

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 3 (1921)

Artikel: Recherches théoriques et expérimentales sur la mesure de l'amortissement d'un circuit à étincelle
Autor: Lambossy, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-741058>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Recherches théoriques et expérimentales

SUR LA

Mesure de l'amortissement d'un circuit à étincelle

PAR

Paul LAMBOSSY

(Avec 25 fig.).

INTRODUCTION

Les oscillations électriques qu'on excite dans un circuit oscillant isolé ont deux caractères utiles à connaître : leur période et leur décrément.

La théorie du physicien suédois Bjerknes¹ les prévoyait définis chacun par un seul nombre, et déterminables par une méthode bien connue, utilisant le phénomène de la résonance électrique. Il est reconnu depuis longtemps que cette méthode fournit pour le décrément un nombre incertain, dans le cas où le circuit possède une étincelle. C'est la preuve d'une insuffisance de la théorie. C'est uniquement du décrément, de sa théorie, et de sa mesure, qu'il sera question dans la présente étude.

La mesure de l'amortissement d'après le procédé de Bjerknes est fondée sur le tracé d'une *courbe de résonance*². Lorsque celle-ci est *normale*, c.-à.-d. lorsque sa forme est exactement celle

¹ BJERKNES. *Wied Ann.*, 44, p. 74, 1891; 55, p. 121, 1895.

² Voir ZENNECK. *Lehrb. d. drahtlosen Telegraphie*, 1913. p. 125. TISSOT. *Osc. él. et principes de T.S.F.*, 1910, p. 376.

que prévoit la théorie de Bjerknes, elle permet de déterminer la somme des décréments des circuits primaire et secondaire. Mais lorsqu'elle n'est pas tout à fait normale — et c'est le cas lorsque le primaire possède une étincelle — le calcul des décréments par le procédé ordinaire devient incertain et suspect.

C'est ainsi qu'un nouveau problème se pose, mais pour le préciser il est nécessaire d'exposer les résultats d'expériences fixant l'état de la question.

§ 1. — *Expériences de résonance.*

Le circuit primaire (fig. 1) était constitué par un fil ou une lame de cuivre formant un carré de un mètre de côté; et par des condensateurs Moscicki employés en Télégraphie sans fil. La longueur d'onde a été variée entre 150 et 450 m.

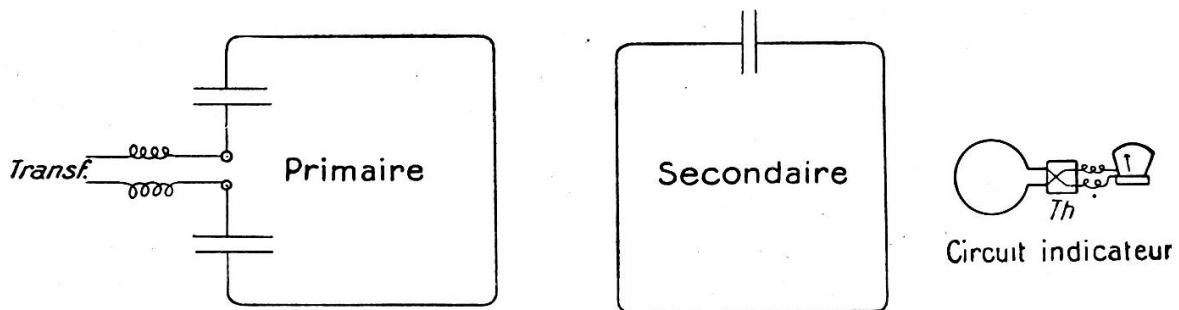


Fig. 1.

L'éclateur avait deux électrodes en magnésium, cylindriques, ménageant une distance explosive de 8 mm. Les électrodes étaient reliées au secondaire d'un grand transformateur $20000/150$ Brown-Boveri, Baden. Un courant d'air empêchait la production d'étincelles partielles et refroidissait les électrodes.

Le secondaire avait pour circuit inductif, soit une lame épaisse en cuivre, formant un carré de un mètre de côté, soit un fil de 3 mm de diamètre de mêmes dimensions, soit un fil rectangulaire de $1,80 \times 1,20$ m. La self-induction du fil carré a été trouvée par le calcul égale à 4600 cm, celle du fil rectangulaire 8600 cm. La capacité était constituée par un condensateur variable Boas. Des fils de manganine ont été pris comme résistances additionnelles. Dans la plupart des mesures la distance du secondaire au pri-

maire était 1 m 50, reconnue assez grande pour que le couplage soit extrêmement lâche.

Le circuit indicateur, contenant un thermo-élément de faible résistance ($1,16 \Omega$), était soit une simple boucle, soit une bobine de 3 spires. Pour la bobine, le rapport $\frac{L\omega}{R}$ était environ 10.

Les mesures nécessaires à la construction des courbes de résonance ont été faites en deux séries de lectures, une fois en allant vers les grandes capacités, une fois en revenant. Je construisais au commencement les courbes de résonance en portant en abscisses les valeurs de la capacité, pour déterminer la somme des décréments par la méthode de Brandes¹.

§ 2. — *Position du problème.*

La fig. 2 présente deux courbes faites l'une après l'autre dans les mêmes conditions, sauf que pour la seconde une résistance était introduite dans le secondaire. En abscisses sont portées non pas les divisions du condensateur, mais des quantités proportionnelles à $\frac{C_r}{C} - 1$; et le calcul des décréments a été fait au moyen d'une formule tout à fait équivalente à celle de Brandes; cette formule sera établie plus loin; elle a pour expression :

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \sqrt{\left(\frac{C_r}{C'} - 1\right) \left(1 - \frac{C_r}{C''}\right)} \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \gamma}}$$

Les 8 sections faites à chaque dixième de la hauteur servent chacune à calculer $\delta_1 + \delta_2$. On trouve pour les deux courbes les deux séries de valeurs suivantes :

Hauteur	I	II	Différence
0,9	0,1065	0,1230	0,0165
0,8	0,1065	0,1238	0,0173
0,7	0,1027	0,1224	0,0197
0,6	0,1000	0,1216	0,0216
0,5	0,0955	0,1183	0,0228
0,4	0,0912	0,1160	0,0248
0,3	0,0852	0,1143	0,0291
0,2	0,0830	0,1107	0,0277

¹ BRANDES. *Ann. d. Physik*, 22, 1907, p. 644-647.

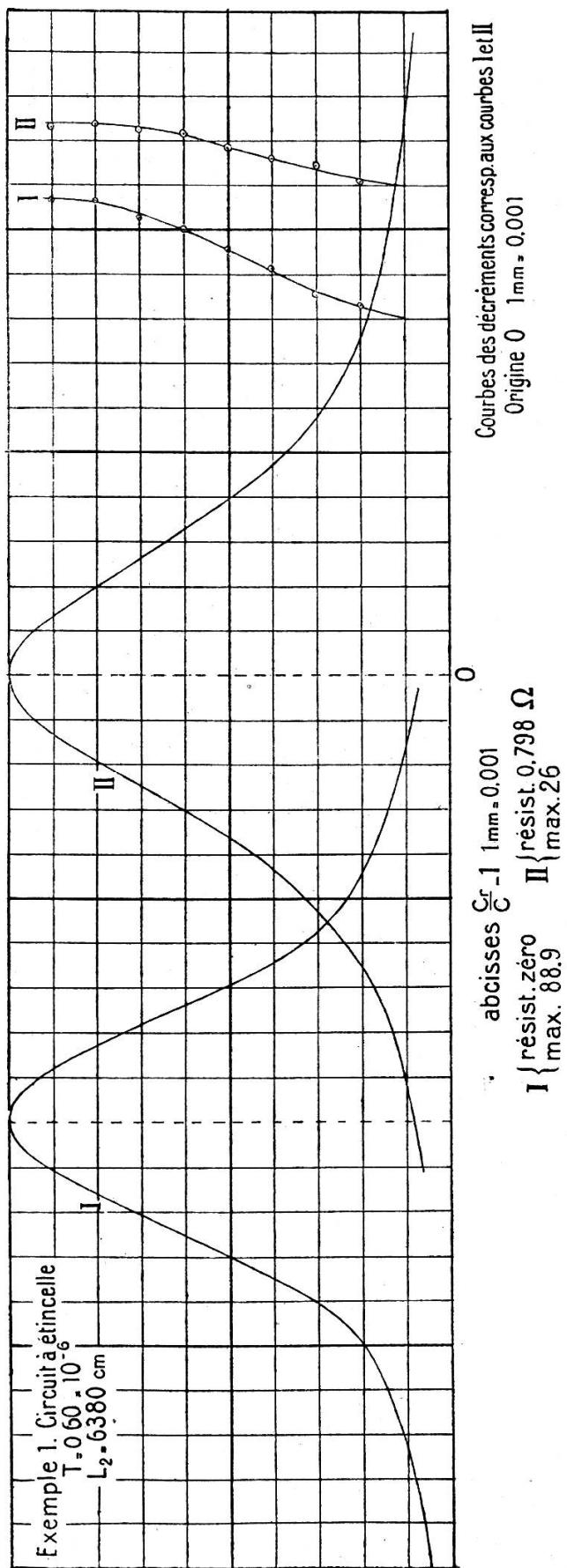


Fig. 2.

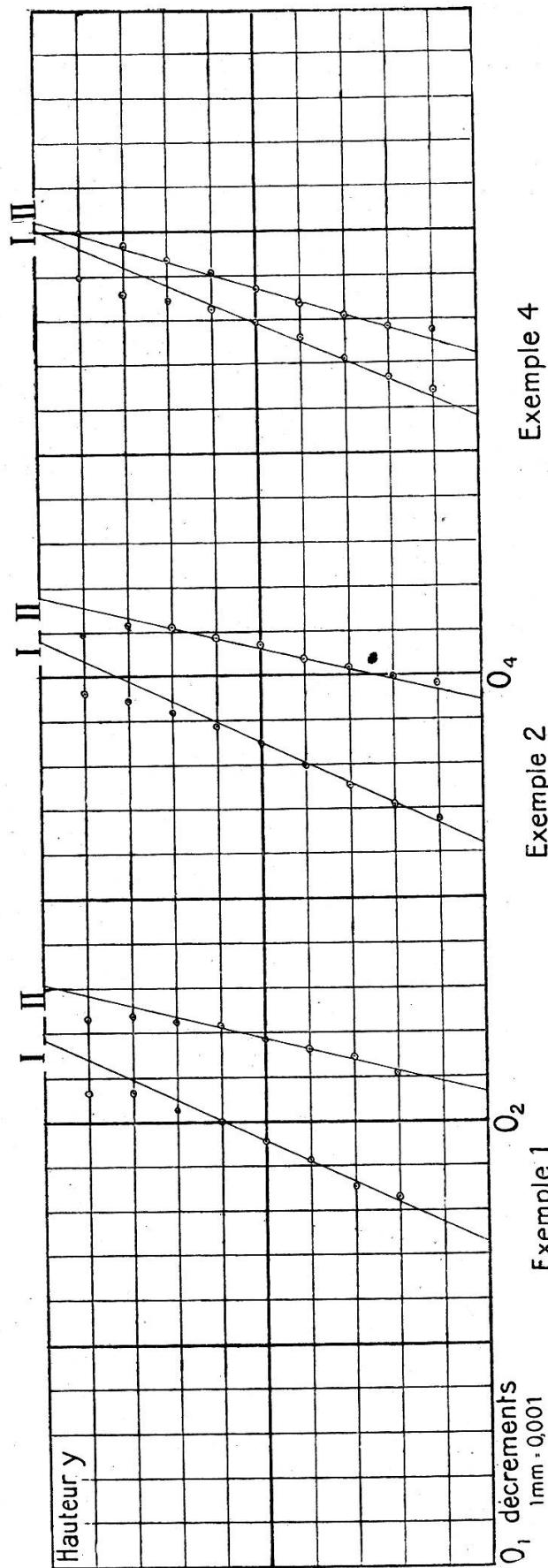


Fig. 3.

Une courbe normale de Bjerknes fournirait le même nombre, quelle que soit la hauteur; ici les valeurs décroissent du haut en bas de la courbe, systématiquement. C'est un phénomène depuis longtemps observé, précisé par Rempp¹, Macku², et dont la cause est l'étincelle. Vraisemblablement aucun de ces nombres n'est la vraie somme des décréments des deux circuits. Toutefois, pour faciliter le langage, j'appellerai chacun d'eux *un décrément*.

Portons à partir d'un axe vertical des abscisses égales à chacun des décréments, à la hauteur où il a été calculé; nous obtenons 8 points, figuratifs des 8 décréments, et la courbe qui les joint peut être appelée *Courbe des décréments* (voir fig. 2). Elle fait voir très bien les particularités de la déformation de la courbe de résonance. Une droite verticale représenterait une courbe de résonance normale. Le dixième intervalle supérieur et le dixième inférieur ont été omis, car dans ces régions les décréments sont incertains. On examinera la courbure; elle change de sens vers le milieu. En général, la moitié supérieure est plus incertaine, la moitié inférieure plus stable.

Considérons les deux courbes de décréments ensemble. La seconde est plus verticale que la première. Appelons *déformation* le quotient $\frac{dz}{dy}$, dz étant l'accroissement de décrément quand on s'élève de dy . Valeur moyenne du quotient, ou valeur au milieu, peu importe pour l'instant. Ce quotient est plus petit pour la courbe II; les deux courbes divergent vers le bas. En se servant de cette appellation, on énoncera la proposition :

Lorsqu'on augmente l'amortissement du secondaire, la déformation de la courbe de résonance diminue.

Ce résultat est général. Je trace ici (fig. 4) des schémas de courbes de moins en moins déformées. On peut conjecturer qu'avec un amortissement suffisant du secondaire, la courbe des décréments est une droite verticale, et la courbe de résonance correspondante normale. Ce résultat est plausible; mais dans les conditions où ont été faites mes expériences, il ne m'était pas possible d'augmenter assez l'amortissement, l'énergie transmise au galvano-

¹ REMPP. *Ann. d. Phys.*, 17, p. 627, 1905.

² MACKU. *Ann. d. Phys.*, 34, p. 959.

mètre devenant vite trop faible. Je citerai bientôt les résultats de Macku¹.

Comme les différences que présentent les décréments ne peuvent être accidentelles, une moyenne de ces nombres n'a pas un sens parfaitement défini.

Formons toutefois cette moyenne.

Moy. I.	Moy. II.
0,0963	0,1188

Ces moyennes coïncident avec les décréments trouvés à peu près au milieu. Elles caractérisent bien *l'acuité de la résonance*; ce sont des *décréments moyens*.

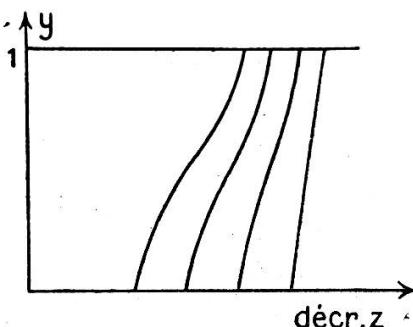


Fig. 4.

Leur différence est

$$0,0225 .$$

Or, dans le cas II, la résistance introduite dans le secondaire est 0,798 ohm; ce qui correspond à un accroissement de décrément

$$\frac{RT}{2L} = 0,0376 \quad (R = 0,798 \cdot 10^9)$$

$$L = 6380$$

$$T = 0,60 \cdot 10^{-6} .$$

L'accroissement observé est donc considérablement plus faible que l'accroissement calculé. Leur rapport est

$$\frac{\text{observé}}{\text{calculé}} = 0,60 .$$

¹ MACKU. *Ann. d. Phys.*, 34., p. 957, et suiv. 1911

Toutes mes expériences concordent qualitativement entre elles ; l'accroissement observé est toujours plus petit que l'accroissement calculé ; le rapport est compris entre 0,60 et 0,70.

La fig. 3 montre dans l'exemple 2 deux autres courbes de décréments faites pour une longueur d'onde environ 3 fois plus grande. Voici les deux séries de décréments :

Hauteur	I	II	Différence
0,9	0,0961	0,1093	0,0132
0,8	0,0943	0,1112	0,0169
0,7	0,0917	0,1110	0,0193
0,6	0,0885	0,1085	0,0200
0,5	0,0848	0,1069	0,0221
0,4	0,0798	0,1036	0,0238
0,3	0,0751	0,1018	0,0267
0,2	0,0709	0,0994	0,0285
0,1	0,0676	0,0979	0,0303
Moyenne	0,0832	0,1055	

Différence observée 0,0223

$$\text{calculée } \frac{RT}{2L} = 0,0345 \quad (R = 1,596 \cdot 10^9 \\ T = 1,606 \cdot 10^{-6} \\ L = 37160)$$

Rapport 0,65 .

Ces exemples montrent que les courbes que donne l'expérience divergent, sous un double point de vue, de celles que prévoit la théorie de Bjerknes :

I. — *Elles sont déformées relativement à une courbe de résonance normale* ; c.à.d. la partie supérieure est élargie, et les valeurs que fournit le procédé ordinaire du calcul des décréments décroissent du haut en bas.

II. — *L'accroissement du décrément moyen est plus petit que l'accroissement calculé.*

En présence de ces faits expérimentaux, que la théorie de Bjerknes est impuissante à expliquer, quelle solution pratique a-t-on prise ?

Dans les recherches physiques, ces divergences entre la théorie et l'expérience sont très gênantes. Le premier phénomène est en lui-même d'importance secondaire ; mais le second rend toute

mesure suspecte. Si en effet la différence entre $\delta_1 + \delta'_2$ et $\delta_1 + \delta_2$ résultats de deux courbes, est fausse, il s'ensuit que $\delta_1 + \delta'_2$ et $\delta_1 + \delta_2$ sont faux. Et alors, la formule des décréments séparés

$$1 + \frac{d}{\delta_2} = \frac{\gamma_m}{\gamma'_m} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 + \delta_2 + d}$$

où d représente le décrément provenant de la résistance additionnelle, ne peut donner pour δ_2 une valeur exacte.

Pourtant Zenneck¹ dit : « De nombreuses mesures ont montré que la méthode est rigoureuse pour la détermination des fréquences, et que pour le décrément du secondaire elle donne des valeurs assez justes. »

A priori la chose s'explique en partie. Tout d'abord Zenneck suppose qu'on substitue à d la valeur *calculée* (en partant de la fréquence et de la résistance ohmique) seule exacte. Remarquons que la valeur fautive ou exacte qu'on introduit pour $\delta_1 + \delta_2$ est d'importance moindre. Par exemple, si l'on part de la première courbe, qui fournit $\delta_1 + \delta_2$ on applique la formule sous la forme donnée plus haut. Mais si l'on part de la deuxième courbe, qui fournit $\delta_1 + \delta'_2$, ce qui est tout aussi légitime, la formule s'écrit :

$$1 + \frac{d}{\delta_2} = \frac{\gamma_m}{\gamma'_m} \cdot \frac{\delta_1 + \delta'_2 - d}{\delta_1 + \delta'_2}$$

et le résultat sera différent.

$$\text{Ex. } \delta_1 + \delta_2 = 0,100 \quad \delta_1 + \delta'_2 = 0,120 \quad d = 0,030$$

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 + \delta_2 + d} = 0,77 \quad \frac{\delta_1 + \delta'_2 - d}{\delta_1 + \delta'_2} = 0,75$$

On voit sur cet exemple que la remarque de Zenneck est vérifiée : la différence entre les deux fractions n'est pas extrême.

D'après cela cette notion de décrément moyen $\delta_1 + \delta_2$ fournit pour δ_2 une valeur acceptable, et l'on a été conduit à regarder le δ_1 qui en résulte par soustraction, comme le décrément du circuit à étincelle. Mais cela ne veut pas dire que cette valeur de δ_1 soit

¹ ZENNECK. Lehrb. d. drathlosen Telegraphie, 1913, p. 147.

exacte. Jusqu'à quel point caractérise-t-elle l'amortissement du primaire? Il est difficile de le dire; car une seule constante ne suffit pas à caractériser cet amortissement. *La partie principale de ce travail est l'exposé d'une théorie qui, partant de l'hypothèse que l'amortissement du circuit à étincelle est déterminé par deux constantes, tend à rendre compte des deux particularités que présentent les courbes de résonance.*¹

§ 3. — *Historique.*

La déformation de la courbe de résonance et la discordance entre l'accroissement observé et l'accroissement calculé du décrément sont explicitement citées par Macku¹ en 1911; cet auteur donne même de ces phénomènes une explication sur laquelle je reviendrai.

D'une manière générale les auteurs constatent et mentionnent cette déformation², mais aucun n'en donne une théorie ou du moins expose d'une manière détaillée les circonstances du phénomène. Quant à la discordance entre les deux accroissements aucun, à part Macku, ne la signale formellement.

On lit dans un ancien article de Lagergreen³ (il s'agit des décréments séparés): « Ou bien l'on se sert de la méthode de résistance, ou bien l'on détermine δ_2 , comme je l'ai fait, exclusivement par des mesures de résonance, une fois avec un fil de cuivre dans le résonateur, une fois avec un fil de fer. Bjerknes a essayé ces deux méthodes. Il en résulta que tous les décréments déterminés par la méthode de résonance (entendez δ_2) sont beaucoup plus petits que ceux calculés par l'autre méthode. On se demande si ces divergences ont pour cause une faute essentielle de l'une des méthodes, ou des erreurs accidentnelles de mesures. » Lagergreen, après des essais, se décide pour les erreurs accidentnelles.

Wien⁴, pour prouver que la nouvelle méthode d'excitation par chocs est bonne, montre la concordance entre les deux accrois-

¹ MACKU. *Ann. d. Phys.*, 34, p. 941, 1911.

² REMPP. *Ann. d. Phys.*, 17, p. 644, 1905.

³ LAGERGREEN. *Ann. d. Phys.*, 64, p. 292, 1898.

⁴ WIEN. *Ann. d. Phys.*, 25, p. 656, 1908.

sements. Et en effet, cette concordance est le critère de la validité des mesures. S'il y a discordance, les valeurs trouvées pour $\delta_1 + \delta_2$ et $\delta_1 + \delta'_2$ sont suspectes; et cette discordance ne peut être éliminée comme on élimine — en apparence du moins — la décroissance des décréments suivant la hauteur en prenant la moyenne.

Si cependant il était possible de trouver une hauteur, pour laquelle les décréments pussent présenter cette concordance, on définirait $\delta_1 + \delta_2$ par le nombre trouvé à cette hauteur. Mais la

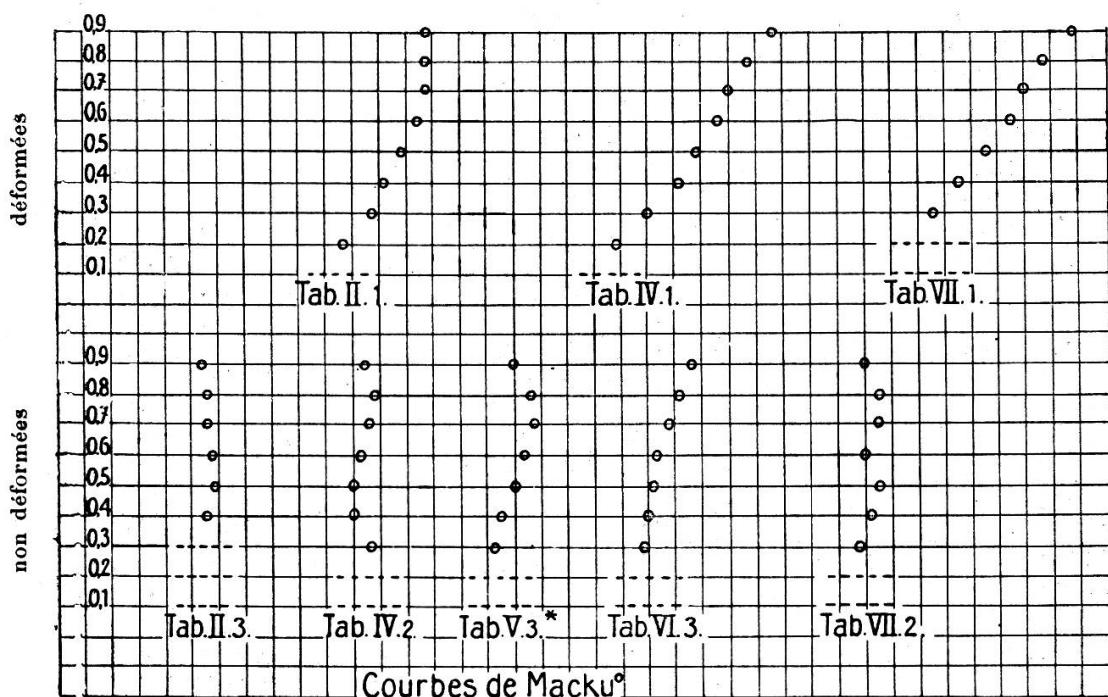


Fig. 5.

chose n'est pas possible. Selon l'habitude, on regarde les décréments déterminés à la partie supérieure comme plus sûrs et plus probables, et pour ceux-là la concordance n'existe pas. Pour la partie inférieure cette concordance est meilleure, mais loin d'être parfaite. L'observation des courbes données comme exemples conduit à ces remarques.

J'en viens à Macku. En général ses observations concordent avec les miennes. D'après les séries de décréments que cet auteur donne, il est possible de construire les courbes de décréments. (fig. 5). Une exacte comparaison avec les miennes me semble difficile, car les points inférieurs manquent généralement. C'est que

Macku attache de l'importance à la moitié supérieure, tandis que mes observations m'ont convaincu que c'est la partie médiane ou inférieure qui caractérise le mieux l'allure de la courbe. La forme de ces courbes est en général plus rectiligne, ou au moins très indécise.

Macku tire de ses observations 3 conclusions :

I. La déformation de la courbe de résonance diminue lorsque l'amortissement du secondaire augmente.

II. La déformation persiste quand l'amortissement du primaire augmente.

III. L'accroissement observé pour le décrément est plus petit que l'accroissement calculé¹.

Il en tire la conséquence que la courbe de résonance faite avec une résistance additionnelle assez forte dans le secondaire donne le *vrai décrément* $\delta_1 + \delta_2 + \Delta\delta_2$, parce qu'elle est sensiblement normale, et que par suite le *vrai décrément* $\delta_1 + \delta_2$ s'obtient par la soustraction du $\Delta\delta_2$ calculé.

Comme exemple, je transcris une série de mesures.

TABELLE II (l. c., page 958).

Etincelle 3 mm $\delta_2 = 0,0038$

Haut.	I	II $\Delta\delta_2 = 0,0120$	III $\Delta\delta_2 = 0,0254$
0,9	0,0336	0,0435	0,0525
0,8	0,0336	0,0444	0,0530
0,7	0,0335	0,0441	0,0530
0,6	0,0327	0,0433	0,0533
0,5	0,0316	0,0421	0,0534
0,4	0,0303	0,0414	0,0530
0,3	0,0296	0,0403
0,2	0,0272	0,0388
0,1
	moy. 0,0323	moy. 0,0431	moy. 0,0531

(Ces moyennes sont formées des 5 valeurs qui se lisent aux hauteurs qui vont de 0,8 à 0,4).

« En soustrayant de la moyenne de la dernière courbe 0,0531 l'augmentation 0,0254, il reste pour la vraie somme des décré-

¹ La conclusion III n'est pas formulée dans l'article cité; mais elle s'en dégage nettement.

ments seulement 0,0277, tandis que la première courbe fournit 0,0323, donc une valeur trop forte de 16 % ».

A supposer que la vraie somme $\delta_1 + \delta_2$ existe, le procédé de Macku ne me paraît pas établi d'une manière indiscutable. Car à propos des mesures de cet auteur je puis faire deux remarques.

1^o Macku présente 5 courbes soi-disant non déformées¹, par le fait que $\delta_1 = \delta_2$ approximativement. Il est vrai que la partie supérieure est à peu près verticale. Mais si elles étaient complètes (et aussi un peu plus régulières) on verrait assurément la déformation. Car dans mes expériences j'ai toujours observé que la déformation n'est visible nettement que dans la partie inférieure, et que dans certaines courbes très déformées, la partie supérieure pouvait néanmoins être assez verticale.

2^o La 3^{me} courbe qui a pour décrément moyen 0,0531 est donc à peu près normale. Mais je demande: Si une nouvelle courbe est construite avec δ_2 encore plus grand, elle sera *a fortiori* normale; mais y aura-t-il concordance entre les deux accroissements? C'est la condition nécessaire pour que le procédé de Macku soit valable. Les mesures que je trouve dans l'article cité ne répondent pas à cette question, sauf peut-être le Tableau II dont on peut tirer une réponse négative. En effet

$$\begin{array}{ll} \text{Courbe I} & \delta_1 + \delta_2 = 0,0323 \\ & \text{II} \qquad \qquad \qquad 0,0431 \end{array}$$

Accroissement observé 0,0108 Calculé 0,0120 Rapport 0,90

$$\begin{array}{ll} \text{Courbe II} & \delta_1 + \delta_2 = 0,0431 \\ & \text{III} \qquad \qquad \qquad 0,0531 \end{array}$$

Accroissement observé 0,0100 Calculé 0,0134 Rapport 0,75

Ce rapport ne tend pas vers l'unité quand δ_2 augmente, comme il le faudrait.

Macku explique les trois phénomènes cités par un arrêt brusque de l'étincelle, une fois que l'amplitude du potentiel est tombée à une certaine valeur. Ses calculs le conduisent à un procédé simple pour déterminer à quelle valeur relative est réduite l'amplitude du potentiel au moment où l'extinction de l'étin-

¹ Il reconnaît que les 2 courbes: Tab. V. 3 et Tab. VI. 3 ne sont pas encore absolument normales.

celle a lieu. Ainsi la vraie valeur, selon lui, de $\delta_1 + \delta_2$ dans l'exemple cité est 0,0277 ; tandis que la courbe I donne 0,0323, valeur qui est trop forte de 16 %. En divisant ce nombre 16 par un certain facteur de proportionnalité qui est 4,7 il trouve 3,4. Alors Macku conclut que l'étincelle s'est éteinte lorsque l'amplitude du potentiel est tombée aux 3,4 % de sa valeur initiale.

Ces considérations sur l'article de Macku montrent que l'hypothèse de cet auteur n'est pas indiscutablement vérifiée, du moins pour des étincelles de moyenne grandeur. En tout cas sa théorie n'en exclut pas une autre.

PREMIÈRE PARTIE

Examen de la théorie de Bjerknes.

§ 4.— *Conditions d'application de la formule de Bjerknes.*

Avant de chercher une nouvelle théorie qui explique ces divergences, il vient à l'idée d'examiner si elles ne seraient pas dues à la forme un peu trop simplifiée de la formule de Bjerknes¹. On la présente en effet comme valable dans un domaine assez étroit, et peut-être que dans ce domaine même elle est encore fautive, l'importance de l'ensemble des termes négligés dans le cours des calculs étant difficile à apprécier. Cette formule — ce n'est autre que l'équation de la courbe de résonance — savoir

$$\delta_1 + \delta_2 = 2\pi \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

est donnée dans les traités comme valable sous les conditions suivantes :

1. Couplage extrêmement lâche
2. $(\delta_1 + \delta_2)^2$ négligeable devant $4\pi^2$
3. $(n_2 - n_1)^2 \gg 4n_1^2$

Je me suis toujours placé dans ces conditions ; en effet :

¹ TISSOT. *Osc. élect.*, 1910, p. 403.

ad 1. Je montrerai dans le paragraphe 11 que dans mes expériences le couplage était suffisamment lâche; d'autre part toutes mes déductions théoriques supposeront invariablement une réaction nulle du secondaire sur le primaire;

ad 2. Comme $\delta_1 + \delta_2$ n'atteint jamais 0,2, le rapport $\left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2\pi}\right)^2$ est toujours inférieur à 0,001;

ad 3. Les parties inférieures de mes courbes correspondent rarement à une dissonance telle que

$$\left(\frac{n_2 - n_1}{n_1}\right)^2 = 0,0025$$

Il est visible que lorsque les conditions 2 et 3 sont moins bien réalisées, les erreurs sont encore insignifiantes. En suivant le détail des calculs qui conduisent à la formule de l'effet thermique $\int_0^\infty i^2 dt$ et à la formule des décréments, on est invité à chaque pas à utiliser ces hypothèses simplifiantes. Chacune de ces simplifications paraît à chaque instant légitime; mais elles sont si fréquentes que leur ensemble nous laisse un certain malaise en face du résultat final. J'ai en vue surtout le procédé du calcul de l'effet thermique donné par Bjerknes¹, Tissot² et Ferrié³.

Il m'a paru intéressant d'essayer une autre méthode, espérant qu'elle me permettrait de laisser à la formule toute sa généralité. Cette méthode, qui nous dispense de la résolution de l'équation différentielle, a été employée avec succès par plusieurs auteurs, notamment Mandelstam et Papalex⁴, Macku⁵; et je dois dire que le cas spécial du couplage extrêmement lâche, que je vais traiter, est implicitement contenu dans le cas d'un couplage quelconque traité par Macku.

Toutefois la méthode de cet auteur, par sa généralité même, est très pénible à contrôler; puis il n'a pas exposé d'une manière claire et nette une théorie de la courbe de résonance, basée sur sa formule.

¹ BJERKNES. *Ann. d. Phys.*, 55, p. 129 et suiv., 1895.

² TISSOT. *Oscil. élect.*, 1910, p. 380 et suiv.

³ BOULANGER et FERRIÉ. *T. S. F.*, 1909, p. 161 et suiv.

⁴ MANDELSTAM et PAPALEXI. *Ann. d. Phys.*, 33, p. 493, 1905.

⁵ MACKU. *Jahrb.*, II, p. 251, 1909.

Une telle théorie est pourtant de première importance, et malgré les travaux de Macku, les traités et les revues parus après l'année 1909 ne mentionnent et n'exposent que la méthode donnée en détail par Bjerknes, et remaniée par Tissot, Ferrié, Zenneck.

Il ne sera donc pas inutile d'employer la méthode, dont j'ai parlé, à calculer l'effet thermique $\int_0^\infty i^2 dt$, d'où la formule des décréments se déduit, en partant de l'hypothèse même de Bjerknes. Cette hypothèse consiste à admettre que la tension aux bornes du condensateur, en couplage extrêmement lâche, est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2V}{dt^2} + 2\alpha_2 \frac{dV}{dt} + m_2^2 V = \mathcal{Q} e^{-\alpha_1 t} \cos (m_1 t + \Phi)$$

avec les conditions initiales

$$V = \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0 .$$

J'admettrai cependant que $\Phi = 0$. Il s'agit donc de traiter cette équation pour obtenir $\int_0^\infty i^2 dt$ et d'observer les différences que présentera la formule comparée avec celle qu'on donne communément.

Ces conclusions peuvent être résumées sous les articles suivants :

1. Les quantités que Bjerknes a négligées dans l'établissement de sa formule ont pour effet de donner à sa courbe de résonance une forme qui n'est pas exactement pareille à celle que l'on obtient par la formule établie dans toute sa rigueur. En particulier les remarques relatives au point de résonance, au point d'isochronisme, à la dissymétrie ne concordent pas avec ce qu'on lit communément.

2. La formule des décréments telle qu'on la donne est, après une légère modification et à condition d'introduire un facteur de correction très simple, valable lorsque δ_1 est négligeable devant $4\pi^4$, et pour une dissonance quelconque.

§ 5. — *Calcul de l'effet thermique.*

Considérons le circuit secondaire de résistance R , de self-induction L , de capacité C (fig. 6). Soit $V = V_A - V_B$ la tension de l'armature A par rapport à B.

$$i = C \frac{dV}{dt} \quad \text{courant de charge.}$$

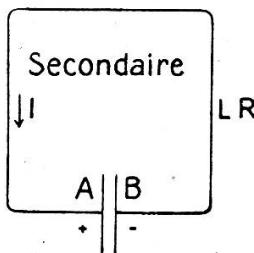


Fig. 6.

Nous admettrons que la force électro-motrice extérieure est de la forme

$$\mathcal{E} = E e^{-\alpha_1 t} \cos m_1 t .$$

Elle est de signe positif lorsqu'elle donne naissance à un courant positif.

La loi de Kirchhoff appliquée à ce circuit fournit l'équation différentielle

$$V + CR \frac{dV}{dt} + LC \frac{d^2V}{dt^2} = \mathcal{E} .$$

Ecrivons

$$\frac{R}{L} = 2\alpha_2 , \quad \frac{1}{LC} = m_2^2 , \quad m_2^2 E = \mathcal{C} .$$

Les accents désigneront des dérivées par rapport au temps.

$$V'' + 2\alpha_2 V' + m_2^2 V = \mathcal{C} e^{-\alpha_1 t} \cos m_1 t . \quad (1)$$

Conditions aux limites :

$$t = 0 \quad V = V' = 0 ;$$

et nous admettrons : $t = \infty \quad V = V' = 0$.

J'ai admis qu'au temps $t = 0$, \mathcal{E} est maximum; donc que la phase α' de l'équation de départ de BJERKNES est nulle.

Pour simplifier les écritures on peut poser:

$$\begin{aligned} P &= e^{-\alpha_1 t} \cos m_1 t & Q &= e^{-\alpha_1 t} \sin m_1 t \\ P' &= -\alpha_1 P - m_1 Q & Q' &= -\alpha_1 Q + m_1 P \\ P'' &= (\alpha_1^2 - m_1^2) P + 2m_1 \alpha_1 Q & Q'' &= (\alpha_1^2 - m_1^2) Q - 2m_1 \alpha_1 P \\ \int_0^\infty P^2 dt &= C_1 & \int_0^\infty PQ dt &= C_2 \end{aligned}$$

C_1 et C_2 sont des constantes qu'il sera facile de calculer.

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par V' et intégrons entre $t = 0$ et $t = \infty$.

$$\int_0^\infty V'' V' dt + 2\alpha_2 \int_0^\infty V'^2 dt + m_2^2 \int_0^\infty VV' dt = \mathfrak{C} \int_0^\infty PV' dt .$$

Ces intégrales peuvent être calculées, ou transformées par l'intégration par parties.

$$\int_0^\infty V'' V' dt = \left[\frac{1}{2} V'^2 \right]_0^\infty = 0$$

$$\int_0^\infty VV' dt = \left[\frac{1}{2} V^2 \right]_0^\infty = 0$$

$$\int_0^\infty PV' dt = [PV]_0^\infty - \int_0^\infty VP' dt = \alpha_1 \int_0^\infty VP dt + m_1 \int_0^\infty VQ dt$$

On a donc

$$2\alpha_2 \int_0^\infty V'^2 dt = \mathfrak{C} \alpha_1 \int_0^\infty VP' dt + \mathfrak{C} m_1 \int_0^\infty VQ dt . \quad (2)$$

En multipliant de même par P et par Q et en intégrant, on trouve les deux autres équations:

$$(\alpha_1^2 - m_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + m_2^2) \int_0^\infty VP dt + (2m_1 \alpha_1 + 2m_1 \alpha_2) \int_0^\infty VQ dt = \mathfrak{C} C_1 \quad (3)$$

$$-(2m_1 \alpha_1 + 2m_1 \alpha_2) \int_0^\infty VP dt + (\alpha_1^2 - m_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 + m_2^2) \int_0^\infty VQ dt = \mathfrak{C} C_2 \quad (4)$$

Je pose :

$$h_1 = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2$$

$$h_2 = 2m_1(\alpha_1 + \alpha_2)$$

En substituant dans (2) les valeurs des intégrales $\int VPdt$ et $\int VQdt$ fournies par (3) et (4), on obtient :

$$2\alpha_2 \int_0^\infty V'^2 dt = \frac{\mathcal{C}^2}{h_1^2 + h_2^2} [\alpha_1(C_1 h_1 - C_2 h_2) + m_1(C_2 h_1 + C_1 h_2)]$$

De l'intégrale définie écrite au membre gauche se déduit facilement l'*effet thermique total* :

$$\int_0^\infty i^2 dt = \int_0^\infty (CV')^2 dt = C^2 \int_0^\infty V'^2 dt$$

$$C^2 \mathcal{C}^2 = C^2 \cdot \frac{E^2}{L^2 C^2} = \frac{E^2}{L^2}$$

Effet thermique :

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{2\alpha_2 L^2 (h_1^2 + h_2^2)} [(\alpha_1 C_1 + m_1 C_2) h_1 + (m_1 C_1 - \alpha_1 C_2) h_2]$$

Le calcul de C_1 et de C_2 n'offre aucune difficulté.

On trouve :

$$C_1 = \frac{1}{4\alpha_1} + \frac{\alpha_1}{4(\alpha_1^2 + m_1^2)}$$

$$C_2 = \frac{m_1}{4(\alpha_1^2 + m_1^2)}$$

Par suite les coefficients de h_1 et de h_2 sont :

$$\alpha_1 C_1 + m_1 C_2 = \frac{1}{2}$$

$$m_1 C_1 - \alpha_1 C_2 = \frac{m_1}{4\alpha_1}$$

Pour mieux faire apparaître la variable, je remplacerai

$$h_1 = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \quad \text{par } x$$

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{4L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{\alpha_1 x + m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{x^2 + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad (5)$$

c'est la formule de l'*effet thermique*.

Afin qu'on puisse comparer, je transcris ici en premier lieu la formule donnée par Tissot¹ ou Ferrié², en utilisant mes notations :

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{4L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{(m_2 - m_1)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2};$$

en second lieu, la formule de Macku³ où je fais $k = 0$

$$\mathcal{J} = F^2 k_{21}^2 \cdot \frac{\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1}{4\delta_1 \delta_2 [(b_1 - b_2)^2 + 4(\delta_1 + \delta_2)(\delta_1 b_2 + \delta_2 b_1)]} \quad (5')$$

où δ_1 et δ_2 signifient α_1 et α_2 ; de plus $b_1 = m_1^2 + \alpha_1^2$ et $b_2 = m_2^2$.

§ 6. — Résonance et isochronisme.

La formule de l'effet thermique est (5)

$$\mathcal{J} = K \frac{\alpha_1 x + m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{x^2 + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad \text{où} \quad K = \frac{E^2}{4L^2 \alpha_1 \alpha_2} \quad (6)$$

$$x^2 \mathcal{J} - K \alpha_1 x + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \mathcal{J} - K m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \quad (6')$$

$$x = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2.$$

On supposera que C , la capacité du secondaire, est variable. Le maximum de l'effet thermique est déterminé par $\frac{d\mathcal{J}}{dC} = 0$.

Or on a :

$$\frac{d\mathcal{J}}{dC} = \frac{d\mathcal{J}}{dx} \cdot \frac{dx}{dC}$$

Si $\frac{d\mathcal{J}}{dx} = 0$, alors $\frac{d\mathcal{J}}{dC} = 0$ et réciproquement, car $\frac{dx}{dC} \neq 0$.

Donc le maximum est déterminé par $\frac{d\mathcal{J}}{dx} = 0$. On différentie l'équation (6') par rapport à x , et l'on fait $\frac{d\mathcal{J}}{dx} = 0$.

$$2x\mathcal{J} - K\alpha_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{J}_m = \frac{K\alpha_1}{2x}.$$

¹ TISSOT. *Oscil. élect.*, 1910, p. 388.

² BOULANGER et FERRIÉ. *T. S. F.*, 1909, p. 166.

³ MACKU. *Jahrb.*, II, 1909, p. 263, formule 32.

On substitue \mathcal{J}_m dans l'équation (6'), et l'on trouve:

$$\alpha_1 x^2 + 2m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)x - 4m_1^2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 0.$$

Cette équation fournit l'abscisse du point de résonance.

$$x = m_1^2 \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_1^2}{m_1^2}} \right)$$

Pour se débarrasser du radical, on ajoute à l'intérieur la quantité $\frac{4\alpha_1^4}{m_1^4}$, ce qui revient à supposer que $\frac{4\alpha_1^4}{m_1^4}$ autrement dit $\frac{\delta_1^4}{4\pi^4}$ est négligeable devant l'unité¹.

Avec cette hypothèse on a

$$\begin{aligned} -1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_1^2}{m_1^2}} &\text{ approx. } \frac{2\alpha_1^2}{m_1^2} \\ x = 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) \\ m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 &= 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) \\ m_{2r}^2 = m_1^2 + \alpha_1^2 &\text{ point de résonance.} \end{aligned} \quad (7)$$

Considérons l'équation $V'' + 2\alpha_2 V' + m_2^2 V = 0$ qui est celle des oscillations propres du secondaire. On voit aisément que le carré de la pulsation propre est $m_2^2 - \alpha_2^2$. Il y a isochronisme, lorsque la pulsation propre égale la pulsation du primaire qui est m_1 .

$$m_2^2 - \alpha_2^2 = m_1^2 \quad \text{d'où} \quad m_{2r}^2 = m_1^2 + \alpha_2^2 \quad \text{point d'isochronisme.} \quad (8)$$

§ 7. — Courbe de résonance. Sa dissymétrie.

Je rappelle que (6)

$$\mathcal{J} = K \frac{\alpha_1 x + m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{x + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

¹ En effet, il faut estimer l'erreur par rapport à m_1^2 et non pas par rapport à la différence $m_{2r}^2 - m_1^2$.

Le maximum a lieu pour $x = \frac{K\alpha_1}{2\mathcal{J}}$. En substituant cette valeur de x dans l'équation, on trouve

$$\mathcal{J}_m = \frac{K}{8(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha_1^2}{m_1^2}} \right]$$

Avec la même approximation que précédemment

$$\mathcal{J}_m = \frac{K \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} \right)}{4(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{d'où} \quad K = \frac{4(\alpha_1 + \alpha_2) \mathcal{J}_m}{1 + \frac{\alpha_1^2}{m_1^2}} \quad (9)$$

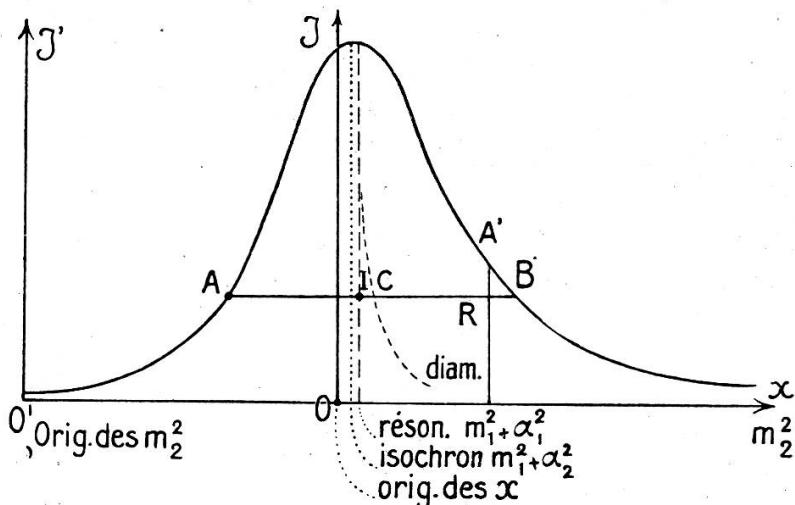


Fig. 7.

En remplaçant K par $\frac{E^2}{4L^2\alpha_1\alpha_2}$ (6), on trouve

$$\mathcal{J}_m = \frac{E^2}{16L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \left[1 + \frac{\alpha_1^2}{m_1^2} \right]. \quad (10)$$

Pour examiner la *forme* de la courbe, on considérera \mathcal{J} comme fonction, soit de x , soit de m_2^2 . On se rappellera que

$$x = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \quad \text{et} \quad m_2^2 = \frac{1}{LC}.$$

On supposera donc portées en abscisses des valeurs proportionnelles aux inverses des capacités. Voir fig. 7.

L'origine des m_2^2 est $0'$; l'origine des x est 0 ; $\overline{00}' = m_1^2 - \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2$.

L'intervalle de variation de m_2^2 est $(0, \infty)$.

L'intervalle de variation de x est $(-m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2, \infty)$.

Pour $m_2^2 = \infty$, $\mathcal{J} = 0$; mais pour $m_2^2 = 0$ (alors $C = \infty$) on a:

$$\mathcal{J} = K \frac{\alpha_1 (-m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2) + m_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{(-m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2)^2 + 4m_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2} \text{ approx. } K \cdot \frac{\alpha_2}{m_1^2}$$

$$\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_m} = \frac{4\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{m_1^2}$$

Ainsi pour $C = \infty$, le galvanomètre conserve une déviation finie.

L'origine des x ne coïncide ni avec le point d'isochronisme ni avec le point de résonance.

Le maximum a lieu pour	$m_2^2 = m_1^2 + \alpha_1^2$
l'isochronisme " "	$m_2^2 = m_1^2 + \alpha_2^2$
le point $x = 0$ " "	$m_2^2 = m_1^2 - \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2$

La *dissymétrie* est caractérisée par le diamètre. A une valeur déterminée de \mathcal{J} correspondent deux valeurs de x dont la moyenne est

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{K\alpha_1}{2\mathcal{J}}$$

C'est l'abscisse du point C, milieu de la corde AB. La courbe formée par les points tels que C est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes O \mathcal{J} et O x . Cette hyperbole est tout entière dirigée du côté des x positifs. Ce fait est en corrélation étroite avec la propriété suivante: A des valeurs équidistantes, mais de part et d'autre de l'*axe de résonance*, correspondent des ordonnées dont celle de droite est plus grande. *La courbe est relevée du côté des hautes fréquences.*

En effet, remarquons que l'hyperbole ne coupe pas l'axe de résonance entre O et \mathcal{J}_m , puisqu'elle l'atteint au maximum. Alors I est à gauche de C. Cherchons le point R tel que IR = IA; et construisons la verticale passant par R. A et A' sont à égale

distance de l'axe de résonance, et l'ordonnée de A' est plus grande.

L'équation de Macku, (5') § 5, quoique un peu différente de celle que j'ai établie, laisse cependant reconnaître une dissymétrie de même sens: si l'on porte m_2 comme abscisses, la courbe est relevée du côté des hautes fréquences.

On a toujours constaté que les courbes de résonance, telles que l'expérience les donne, sont dissymétriques. Quelques auteurs se sont étonnés de cette dissymétrie, parce qu'ils avaient sans doute sous les yeux une formule telle que celle donnée par Zenneck¹

$$i_{eff}^2 = \frac{E_{ao}^2}{16p_2^2} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \cdot \frac{1}{\pi^2 (n_1 - n_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}$$

et la courbe que représente cette équation est symétrique.

Eickhoff² en était venu à regarder cette particularité comme la seconde divergence entre la théorie de Bjerknes et l'expérience, la première étant la décroissance des décréments suivant la hauteur. Il l'explique par des effluves dans les condensateurs du primaire. Il constate par des expériences *ad hoc* que les effluves ont pour effet de rendre la courbe dissymétrique (abscisses fréquences), et cette dissymétrie est telle que le diamètre est dirigé du côté des basses fréquences.

Que tel soit l'effet des effluves, les expériences d'Eickhoff l'ont établi; mais en dehors de cette circonstance la dissymétrie apparaît d'une manière régulière et normale.

Je n'entreprendrai pas l'étude théorique et expérimentale de la dissymétrie, dont l'importance pratique est minime. Un essai de ce genre que je trouve dans un article de Schmidt³ ne me paraît pas démonstratif. Une étude quantitative est complexe et délicate. Certaines causes d'erreurs qu'on néglige dans la recherche des décréments peuvent jusqu'à renverser le sens de la dissymétrie⁴.

¹ ZENNECK. *Elect. Schw. u. drath. Tel.*, 1905, p. 592.

² EICKHOFF. *Phys. Zeit.*, 8, p. 567, note, 1907.

³ K. E. F. SCHMIDT, *Phys. Zeit.*, 9, p. 13, 1908.

⁴ Par exemple: 1^o Variation de la résistance du secondaire avec la fré-

§ 8. — *Formule des décréments.*

Le point de résonance est le seul point observable; il convient donc de le prendre comme origine des abscisses.

$$Jx^2 - K\alpha_1 x + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 J - m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

Je pose

$$\xi \equiv x - 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)$$

La substitution $x = \xi + 2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)$ donne

$$J\xi^2 - \alpha_1 [K - 4(\alpha_1 + \alpha_2) J] \xi + 4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 J - \\ K(m_1^2 + 2\alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2) = 0.$$

Soit $-\xi'\xi''$ le produit négatif des segments déterminés à la hauteur J (voir fig. 8).

$$-\xi'\xi'' = 4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \frac{K(m_1^2 + 2\alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)}{J}$$

$$\xi'\xi'' = 4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left[\frac{K(m_1^2 + 2\alpha_1^2)}{4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)J} - 1 \right]$$

Je rappelle que (9) $K = \frac{4(\alpha_1 + \alpha_2)J_m}{1 + \frac{\alpha_1^2}{m_1^2}}$. On a donc :

$$\frac{K(m_1^2 + 2\alpha_1^2)}{4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)J} \equiv \frac{J_m}{J} \cdot \frac{1 + \frac{2\alpha_1^2}{m_1^2}}{\left(1 + \frac{\alpha_1^2}{m_1^2}\right)^2}$$

Toujours avec la même approximation $\frac{\alpha_1^4}{m_1^4}$ négligeable devant l'unité, cette expression devient $\frac{J_m}{J}$.

$$\xi'\xi'' = 4(m_1^2 + \alpha_1^2)(\alpha_1 + \alpha_2)^2 \left(\frac{J_m}{J} - 1 \right)$$

quence. 2° Si $L\omega$ n'est pas grand devant R dans le circuit indicateur. 3° Couplage des divers circuits.

Divisons membre à membre par $m_{2r}^4 = (m_1^2 + \alpha_1^2)^2$

$$\begin{aligned} \frac{\xi'}{m_{2r}^2} \cdot \frac{\xi''}{m_{2r}^2} &= \frac{4(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{m_1^2 + \alpha_1^2} \left(\frac{\mathcal{J}_m}{\mathcal{J}} - 1 \right) \\ &= \frac{(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_1)^2}{\pi^2 \left(1 + \frac{\alpha_1 T_1^2}{4\pi^2} \right)} \left(\frac{\mathcal{J}_m}{\mathcal{J}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Ici $T_1 = \frac{2\pi}{m_1}$. Introduisons encore $\delta_2 = \alpha_2 T_1$, $\delta_1 = \alpha_1 T_1$; ce sont les décréments pour la période T_1 de l'excitateur.

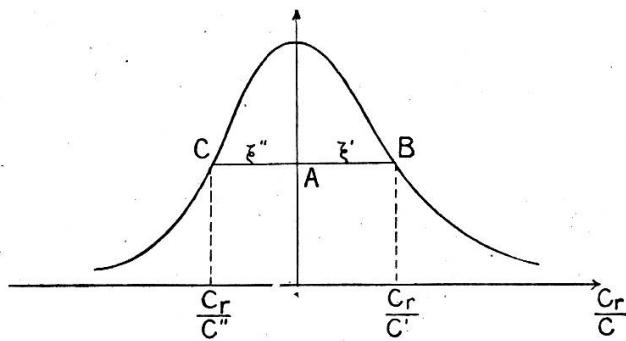


Fig. 8.

On tire

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \sqrt{\frac{\xi'}{m_{2r}^2} \cdot \frac{\xi''}{m_{2r}^2}} \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_m - \mathcal{J}}} \sqrt{1 + \frac{\delta_1}{4\pi^2}}$$

Portons en abscisses non pas m_2^2 , mais $\frac{m_2^2}{m_{2r}^2}$, donc les rapports $\frac{C_r}{C}$. Soient AB et AC les segments déterminés à la hauteur \mathcal{J} ; introduisons la notation $\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_m} = y$.

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \sqrt{AB \cdot AC} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \sqrt{1 + \frac{\delta_1^2}{4\pi^2}}. \quad (11)$$

Telle est la formule qui donne la somme des décréments du primaire et du secondaire, pour la période T_1 du primaire. Elle n'a pas tout à fait l'aspect des formules courantes, mais ces dernières s'en déduisent par les simplifications usuelles. Le dernier

radical est un facteur de correction qu'on peut supposer égal à l'unité dans la plupart des cas.

1^o Elle est valable si $\frac{\delta_1^4}{4\pi^4}$ est négligeable devant l'unité. On peut donc dire qu'en pratique elle est valable quels que soient les décréments δ_1 et δ_2 .

2^o La dissymétrie intervient comme un phénomène tout à fait normal; elle ne gêne nullement l'application de la formule.

Ces deux remarques ont de l'intérêt lorsque le primaire est extrêmement amorti. Avec l'amortissement s'accentue la dissymétrie.

3^o La formule est valable pour des variations quelconques de capacité: autrement dit quelle que soit la hauteur à laquelle on coupe la courbe de résonance¹.

§ 9. — Formules pratiques.

Je me propose :

1^o de donner à l'équation de la courbe de résonance une forme *normale* ou *canonique*, plus simplifiée, pouvant servir commodément dans toutes sortes de considérations;

2^o d'apporter une légère simplification à la formule des décréments.

La formule de l'effet thermique est (5)

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{4L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{\alpha_1 x + m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{x^2 + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

où

$$x = m_2^2 - m_1^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2.$$

Si l'on regarde m_2^2 comme variable, cette équation est celle de la courbe de résonance.

Supprimons simplement les termes $\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2$ qui figurent dans l'expression de x . L'erreur commise est insignifiante,

¹ Le décrément $\delta_2 = \alpha_2 T_2$ varie avec la fréquence du secondaire, donc varie en même temps que la capacité du secondaire. Cette remarque a été considérée par plusieurs auteurs comme une restriction à la validité de la formule de Bjerknes. Mais ici est introduit $\delta_2 = \alpha_2 T_1$ (notez T_1) comme une constante, indépendante de la fréquence.

que l'on considère ou non le voisinage de la résonance¹. Mais ce qui importe surtout c'est que l'expression du maximum demeure la même : et c'est le cas, comme on le verra. Nous écrivons donc

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{4L^2} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \cdot \frac{\alpha_1 x + m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{x^2 + 4m_1^2(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \quad \text{avec } x = m_2^2 - m_1^2.$$

En notant que $\frac{\alpha_1}{m_1} = \frac{\delta_1}{2\pi}$, $\frac{\alpha_2}{m_1} = \frac{\delta_2}{2\pi}$, nous pouvons écrire :

$$\mathcal{J} = \frac{\pi E^2}{2L^2 m_1^3} \cdot \frac{1}{\delta_1 \delta_2} \cdot \frac{\frac{\delta_1}{m_1^2} \left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1 \right) + (\delta_1 + \delta_2)}{\left(\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{\pi} \right)^2}$$

Employons les nouvelles notations :

$$\frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{C_r}{C} - 1 = x ; \quad \frac{\delta_1}{\pi} = \theta_1 , \quad \frac{\delta_2}{\pi} = \theta_2 .$$

$$\mathcal{J} = \frac{E^2}{2L^2 m_1^3} \cdot \frac{1}{\theta_1 \theta_2} \cdot \frac{\theta_1 x + (\theta_1 + \theta_2)}{x^2 + (\theta_1 + \theta_2)^2} . \quad (12)$$

C'est la forme simplifiée dont je parlais.

Cherchons le maximum de l'expression

$$u = \frac{\theta_1 x + (\theta_1 + \theta_2)}{x^2 + (\theta_1 + \theta_2)^2} ;$$

on trouve

$$u_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\theta^2}}{2(\theta_1 + \theta_2)}$$

Nous pouvons négliger $4\theta^2$ devant l'unité. Si nous introduisons $u = \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}$ dans le côté droit de l'équation (12), nous

¹ Il serait facile de le montrer en remarquant qu'on utilise les deux versants de la courbe pour le calcul des décréments, et que dans la plupart

des cas $\frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1^2}$ est compris entre 0,1 et 0,01, enfin que $\frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_1 \alpha_2}{m_1^2}$ est de l'ordre de 0,0002.

trouvons

$$\mathcal{J}_m = \frac{E^2}{2L^2 m_1^3} \cdot \frac{1}{\theta_1 \theta_2 (\theta_1 + \theta_2)}$$

On constate que c'est bien l'expression attendue pour le maximum (10), expression délivrée du facteur de correction. Il est intéressant de remarquer que *cette expression du maximum s'obtient immédiatement à partir de la forme simplifiée de l'équation (12), en faisant x = 0.*

Je passe à la transformation de la formule des décréments. Cette formule est (11)

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \sqrt{AB \cdot AC} \sqrt{\frac{y}{1-y}};$$

(j'ai abandonné le facteur de correction).

$$AB = \frac{C_r}{C'} - 1, \quad AC = 1 - \frac{C_r}{C''}.$$

La simplification est basée sur la remarque suivante : même si la courbe a une dissymétrie assez prononcée, on peut sans erreur sensible remplacer la moyenne géométrique de AB et AC par la moyenne arithmétique. On aura donc

$$\delta_1 + \delta_2 = \pi \left(1 - \frac{C_r}{C}\right) \sqrt{\frac{y}{1-y}}. \quad (13)$$

$1 - \frac{C_r}{C}$ désignant la demi-corde. Si enfin on veut utiliser la Table donnée par Zenneck¹, qui dispense d'effectuer le calcul de la racine carrée, on appelle Z le nombre inscrit dans cette table pour la hauteur y, et l'on aura :

$$\delta_1 + \delta_2 = \frac{Z}{4} \times \text{corde.}$$

On a supposé que $\frac{C_r}{C}$ était porté en abscisses; cette formule diffère de celle de Brandes en ce que cette dernière suppose des abscisses proportionnelles aux valeurs de la capacité,

¹ ZENNECK. *Lehrb. der draht. Tel.*, 1913, p. 481.

§ 10. — *Vérification expérimentale de la formule.*

Quand on essaie d'appliquer la nouvelle formule des décréments à un cas particulier, on arrive à cette conclusion que ses résultats sont presque identiques à ceux des formules de Bjerknes et de Brandes. En sorte que l'on peut bien dire que les formules usuelles sont plus exactes qu'on ne le croit.

Je transcris ici les valeurs fournies par une seule et même expérience (voir fig. 9), à l'aide de la formule de Brandes et à l'aide de la nouvelle formule. Pour la courbe I, à laquelle s'applique la formule de Brandes, les abscisses sont les valeurs de la capacité C. Pour la courbe II, qui n'est que la transformée de la courbe I, les abscisses sont les inverses $\frac{1}{C}$; dans ces conditions la formule rigoureuse est applicable. Les courbes sont parfaitement normales, étant obtenues par le procédé d'excitation par chocs.

0,9	Brandes : $\delta_1 + \delta_2 = 0,0729$	Nouv. formule : $\delta_1 + \delta_2 = 0,0731$
0,8		0,0726
0,7	0,0734	0,0729
0,6	0,0729	0,0733
0,5	0,0729	0,0731
0,4	0,0726	0,0726
0,3	0,0728	0,0730
0,2	0,0728	0,0728
0,1	0,0737	0,0735

Grober¹ avait déjà constaté le même fait. Il calcule l'expression de l'effet thermique d'une manière parfaitement rigoureuse, mais par une autre méthode que celle qui a été utilisée dans ce travail. Comme sa formule est extrêmement compliquée, il est obligé de construire des courbes; et ces courbes ne fournissent pas des résultats différents de ceux des formules courantes.

Il s'ensuit que le phénomène de la décroissance des décréments est inexplicable par la théorie de Bjerknes, malgré la rigueur avec laquelle on l'applique.

¹ GROBER. *Phys. Zeit.*, 12, p. 121, à la fin de l'article. 1911.

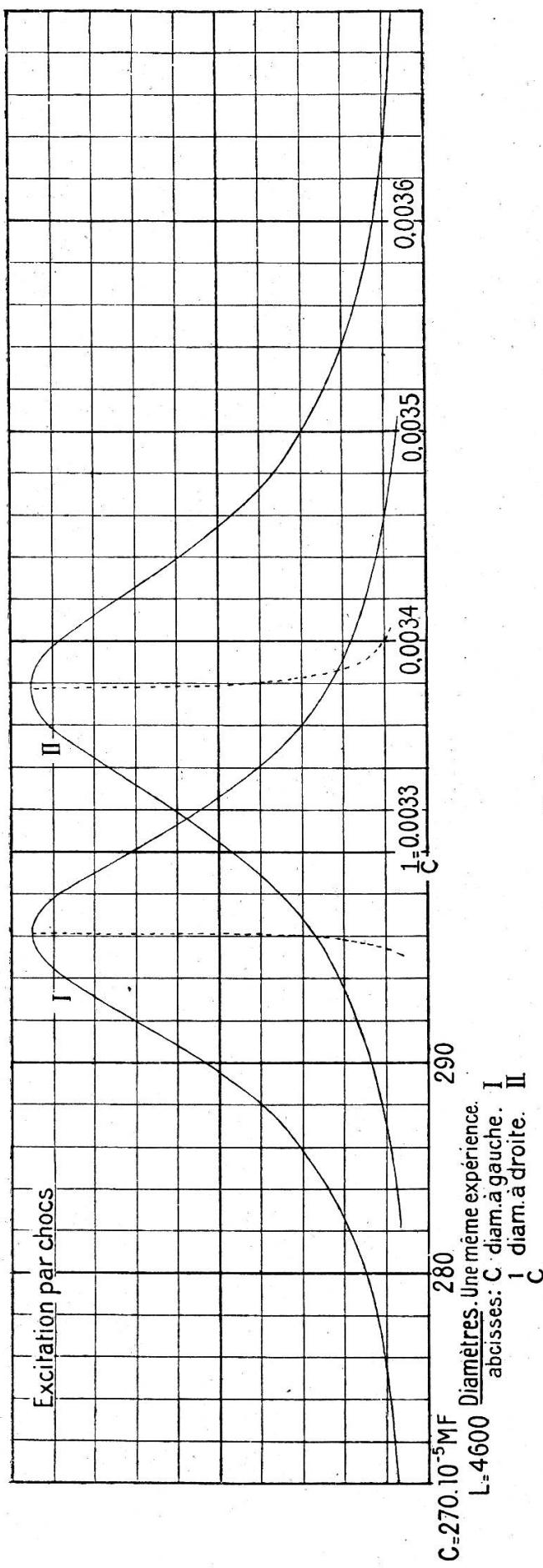


Fig. 9.

§ 11. — *Y a-t-il des fautes d'ordre expérimental qui expliquent ces faits ?*

Si réellement les deux phénomènes qui font l'objet de cette étude, étaient simplement des erreurs, ces erreurs ne pouvaient être qu'expérimentales. Cela résulte de ce qui précède. Il était donc nécessaire de s'assurer si les conditions diverses dans lesquelles on doit se placer pour faire de bonnes mesures en oscillations électriques, étaient remplies.

1° Les irrégularités de l'étincelle pouvaient être un obstacle à la construction d'une bonne courbe de résonance ; mais dès que cette construction était possible, les phénomènes reprenaient leur régularité ordinaire et n'étaient ni accentués ni diminués par la qualité de l'étincelle. D'ailleurs, les mesures n'étaient entreprises que lorsque l'étincelle avait pris son régime égal, reconnaissable au son et visible sur l'ampèremètre thermique introduit dans le circuit.

2° La majeure partie des mesures a été effectuée avec des bouteilles de Leyde Mosciski. Comme l'étincelle avait une longueur moyenne de 8 mm, il était vraisemblable que le potentiel maximum correspondant occasionnât des pertes dans les condensateurs. Pour être fixé, je les ai remplacés par des condensateurs sans pertes ayant pour diélectrique de l'acide carbonique comprimé (Wien). Il y eut une différence dans la valeur du décrément moyen ; ce fut la seule.

3° Le galvanomètre Siemens et Halske couplé avec le thermo-élément a été calibré en courant continu. La courbe de calibration (ordonnées, carrés des intensités) est très proche d'une droite passant par l'origine. Pour la moitié supérieure de l'échelle, il a été tenu compte de la courbe de calibration.

Le circuit du thermoélément¹ était, soit une simple boucle, soit une bobine de trois spires. L'inductance de la bobine était grande par rapport à la résistance (1, 16 Ω). Pour la boucle, cette condition n'était pas réalisée. A l'égard de la décroissance des décréments, il n'a été reconnu aucune différence sui-

¹ Voir ZENNECK. *Elect. Schw. u. drath. Tel.*, p. 608 et 609, 1905. — Aussi TISSOT, *Oscill. élect.*, 1910, p. 433-443.

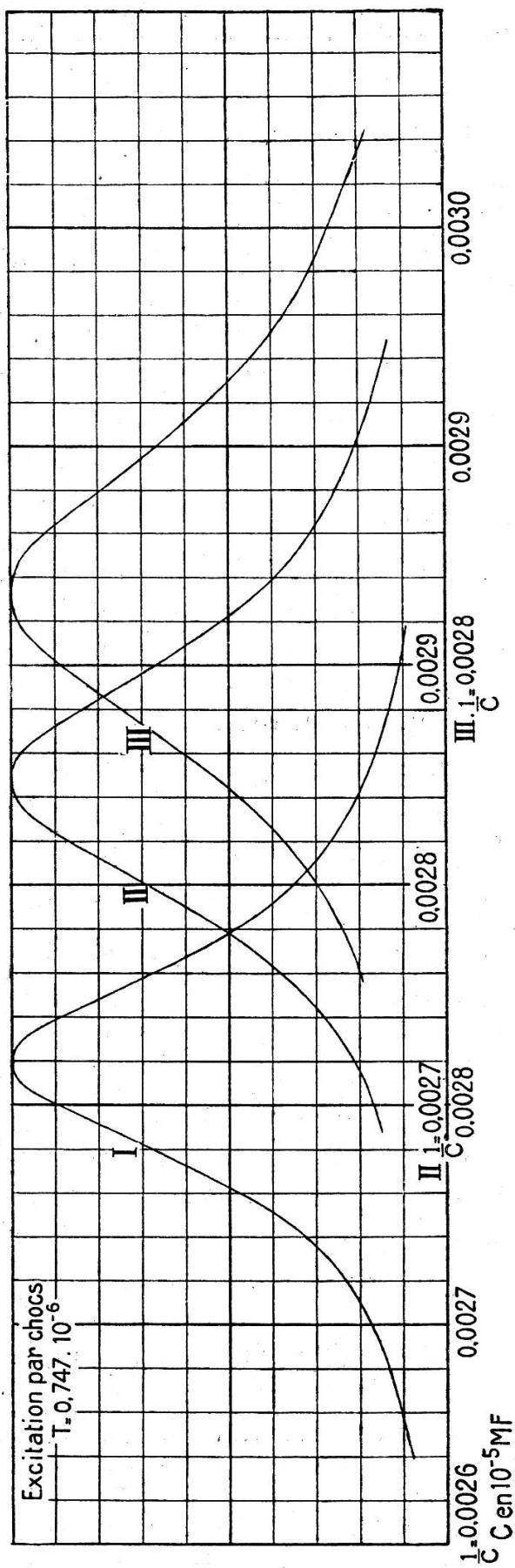


Fig. 10.

vant que tel ou tel circuit était employé. A l'égard du décrément moyen, le circuit, et surtout son couplage avec le secondaire, ont une influence. On le prouve en approchant un autre circuit fermé ; on observe que la déviation maximum est notablement rabattue. Cependant en première approximation, selon la théorie exposée dans Tissot, le voisinage d'un circuit fermé ne change pas la nature des oscillations dans le secondaire. Son influence ne se traduit que par un accroissement de l'amortissement et de la fréquence.

4° Le couplage du secondaire avec le primaire a présenté un intérêt particulier. Pour la plupart des mesures la distance des deux circuits était 1 m 50. Si la différence entre les deux accroissements du décrément était causée par un coefficient k de couplage non négligeable, cette différence aurait diminué quand j'ai porté la distance des deux circuits à 2 m et même à 3 m. Elle n'a pas changé. Un coefficient k de couplage non négligeable à une distance de 3 m est inadmissible, et pourtant le phénomène pourrait s'interpréter par un couplage. En effet, comme Wien¹ l'a montré, la courbe de résonance fournit dans ce cas, non pas $\delta_1 + \delta_2$, mais

$$\sqrt{(\delta_1 + \delta_2)^2 + 4\pi^2 k^2} ;$$

l'accroissement de cette expression Δx , lorsque δ_2 augmente de $\Delta\delta_2$ est, approximativement :

$$\Delta x = \frac{(\delta_1 + \delta_2)\Delta\delta_2}{\sqrt{(\delta_1 + \delta_2)^2 + 4\pi^2 k^2}}$$

Cette équation montre que $\Delta x < \Delta\delta_2$, c'est-à-dire que l'accroissement observé est plus petit que l'accroissement calculé.

§ 12. — *Expériences sur l'excitation par chocs.*

Ce qui précède est une preuve négative. Les expériences sur l'excitation par chocs ont été faites dans le but de constater si réellement l'accroissement observé était alors égal à l'accroissement calculé.

¹ WIEN. *Ann. d. Phys.*, 25, p. 634, 1908.

Afin de me mettre dans de bonnes conditions, je me suis basé sur les travaux de Wien¹ et de Riegger². Lorsque l'exciteur et le primaire sont accordés en couplage lâche, on force le couplage et l'on suit l'intensité dans le primaire. Les couplages différents pour lesquels cette intensité est maximum correspondent à de bonnes conditions d'excitation par chocs.

Voici les dispositifs de l'expérience (fig. 11) :

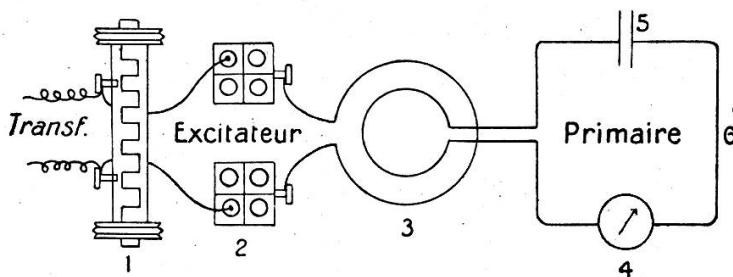


Fig. 11.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 1. Exciteur par chocs. | 4. Amp. Hartmann-Braun, 5 amp. |
| 2. Cond. 2 tubes en série. | 5. Cond. à huile, variable. |
| 3. Bobine de couplage. | 6. Cadre, fil 3 mm, 60 cm. |

D'une manière générale, je puis dire que les courbes ont la forme prévue par la théorie, et que l'accroissement du décrément observé est égal à l'accroissement calculé.

Voici les résultats des mesures pour 3 courbes de résonance (voir fig. 10) :

Secondaire : $L = 3985 \text{ cm}$; $C_r = 354,7 \cdot 10^{-5} \text{ MF}$; $T = 0,747 \cdot 10^{-6}$

	I résist. zéro	II 0,1567 ohm	III 0,4093 ohm
$\gamma/\gamma_m = 0,9$	$\delta_1 + \delta_2 = 0,0642$	$\delta_1 + \delta_2 = 0,0798$	$\delta_1 + \delta_2 = 0,1021$
0,8	0,0635	0,0790	0,1012
0,7	0,0643	0,0795	0,1018
0,6	0,0650	0,0800	0,1027
0,5	0,0647	0,0794	0,1026
0,4	0,0641	0,0791	0,1022
0,3	0,0637	0,0792	0,1024
0,2	0,0642	0,0790	0,1025
0,1	0,0648 ($\gamma/\gamma_m = 0,15$)	0,0802
moyenne	0,0643	0,0795	0,1022

Accroissement observé I-II 0,0152
I-III 0,0379

¹ WIEN. *Ann. d. Phys.*, 25, p. 644, 1908.

² RIEGGER. *Jahrb. d. drath. Tel.*, 5, p. 35, 1911.

L'introduction de 0,1567 ohm dans le secondaire cause une augmentation de décrément

$$\frac{\pi}{10} R \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,0147 \quad [R \text{ ohms, } C \text{ en } 10^{-5} \text{ MF, } L \text{ cm}]$$

et pour 0,4093 ohm

décrément additionnel 0,0384

Le décrément du secondaire se calcule par la formule

$$1 + \frac{d}{\delta_2} = \frac{\gamma_m}{\gamma'_m} \cdot \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 + \delta_2 + d} \quad (d \text{ décrément additionnel})$$

Prenons I et II

$$\gamma_m = 125 \quad \gamma'_m = 48,4 \quad \text{d'où } \delta_2 = 0,0133$$

Prenons I et III

$$\gamma_m = 125 \quad \gamma'_m = 19,9 \quad \text{d'où } \delta_2 = 0,0131$$

Les résultats sont donc satisfaisants. J'en tire la conclusion qu'il n'y a pas de faute expérimentale dans les mesures par l'excitation par chocs; or les expériences précédentes avec le circuit à étincelle étaient effectuées dans des conditions semblables; donc ces expériences ont été effectuées dans de bonnes conditions, et les deux particularités observées sur la courbe de résonance sont, non pas des erreurs, mais des phénomènes dont la théorie ordinaire ne rend pas compte.

Par conséquent la cause de ces phénomènes est l'étincelle elle-même; l'amortissement du circuit à étincelle suit une autre loi; et la théorie que nous allons exposer a pour but la mesure de cet amortissement.

(A suivre).