

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 3 (1921)

Artikel: Les géométries fondamentales de l'espace euclidien [suite et fin]
Autor: Saussure, René de
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741083>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES GÉOMÉTRIES FONDAMENTALES

DE

L'ESPACE EUCLIDIEN

PAR

René de SAUSSURE

(*Suite et fin*)¹.

§ 2. — CLASSIFICATION DES GÉOMÉTRIES.

Les différents éléments d'un être géométrique sont sa *grandeur*, sa *position* et sa *forme*.

La grandeur et la position sont les éléments « essentiels », les « essences » de l'être géométrique, tandis que la forme en constitue la « structure ». Il y a donc deux sortes de géométries, suivant que l'on prend comme point de départ, comme essence de l'être géométrique, sa grandeur ou sa position ; en outre, comme on ne peut pas prendre deux essences à la fois comme base d'une géométrie, il en résulte que si l'on prend la grandeur comme essence, on ne tiendra plus compte de la position, et réciproquement.

Les deux branches fondamentales de la géométrie sont donc :

1. La *géométrie métrique*, ou géométrie élémentaire, dans laquelle on étudie la forme (la structure) des êtres géométriques, en considérant leur grandeur, leur étendue, comme leur élément essentiel (sans se préoccuper de la position de ces êtres géométriques dans l'espace).

¹ Voir *Arch.*, janvier 1919.

2. La *géométrie de position*, ou géométrie cinématique, dans laquelle on étudie les formes (les structures) engendrées par le déplacement d'un être géométrique, dont l'essence réside uniquement dans sa position (la grandeur et la forme de cet être ne jouant plus aucun rôle).

Géométries métriques.

En géométrie métrique l'étendue est l'essence et la forme est la structure, mais les termes « essence » et « structure » bien qu'opposés l'un à l'autre, n'ont qu'une valeur relative. Un même être géométrique peut être essence ou structure suivant la manière dont on le considère ; ainsi, une *règle*, c'est-à-dire une ligne droite A , considérée comme une continuité une et indivisible, est une essence (une droite « essentielle »), tandis qu'une ligne droite A' , considérée comme une série de points (ou comme une série de plans) est une structure (une droite structurale).

Si les droites A et A' coïncident, on peut dire que les points (ou les plans) de la droite A' sont réunis par la continuité de la droite A , c'est-à-dire que dans tout être géométrique, l'essence est la grandeur continue qui réunit et tient ensemble toutes les parties de la structure.

Prenons par exemple un tétraèdre (corps géométrique à la fois le plus simple et le plus complet). La grandeur, l'étendue de ce tétraèdre, c'est son volume ; ce volume (essence du tétraèdre), est limité par quatre plans, les quatre faces du tétraèdre, qui donnent à celui-ci sa forme ; ces faces constituent donc la structure du tétraèdre, et l'on constate que les quatre faces sont bien réunies et tenues ensemble par le volume, c'est-à-dire par l'essence du tétraèdre.

Mais si nous considérons séparément une de ces faces, nous constatons qu'à son tour elle est essence par rapport aux trois arêtes qui la limitent, car ces arêtes donnent à la face sa forme, c'est-à-dire qu'elles constituent la « structure » de cette face, et réciproquement la face est une étendue, une grandeur continue, qui réunit et tient ensemble ces trois arêtes. Ainsi, une face du tétraèdre est structure par rapport au volume, mais elle est essence par rapport aux arêtes. De même, les arêtes (qui sont

structure par rapport aux faces) sont essence par rapport aux sommets du tétraèdre, puisque chaque arête est une grandeur continue qui réunit et tient ensemble deux sommets. Enfin, les sommets (qui sont structure par rapport aux arêtes) ne sont plus essence par rapport à autre chose, car ils ne contiennent plus aucune grandeur, aucune étendue.

Ainsi, en géométrie métrique, le *volume* est l'élément purement « essentiel » (il ne possède aucune structure), et le *point* est l'élément purement structural (il ne possède aucune essence). Entre le volume et le point, il y a la surface et la ligne, qui sont des essences (ou des structures) relatives.

La géométrie métrique se réduit à l'étude des figures polyédriques (ou polygonales). Les subdivisions de cette géométrie correspondront donc aux différentes espèces de polyèdres (ou de polygones), y compris les différentes espèces de surfaces (et de courbes), que l'on peut considérer comme des limites de polyèdres (ou de polygones).

Géométries de position.

La géométrie de position a pour but l'étude des formes spatiales engendrées par le déplacement d'une figure *C* (sans que l'on se préoccupe de la grandeur ni de la forme de cette figure), c'est pourquoi cette géométrie a reçu aussi le nom de *géométrie cinématique*.

Dans cette géométrie, c'est la figure *C*, ou plutôt la position de cette figure, qui est l'essence, le point de départ, et les formes spatiales engendrées par le déplacement de la figure *C* constituent les structures, la partie structurale de la dite géométrie.

Toute figure *C* ne possédant en elle-même ni grandeur ni forme pourra servir de point de départ à une géométrie de position ; cette géométrie sera caractérisée par la figure *C*, qui constituera l'élément essentiel de cette géométrie. Il y aura donc autant de géométries de position qu'il existe de figures ne contenant aucune grandeur ni aucune forme.

Nous avons vu que ces figures sont : le point, la règle (ou droite essentielle), l'èdre (ou plan essentiel), le drapeau, le bouclier, la flèche, et le feuillet (fig. 1). Il y a donc, dans l'espace

tridimensionnel *sept* géométries de position, et seulement sept, car il n'existe pas d'autre figure pouvant servir de point de départ à une huitième géométrie, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre figure ne contenant en elle-même ni forme ni grandeur.

Les sept figures essentielles de la géométrie de position se subdivisent en trois groupes : le premier groupe comprend les figures formées d'un seul élément (point essentiel, droite essentielle, ou plan essentiel); le second groupe comprend les essences formées de deux éléments, (le drapeau, formé de la réunion d'une droite et d'un plan essentiels; le bouclier, formé de la réunion d'un point et d'un plan essentiels, et la flèche, formée de la réunion d'un point et d'une droite essentiels); enfin le troisième groupe comprend une seule figure, qui est formée de trois éléments réunis en une seule essence (le feuillet, formé de la réunion d'un point, d'une droite et d'un plan essentiels).

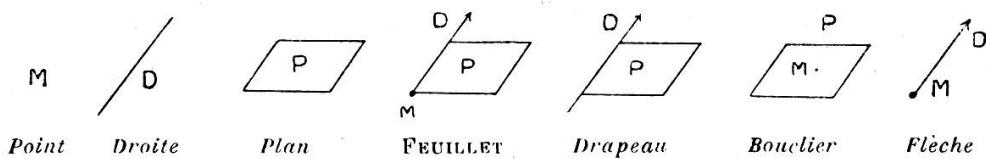


Fig. 1.

Le feuillet est, en géométrie de position, l'élément essentiel le plus complet; la géométrie des feuillets (c'est-à-dire des structures engendrées par le déplacement d'un feuillet) sera donc la géométrie (de position) la plus générale existant dans notre espace tridimensionnel. Et en effet, un feuillet est une figure équivalente à un corps solide quelconque C , c'est-à-dire que la position d'un tel corps peut être entièrement définie par la position d'un feuillet, supposé attaché à ce corps. On peut dire qu'un feuillet est ce qui reste d'un corps solide, lorsqu'on le dépouille de sa grandeur et de sa forme; en d'autres mots il faut autant de coordonnées (6) pour définir la position d'un corps solide quelconque, qu'il en faut pour définir la position d'un feuillet.

Les six éléments essentiels, autre que le feuillet, peuvent être considérés comme des feuillets incomplets, car en les réunissant deux à deux on retrouve un feuillet complet : en effet, un feuillet MDP peut être considéré comme formé de la réunion d'un

point M avec un drapeau DP , ou comme la réunion d'une droite (essentielle) D avec un bouclier MP , ou enfin comme la réunion d'un plan (essentiel) P avec une flèche MD . Le drapeau est ainsi la figure complémentaire du point, le bouclier celle d'une droite, et la flèche celle d'un plan, ce qui revient à dire que la géométrie des drapeaux est complémentaire de la géométrie ponctuelle, que la géométrie des boucliers est complémentaire de la géométrie réglée, et que la géométrie des flèches est complémentaire de la géométrie tangentielle ; enfin, que la géométrie des feuillets n'est complémentaire d'aucune autre, parce qu'elle est complète par elle-même.

Considérons en effet un corps solide C dont la position est définie par un feuillet MDP . Les déplacements du corps C seront soumis aux lois de la géométrie des feuillets. Si maintenant nous décomposons le déplacement du corps C en deux : déplacement du point M dans l'espace, et déplacement du corps C autour du point M , le premier déplacement sera soumis aux lois de la géométrie ponctuelle, et le second sera soumis aux lois de la géométrie des drapeaux, puisque le drapeau DP définit précisément la position du corps C autour du point M .

Nous pouvons aussi décomposer le déplacement du corps C d'une autre manière (en deux mouvements composants) : déplacement de la droite essentielle D dans l'espace et déplacement du corps C sur cette droite essentielle ; le premier de ces déplacements sera soumis aux lois de la géométrie réglée, et le second sera soumis aux lois de la géométrie des boucliers, puisque le bouclier MP définit précisément la position du corps C autour de la droite D . Enfin, on peut encore décomposer le déplacement du corps C en : déplacement du plan (essentiel) P dans l'espace, et déplacement du corps C sur ce plan essentiel ; le premier de ces déplacements sera soumis aux lois de la géométrie tangentielle, et le second sera soumis aux lois de la géométrie des flèches, puisque la flèche MD définit précisément la position du corps C sur le plan P .

On peut donc classer les différentes géométries de position par paires, de telle manière que chaque paire soit formée de deux géométries complémentaires l'une de l'autre :

1. *Géométrie ponctuelle*, 1^a *Géométrie des drapeaux*,
2. *Géométrie réglée*, 2^a *Géométrie des boucliers*,
3. *Géométrie tangentielle*, 3^a *Géométrie des flèches*,
4. *Géométrie des feuillets*.

Les géométries à numéros impairs (1, 1^a, 3, 3^a), sont toutes de caractère linéaire, tandis que les géométries à numéros pairs (2, 2^a, 4) sont toutes de caractère quadratique. Nous avons vu, en effet, dans le § I que la géométrie des boucliers autour d'une droite essentielle fixe D est une géométrie quadratique à 2 paramètres; d'autre part la géométrie réglée est une géométrie quadratique à 4 paramètres, et la géométrie des feuillets une géométrie quadratique à 6 paramètres.

Quant aux géométries impaires, elles sont non seulement toutes de caractère linéaire, mais aussi toutes à 3 paramètres. Enfin, si l'on additionne les nombres de paramètres relatifs à deux géométries complémentaires, la somme est toujours égale à 6 :

$$\begin{aligned}
 & (\text{Géom. ponct.}) 3 + (\text{géom. des drapeaux}) 3 = 6, \\
 & (\quad \text{»} \quad \text{réglée}) 4 + (\quad \text{»} \quad \text{boucliers}) 2 = 6, \\
 & (\quad \text{»} \quad \text{tang.}) 3 + (\quad \text{»} \quad \text{flèches}) 3 = 6, \\
 & \qquad \qquad \qquad (\text{géom. des feuillets}) 6 \qquad \qquad = 6.
 \end{aligned}$$

La constance de cette somme provient du reste du fait que deux géométries complémentaires réunies sont toujours équivalentes à la géométrie des feuillets, laquelle est à 6 paramètres.

Dans toutes les géométries de position la notion fondamentale (de laquelle on tire l'équation de la polysérie linéaire fondamentale) est la notion de *réciprocité* entre deux éléments essentiels de la géométrie considérée.

Ainsi par exemple, un point essentiel M est *réciproque* d'un plan essentiel P , lorsque la distance d du point au plan est nulle. L'équation $d = 0$ sera donc l'équation de la bisérie linéaire en géométrie ponctuelle et en géométrie tangentielle (en effet, si nous maintenons le plan P fixe et que le point M se déplace en satisfaisant à la condition $d = 0$, ce point décrira un *plan structural* coïncidant avec P ; réciproquement, si nous maintenons le point M fixe et que le plan essentiel P se déplace en satisfaisant à la condition $d = 0$, ce plan décrira une *gerbe* autour du point M ; or une bisérie linéaire de points essentiels M est

bien un plan structural, c'est-à-dire une surface plane, et une bisérie linéaire de plans essentiels P est bien une gerbe, ou si l'on veut un point structural¹.

En géométrie réglée la réciprocité de deux règles (droites essentielles) est définie par la relation :

$$h \tan \omega = c$$

où h et ω sont respectivement la distance et l'angle des deux règles, et c une constante que nous avons appelée l'indice de réciprocité. Si l'on maintient fixe une des deux règles, la règle réciproque décrit bien la trisérie linéaire, puisque l'équation ci-dessus est l'équation intrinsèque d'un complexe linéaire.

Enfin dans les deux autres géométries quadratiques (géométrie des boucliers et géométrie des feuillets) la relation de réciprocité entre deux éléments essentiels (deux boucliers ou deux feuillets) est :

$$h \tan \frac{\omega}{2} = c,$$

où h et ω représentent respectivement le glissement et la rotation qui permettent de passer d'un élément essentiel à l'autre. Si l'un de ces éléments est maintenu fixe, l'autre décrit la polysérie linéaire (bisérie de boucliers ou pentasérie de feuillets). Ainsi dans les trois géométries quadratiques de l'espace euclidien la relation fondamentale de réciprocité a la même forme, et toutes ces géométries sont caractérisées par le fait que leur équation fondamentale contient une constante arbitraire (c).

Nous avons aussi montré que les géométries quadratiques sont des géométries incomplètes que l'on peut faire rentrer dans le type linéaire en associant une quantité numérique (une *cote*) à leur élément essentiel. Cette cote fait fonction de coordonnée, de sorte que si une géométrie quadratique est à n paramètres la géométrie linéaire dans laquelle elle rentre est à $n + 1$ para-

¹ Il faut bien remarquer qu'en géométrie métrique, un point est toujours « structural », car dans cette géométrie l'essence est l'« étendue », et un point n'a jamais d'étendue. Au contraire, en géométrie cinématique, l'essence est la « position » ; un point peut donc y être essentiel ou structural, suivant qu'il est considéré comme une position, ou bien comme une structure de plans essentiels (centre d'une gerbe).

mètres. Ainsi, par exemple, à la géométrie réglée, qui dépend de 4 paramètres, correspondra une géométrie linéaire à 5 paramètres (la géométrie des droites essentielles cotées, qui n'est autre chose que la géométrie des *vis* de Ball, car une vis n'est qu'une droite essentielle affectée d'un coefficient numérique). Si a et b désignent les cotes de deux droites essentielles, la relation de réciprocité entre ces deux droites sera exprimée par l'équation :

$$h \tan \omega = a + b ,$$

et la géométrie qui en résulte sera de caractère linéaire, parce que cette équation ne contient plus de constante arbitraire (c). Si l'une des droites essentielles est fixe, la cote a est constante, et l'autre droite décrit la polysérie (tétrasérie) linéaire; et si l'on pose $b = \text{const.}$, on obtient l'ensemble des droites qui (dans cette tétrasérie) ont la même cote. Cet ensemble forme évidemment un complexe linéaire, car si l'on pose $b = \text{const.}$, tout le second membre devient constant, et l'on retrouve la formule, $h \tan \omega = \text{const.}$, du complexe linéaire. Cela revient à dire que la tétrasérie linéaire de droites cotées est formée par la réunion de ∞ complexes linéaires, obtenus en donnant successivement à la constante b toutes les valeurs possibles. Les formes fondamentales de toute géométrie quadratique à n paramètres rentrent donc bien dans celles d'une géométrie linéaire (cotée) à $n + 1$ paramètres, car on pourrait par des raisonnements analogues montrer que la géométrie des boucliers (à 2 paramètres) ou celle des feuillets (à 6 paramètres) rentre dans la géométrie linéaire des boucliers cotés (à 3 paramètres), ou celle des feuillets cotés (à 7 paramètres), comme l'équation :

$$h \tan \frac{\omega}{2} = c ,$$

rentre dans l'équation plus générale :

$$h \tan \frac{\omega}{2} = a + b .$$

Le tableau complet des géométries fondamentales de l'espace euclidien à trois dimensions est donc le suivant :

GÉOMÉTRIES LINÉAIRES	GÉOMÉTRIES QUADRATIQUES
Géom. ponctuelle (3 param.),	
» réglée cotée (5 »),	Géom. réglée (4 param.),
» tangentielle (3 »),	
» des drapeaux (3 param.),	Géom. des boucliers (2 param.),
» des boucliers cotés (3 »),	
» des flèches (3 »),	Géom. des feuillets (6 param.),
» des feuillets cotés (7 param.),	

On voit que toutes les géométries de caractère linéaire sont à un nombre impair de paramètres, tandis que toutes les géométries quadratiques sont à un nombre pair de paramètres.

* * *

Il ne reste plus qu'à faire la nomenclature des formes linéaires (monosérie, bisérie, trisérie, etc. linéaire) de chacune de ces géométries :

1. *Géométrie ponctuelle.* — L'élément essentiel de cette géométrie est le *point*. La monosérie linéaire de points se nomme *droite* (droite structurale, considérée comme une série de points). La bisérie linéaire de points se nomme *plan* (plan structural). Il n'y a pas d'autre forme linéaire, puisqu'une trisérie de points n'est plus une forme. On peut donc dire que la géométrie ponctuelle est à deux étages ; elle ne contient que deux sortes de formes (les lignes et les surfaces).

2. *Géométrie réglée.* — L'élément essentiel de cette géométrie est la *règle* (droite essentielle). La monosérie linéaire de règles se nomme *hyperboloïde* (ou *paraboloïde*) réglé. La bisérie linéaire se nomme *congruence linéaire* et la trisérie linéaire se nomme *complexe linéaire*. Il n'y a pas d'autres formes linéaires, puisqu'une tétrasérie de règles n'est plus une forme. La géométrie réglée est donc une géométrie à trois étages ; elle contient trois sortes de formes (les surfaces réglées, les congruences et les complexes).

3. *Géométrie réglée cotée.* — L'élément essentiel de cette géométrie est la *règle cotée* (droite essentielle cotée). La monosérie linéaire de règles cotées se nomme *monofaisceau* (conoïde de

Plücker ou cylindroïde) ; la bisérie linéaire se nomme *bifaisceau* (congruence de Ball) ; la trisérie linéaire se nomme *trifaisceau* (complexe de Ball), et la tétrasérie linéaire se nomme *tétrafaisceau* (tétrasérie de Ball). Il n'y a pas d'autre forme linéaire, puisqu'une pentasérie de règles cotées n'est plus une forme. La géométrie réglée cotée (ou géométrie de Ball) est donc une géométrie à quatre étages.

4. *Géométrie tangentielle.* — L'élément essentiel de cette géométrie est l'*èdre* (plan essentiel). La monosérie linéaire se nomme *faisceau d'èdres* (ou droite structurale, considérée comme un faisceau de plans essentiels) et la bisérie linéaire se nomme, *gerbe d'èdres* (ou point structural, considéré comme gerbe de plans). Il n'y a pas d'autres formes linéaires, puisqu'une trisérie d'èdres n'est plus une forme. La géométrie tangentielle est donc une géométrie à deux étages ; elle ne contient que deux sortes de formes : des lignes et des surfaces (considérées comme enveloppes de plans).

5. *Géométrie des drapeaux.* — L'élément essentiel de cette géométrie est le *drapeau*. La monosérie linéaire se nomme *couronne de drapeaux*, et la bisérie linéaire *couronoïde de drapeaux*. Il n'y a pas d'autres formes linéaires ; cette géométrie est donc à deux étages (monoséries et biséries de drapeaux).

6. *Géométrie des boucliers.* — L'élément essentiel de cette géométrie est le *bouclier*. La monosérie linéaire n'a pas reçu de nom particulier. Cette géométrie n'a qu'un étage ; toutes ses formes sont des monoséries (voir la géométrie des boucliers dans le § 1).

7. *Géométrie des boucliers cotés.* — L'élément essentiel de cette géométrie est le *bouclier coté*. La monosérie linéaire se nomme *monofaisceau de boucliers*, et la bisérie linéaire *bifaisceau de boucliers*. Cette géométrie est à deux étages ; elle ne contient que des monoséries et des biséries.

8. *Géométrie des flèches.* — L'élément essentiel de cette géométrie est la *flèche*. La monosérie linéaire se nomme *couronne de flèches*, et la bisérie linéaire *couronoïde de flèches*. Cette géométrie est à deux étages ; toutes ses formes sont des monoséries ou des biséries.

9. *Géométrie des feuillets.* — L'élément essentiel de cette

géométrie est le *feuillet*. Les mono-, bi-, tri-, tétra-, et pentaséries linéaires de feuilles n'ont pas reçu de nom spécial. Cette géométrie est à cinq étages, c'est-à-dire que ses formes sont des polyséries depuis la mono- jusqu'à la pentasérie.

10. *Géométrie des feuillets cotés.* — L'élément essentiel de cette géométrie est le *feuillet coté*. La monosérie linéaire a reçu le nom de *monocouronne*, la bisérie linéaire celui de *bicouronne*, etc., jusqu'à l'hexasérie linéaire ou *hexacouronne*. Cette géométrie est donc à six étages, car elle comprend toutes les formes depuis la mono- jusqu'à l'hexasérie.

* * *

Il y a donc en tout dix géométries fondamentales dans l'espace tridimensionnel. Pour calculer le nombre x d'éléments essentiels, nécessaires et suffisants pour déterminer une forme linéaire donnée d'une géométrie donnée, on emploiera la formule

$$x = p + n,$$

dans laquelle p est le degré de la géométrie en question et n l'étage auquel appartient la forme linéaire donnée. Ainsi par exemple le nombre de points nécessaires et suffisants pour déterminer un plan est $x = 1 + 2$, parce que la géométrie ponctuelle est linéaire ($p = 1$) et qu'un plan est une bisérie de points (deuxième étage, $n = 2$); de même le nombre de feuilles nécessaires et suffisants pour déterminer une tétrasérie linéaire de feuilles sera $x = 2 + 4$, parce que la géométrie des feuilles est quadratique ($p = 2$) et que la tétrasérie correspond au quatrième étage ($n = 4$).