invariables et d'admettre que la matière elle-même détermine son champ métrique. Et il n'aurait plus été question désormais d'hypothèses contradictoires et d'interprétations embrouillées.

Quel que soit le regret qu'en puissent éprouver les géomètres qui, avec raison, admirent la beauté de l'édifice euclidien, il est peu probable qu'à l'avenir la théorie physique se soumette de nouveau à ce schéma rigide, qui a guidé ses pas pendant l'enfance, l'a protégée contre les égarements de l'adolescence, mais qui est devenu trop étroit pour son âge mûr.

BIBLIOGRAPHIE

Le nombre des publications allemandes qui se rapportent à la théorie de relativité est très considérable. Nous nous sommes bornés à indiquer ici seulement quelques brochures et livres d'une importance capitale.

1. H.-A. Lorentz. La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants. Leyde, 1892. — Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Eigenschaften in bewegten Körpern. Leyde, 1895. — Electromagnetic phenomena in a system mowing with any velocity smaller than that of light. *Proc.*, Amsterdam, 1904, p. 809.
2. A.-A. Michelson. *Americ. Journ. of Science* (3), **22** (1884), p. 120. A.-A. Michelson et E.-W. Morley. *Americ. Journ. of Science* (3), **34** (1887), p. 333. — *Phil. Mag.* (5), **24** (1887), p. 449.
3. A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Ann. der Physik*, **17** (1905), p. 891. — Voir aussi : *Jahrb. d. Radioakt.*, **4** (1907), p. 411-462 ; *Arch. des sc. phys. et nat.* **29** (1910), p. 5-28 et p. 125-144.
4. H. Minkowski. Die Grundgleichungen für elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern. *Nachr. d. Ges. d. Wiss.*, Göttingen, 1908, p. 53, *Ges. Abhandl.*, II, p. 352.
5. M. von Laue. Die Relativitätstheorie. I. Das Relativitätsprinzip der Lorentztransformation. 3e édit., Braunschweig, 1919. Ce livre contient un exposé très approfondi et très complet de la théorie restreinte suivant le point de vue de Minkowskí.
6. On trouve des indications détaillées sur cette question dans les mémoires d'Einstein, l. c. (3), dans le livre de M. von Laue, et aussi dans le traité de H. Weyl. Voir plus loin (14).
7. C.-E. Guye et C. Lavanchy. — *Arch. des Sciences phys. et nat.* I. 42. 1916.
8. A. Sommerfeld. *Ann. der Physik*, **51** (1916), p. 1 et 125.
9. P. Langevin. L'inertie de l'énergie et ses conséquences, *Journ. de Phys.* (5), **3** (1913), p. 553-591.
10. C. Neumann. Die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig, 1870. L. Lange. Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipzig, 1886.
11. E. Mach. Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig, 1901.
12. H. Poincaré. La science et l'hypothèse. Paris, Flammarion.

13. A. Einstein. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. (Gemeinverständlich) Vieweg, 3e édit., 1918. — E. Freundlich. Die Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie, 3e édit., Berlin, 1920.
14. B. Riemann. Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen. Edité et commenté par H. Weyl. 2e édit., Berlin, 1921.
15. Pour ce qui concerne l'élaboration mathématique de la théorie, voir : A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. (Barth), Leipzig, 1916, et surtout le traité de H. Weyl. *Raum. Zeit. Materie.* 3e édit., Berlin 1920.
16. H. Poincaré. La valeur de la science. Flammarion, 1908. Le passage cité se trouve à la page 133. (L'espace et ses trois dimensions).
17. La science et l'hypothèse. Flammarion, 1908, p. 109 puis p. 66 et p. 93.
18. Helmholtz. Über die Tatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen*, 1868, p. 193-221. S. Lie. Über die Grundlagen der Geometrie. *Verh. d. sächs. Ges. d. Wiss.*, Leipzig, **42** (1890). p. 284-321.
19. Voir : P. Barbarin. La géométrie non euclidienne. *Scientia* (Naud). No 15, 1902.