

Zeitschrift:	Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber:	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band:	2 (1920)
Artikel:	Interprétation géométrique du temps universel dans la théorie de la relativité restreinte
Autor:	Willigens, Charles
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-742560

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU TEMPS UNIVERSEL

DANS LA

THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

PAR

Charles WILLIGENS

Je me propose dans le présent travail d'interpréter géométriquement le temps universel, tel qu'il a été introduit par M. Edouard Guillaume dans la Théorie de la relativité restreinte¹.

Vu l'importance du sujet, je commencerai par rappeler les principes sur lesquels M. Guillaume établit la Théorie. Cet auteur pose les deux postulats fondamentaux suivants :

1. *Le Principe de la constance relative de la vitesse de la lumière dans le vide galiléen.* (Dans tout système galiléen, la vitesse de la lumière, mesurée dans ce système, est un nombre fixe c_0 , qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement).

2. *Le Principe de la sphéricité de l'onde lumineuse émise par une source ponctuelle dans le vide galiléen.*

Considérons deux systèmes de référence trirectangles, soit $S_1, (x_1, y_1, z_1)$, $S_2 (x_2, y_2, z_2)$, animés d'une translation uniforme de vitesse v le long des axes $O_1 x_1$ et $O_2 x_2$, supposés coïncidants. Le mouvement aura lieu conformément à la transformation galiléenne :

$$x_1 = x_2 + vt ; \quad y_1 = y_2 ; \quad z_1 = z_2 \quad (1)$$

¹ Ed. GUILLAUME. La Théorie de la Relativité en fonction du temps universel, *Arch.* (4), 46, p. 281 et suiv., 1918. Représentation et Mesure du temps, *ibid.* (5), 2, p. 125 et suiv., 1920; Les Bases de la Théorie de la Relativité, *Revue Générale des Sciences*, 15 avril 1920.

Supposons qu'on produise un signal lumineux bref aux origines O_1 et O_2 , à l'instant où elles coïncident ($t=0$). Il donnera naissance dans chacun des systèmes à une onde sphérique en vertu du second postulat :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = u_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = u_2^2 \end{array} \right. \quad (2)$$

u_1 et u_2 désignant les rayons des sphères *au même instant*. On vérifie immédiatement que les variables x_1, x_2, u_1, u_2 satisfont à la transformation suivante, due à Lorentz :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta(x_2 + \alpha u_2) ; \quad u_1 = \beta(\alpha x_2 + u_2) \\ \alpha = v : c_0 ; \quad \beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2) \end{array} \right. \quad (3)$$

Nous admettrons que cette transformation a lieu pour tous les phénomènes qui sont observés à la fois depuis S_1 et depuis S_2 ; la variable u représentera toujours un « chemin lumineux » mesuré dans le système S ; sa dérivée c par rapport au temps sera la vitesse de la lumière relative à ce système. Par raison de symétrie, posons :

$$u_1 = c_1 t + r ; \quad u_2 = c_2 t - r \quad (4)$$

où c_1 et c_2 ne dépendent pas de t ; r ne dépendra que de x_1 ou de x_2 selon le système sur lequel on suppose l'observateur placé. Substituons dans la seconde équation (3); on obtient :

$$r(1 + \beta) = (\beta c_2 - c_1) t + \alpha \beta x_2 .$$

Plaçons-nous sur S_1 , c'est à dire posons :

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 ; \quad c_1 = c_0$$

La relation précédente, dérivée par rapport à t , donne :

$$c_1 = \beta c_2 = c_0 ,$$

d'où

$$r = \frac{\alpha \beta}{1 + \beta} x_2 = \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_2 .$$

En introduisant les paramètres τ_1 et τ_2 , les équations (4) peuvent alors s'écrire :

$$u_1 = c_0 \tau_1 = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_2 ; \quad u_2 = c_0 \tau_2 = \frac{c_0}{\beta} t - \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_2 \quad (5)$$

En permutant les indices et changeant le signe de α , on obtient les deux autres relations :

$$u_1 = c_0 \tau_1 = \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_1 ; \quad u_2 = c_0 \tau_2 = c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_1 \quad (5')$$

On vérifie facilement qu'en remplaçant dans la première équation (3) u_2 par sa valeur en fonction de t et x_2 , on tombe sur la première relation (1).

Les paramètres τ_1 et τ_2 peuvent être considérés comme représentant le « temps local ». Si l'observateur est sur S_1 , par exemple, tous les points de S_2 sont au repos relatif, et l'on a :

$$\frac{dx_2}{dt} = 0 , \quad d\tau_1 = dt ,$$

autrement dit, les « horloges locales » qu'on peut supposer installées en chaque point de S_1 , vont toutes également vite et ont une marche *synchrone* avec l'horloge universelle. Par contre, il y a un *déphasage* constant entre chaque horloge locale et l'horloge t ; ce déphasage est une fonction du lieu, c'est-à-dire du point x_2 , fixe dans S_2 , envisagé depuis S_1 . Comme M. Guillaume l'a fait observer, il est curieux de constater que si l'on envoie des signaux *brefs* entre des horloges locales éloignées, celles-ci sembleront réglées comme l'horloge universelle. On a, en effet, dans ce cas :

$$x_2 = 0 , \quad \tau_1 = t ; \quad x_1 = v\tau_1 = vt .$$

On voit donc que le réglage des horloges par des échanges de signaux lumineux n'est qu'un trompe-l'œil.

En résumé, les indications des horloges donnant les temps t et τ ne diffèrent que par des *constantes d'intégration*. Du fait que leurs différentielles sont égales, il résulte que les phénomènes physiques, représentés par des équations différentielles, peuvent être exprimés indifféremment avec la variable t ou la τ . Il n'y a là pas plus de difficulté qu'il n'y a de difficulté à un aviateur de déterminer sa vitesse soit à l'aide du chronomètre du bord, soit en lisant l'heure sur les horloges des clochers qu'il

aperçoit, en tenant compte chaque fois des déphasages constants existant entre les temps des différents pays.

Il est commode d'utiliser les quantités imaginaires dans la représentation graphique de la transformation de Lorentz. A cet effet, il suffit de remplacer α par $i\alpha$ et c_0 par $-i\bar{c}_0$ dans la transformation, en convenant de donner à a et à \bar{c}_0 les valeurs numériques α et c_0 respectivement. La transformation représentera alors une rotation d'un angle $-\varphi$ des axes rectangulaires $O(x_1, \bar{c}_0 \tau_1)$ autour de l'origine O , l'angle φ étant défini par :

$$a = \operatorname{tg} \varphi ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \cos \varphi ; \quad ab = \sin \varphi$$

$$\frac{ab}{1 + b} = \frac{1 - b}{ab} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} .$$

Comme $a < 1$, la rotation est au plus de 45° . Toutefois, pour obtenir des figures plus claires, comme il ne s'agissait que d'exposer le principe, cette limite n'a pas été observée dans les constructions géométriques, ce qui n'altère pas qualitativement les résultats. La première des relations (5') devient alors :

$$\bar{c}_0 \tau_1 = -x_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\bar{c}_0}{\cos \varphi} t. \quad (6)$$

Désignons par :

$$m = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

le coefficient angulaire de la droite que l'on obtient en prenant pour coordonées $u = \bar{c}_0 t_1$, $x = x_1$, la relation (6) prend la forme :

$$u = mx + \bar{c}_0 t \frac{1 + m^2}{1 - m^2} \quad (6')$$

cette droite forme avec l'axe Ox un angle $-\frac{\varphi}{2}$. Lorsque t varie, ces droites se déplacent parallèlement. Les droites de simultanéité, qu'on peut appeler « droites isochrones », ne sont donc plus des parallèles à Ox , comme dans la définition einsténienne de la simultanéité, mais des parallèles à la bissectrice des directions positives de Ox_1 et Ox_2 .

Faire varier α dans la transformation de Lorentz revient à

faire varier m dans (6'). Si on laisse t constant, la droite (6') enveloppe une courbe. Les coordonnées des points de cette courbe s'obtiennent sans difficulté en fonction de m . Dérivons en effet (6') par rapport à m , nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} x &= -\bar{c}_0 t \frac{4m}{(1-m^2)^2} \\ u &= \bar{c}_0 t \frac{1-4m^2-m^4}{(1-m^2)^2} \end{aligned} \right\}$$

en substituant dans (6') la valeur obtenue pour x .

Si on fait varier t , on obtient une famille de courbes *homothétiques* par rapport à l'origine. Cette famille de courbes définit une horloge indiquant le temps universel, car si nous avons un système S_2 correspondant aux axes $O(x_2, \bar{c}_0 \tau_2)$ déduits par une rotation de l'angle $-\varphi$ du système $O(x_1, \bar{c}_0 \tau_1)$ correspondant à S_1 , les droites isochrones s'obtiendront en menant aux courbes des tangentes parallèles à la bissectrice de Ox_1 et Ox_2 .

Ces droites sont des droites isochrones dans les deux systèmes, et leur choix a pour effet, comme le fait observer M. Guillaume, de faire disparaître la « contraction » de Lorentz. *Le temps n'est pas autre chose que le rapport d'homothétie entre une courbe quelconque et la courbe correspondante à $t=1$.* Toutefois il sera commode de le mesurer sur la droite passant par l'origine et les points de contact des tangentes parallèles. Ceci n'est toutefois qu'une question de commodité, les rapports d'homothétie étant les mêmes pour toute droite passant par l'origine. Un changement de direction n'aura donc aucune influence sur la mesure du temps, celui-ci étant défini, non pas par les droites isochrones, mais par le rapport d'homothétie des courbes auxquelles ces dernières sont tangentes.

En particulier, coupons les courbes par Ou . Le coefficient angulaire des tangentes aux points d'intersection sera $m=0$ qui correspond à $\alpha=0$, donc au repos complet des systèmes. Nous avons dans ce cas : $u = \bar{c}_0 \tau_1 = \bar{c}_0 t$ donc $\tau_1 = t$; t devient identique aux temps locaux du système où se trouve l'observateur.

Les courbes considérées sont symétriques par rapport à Ou ; elles ont trois points de rebroussement, dont deux imaginaires

et elles sont doublement tangentes à la droite de l'infini, les bissectrices des axes étant des directions asymptotiques. (Fig. 1).

Considérons trois systèmes S_1 , S_2 , S_3 et les rotations correspondantes des axes de coordonnées. Il est facile de construire

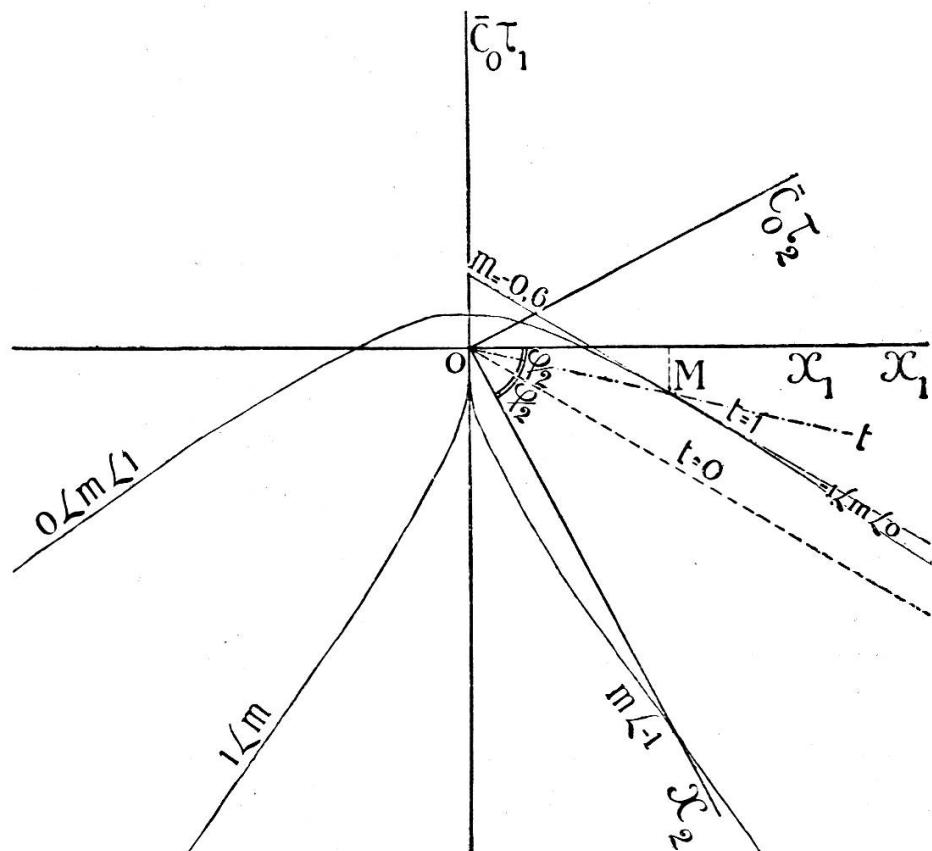


Fig. 1.

pour les trois systèmes les droites correspondant à une même valeur de t , dans ces trois systèmes, en partant de l'équation :

$$u = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} x + \frac{\overline{c_0} t}{\cos \varphi},$$

puisque nous connaissons l'angle φ que forment les nouveaux axes avec les anciens. La droite elle-même est parallèle à la bissectrice des axes des x des deux systèmes considérés. (Fig. 2). Désignons ces trois droites par t_{12} , t_{13} et t_{23} , les indices indiquant simplement pour quelle association de système chacune d'elles est valable.

Donnons-nous dans le système S_1 , l'abscisse $x_1 = OM'_{12}$. Si nous considérons la combinaison de systèmes (S_1, S_2) nous de-

vons lui faire correspondre le point M_{12} sur la droite t_{12} . Ce point a pour abscisse dans le système S_2 : $x_2 = OM'_{21}$. Prenons

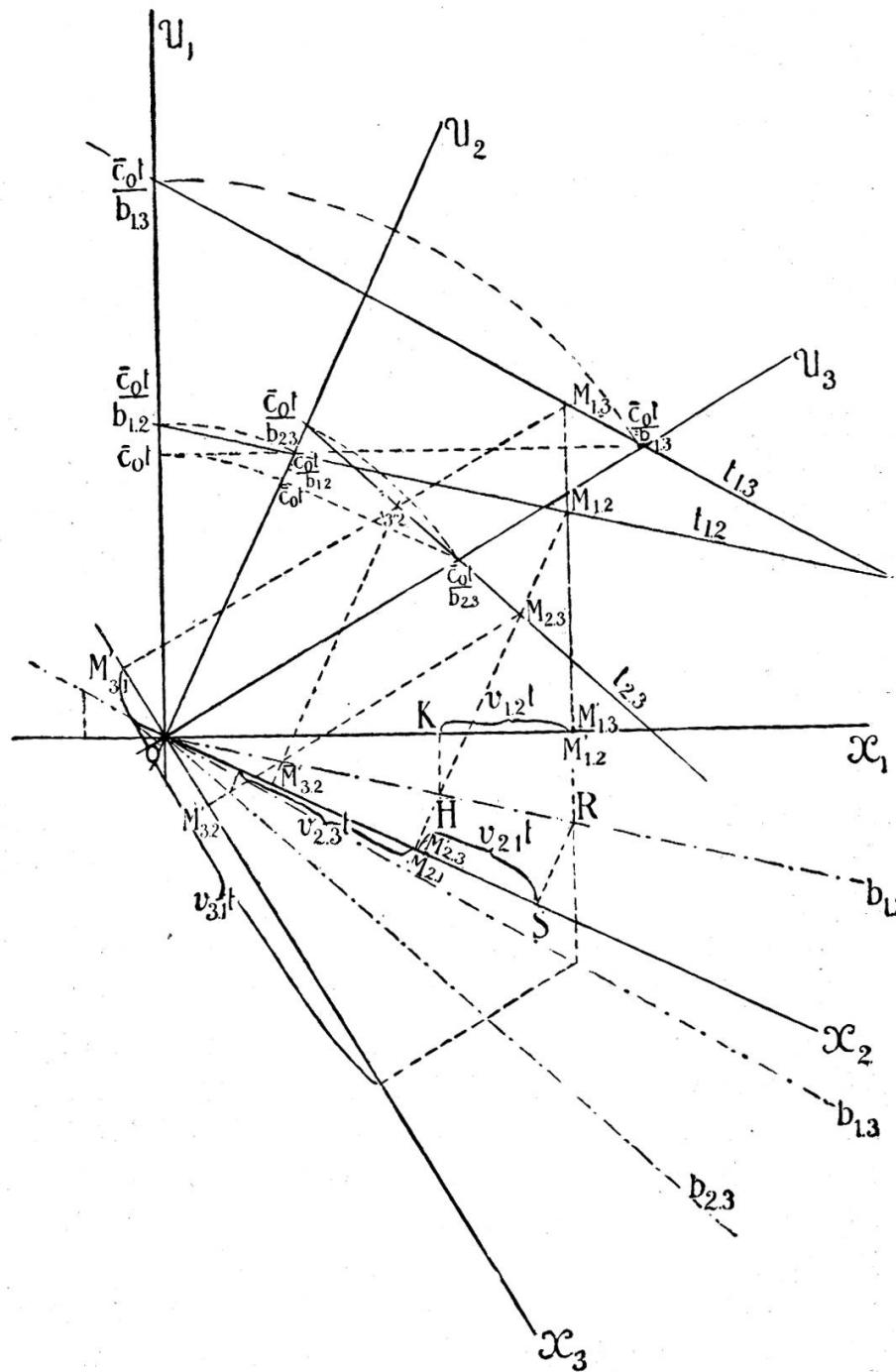


Fig. 2.

le point H d'intersection de $M_{12} M'_{21}$ avec la bissectrice b_{12} de Ox_1 et Ox_2 , et projetons H orthogonalement en K sur Ox_1 . Nous avons :

$$x_1 = OM'_{12},$$

$$x_2 = OM'_{21} = OK$$

en vertu de la formule

$$x_1 = x_2 + vt$$

que nous avons trouvée plus haut, comme conséquence de la transformation de Lorentz lorsqu'on prend le paramètre t pour mesurer le temps :

$$x_1 - x_2 = KM'_{12} = v_{12}t$$

v_{12} désignant la vitesse de translation de S_2 par rapport à S_1 .

Si par le même procédé, nous prolongeons $M_{12}M'_{12}$ jusqu'en K , point d'intersection avec b_{12} , et en projetons K en S sur Ox_2 , nous trouvons :

$$SM'_{21} = x_2 - x_1 = v_{21}t;$$

il ressort de la figure que :

$$v_{12}t = -v_{21}t.$$

Le procédé, on le voit, est très simple et vaut pour un couple quelconque de systèmes. La figure 2 donne la construction de la vitesse d'un système par rapport à l'autre.

Quittons maintenant la représentation graphique pour revenir dans l'espace ordinaire, et considérons trois systèmes trirectangle qui se déplacent parallèlement à leurs axes des x , glissant les uns sur les autres. C'est le cas décrit par M. Guillaume dans l'espace réel. Supposons l'observateur placé dans S_1 . (Fig. 3). Nous déterminons la disposition des systèmes S_1 et S_2 à l'instant t tels qu'on les voit de S_1 en portant sur Ox_1 les longueurs $v_{12}t$ et $v_{13}t$.

Supposons ensuite l'observateur placé dans S_2 et portons sur Ox_2 les longueurs $v_{21}t$ et $v_{23}t$, nous obtiendrons les systèmes S_1 et S_3 tels qu'ils sont vus de S_2 .

Enfin, si l'observateur est supposé sur S_3 et que sur Ox_3 on porte $v_{31}t$ et $v_{32}t$ on obtient les systèmes S_1 et S_2 vus de S_3 .

Nous voyons que les trois figures obtenues ne sont pas identiques, mais qu'il y a une *aberration variable* avec le système de

l'observateur. Nous avons fait ressortir en trait gras le système où se trouve l'observateur et nous l'avons désigné par un seul indice, en indiquant pour les autres systèmes, à l'aide d'un second indice, le système d'où ils sont vus.

Proposons-nous pour terminer de représenter les mêmes formules à l'aide de l'interprétation de la transformation de Lorentz

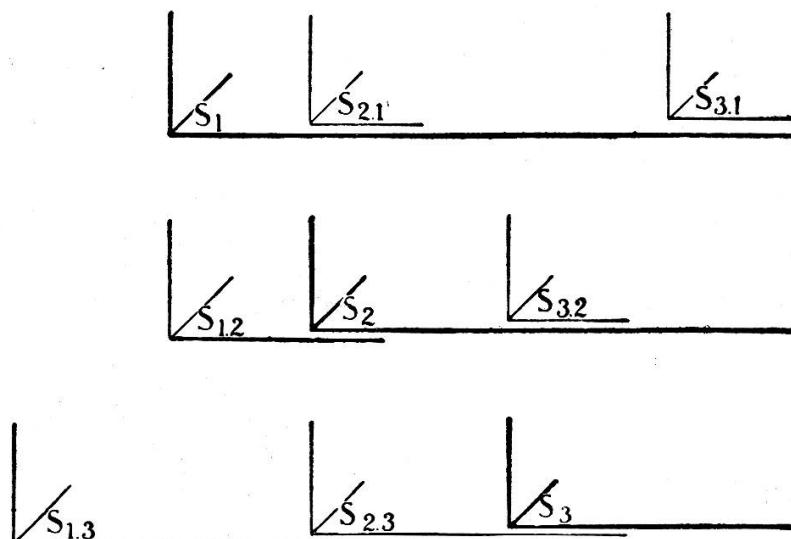


Fig. 3.

en conservant les valeurs réelles. (Fig. 4). On considère dans le système rectangulaire Ox_1 , Ou_1 les deux hyperboles équilatères conjuguées :

$$x^2 - u^2 = -1$$

$$x^2 - u^2 = +1$$

et on prend pour axes Ox_2 et Ou_2 deux diamètres conjugués. Ceux-ci sont symétriques par rapport à une asymptote et coupent les deux hyperboles en des points X_2 et U_2 . Dans le nouveau système les longueurs OX_2 et OU_2 seront prises comme unités sur ces axes de coordonnées.

L'angle ψ que forme l'axe Ox_2 avec Ox_1 est défini par :

$$\operatorname{tg} \psi = \alpha$$

où $\alpha = \frac{v}{c_0}$ comme précédemment.

Les coordonnées du point U_2 sont :

$$x_1 = \alpha \beta$$

$$u_1 = \beta.$$

L'équation de la droite $U_1 U_2$ sera de la forme :

$$u = \mu x + 1$$

puisque $OU_1 = 1$, où

$$\mu = \frac{\beta - 1}{\alpha \beta}.$$

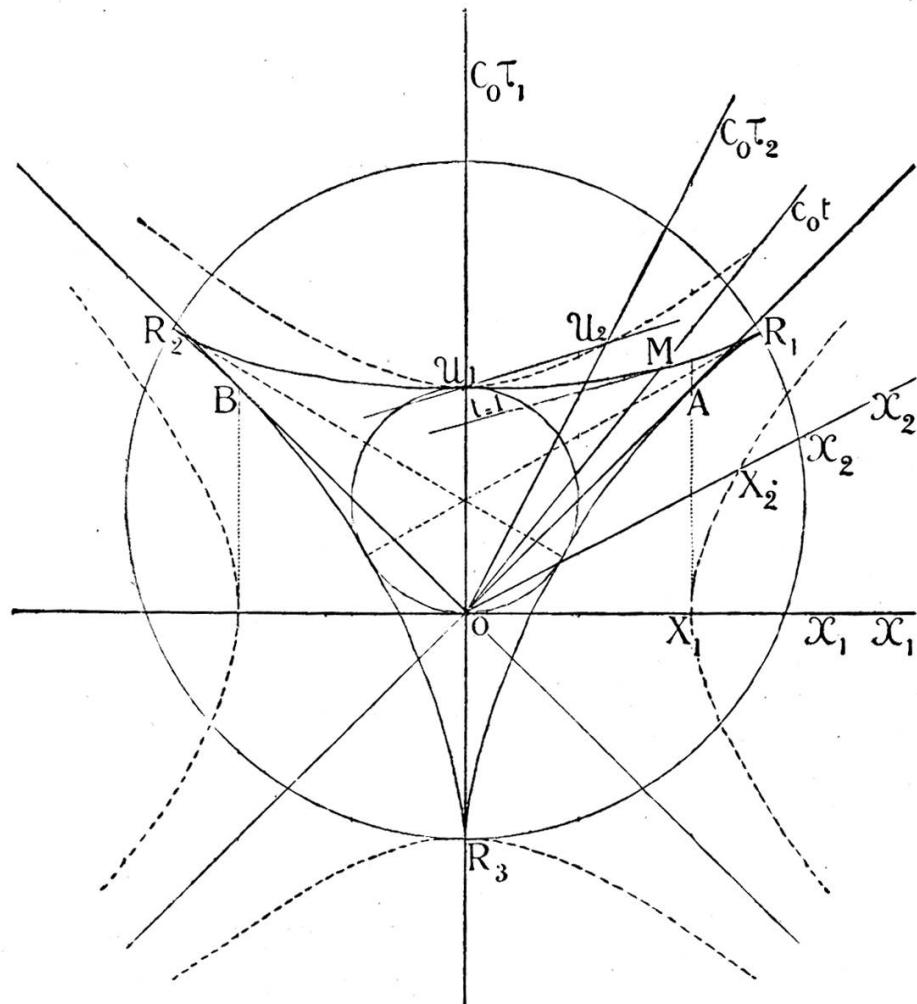


Fig. 4.

Si nous reprenons la relation établie au début

$$u = \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x + \frac{c_0}{\beta} t$$

nous voyons que nos droites de simultanéité sont parallèles à la direction $U_1 U_2$. Ce sont, comme dans le cas précédent, des droites découpant sur Ou_1 et Ou_2 des segments mesurés par le même nombre, si l'on tient compte du fait que l'unité de longueur n'est pas la même sur les deux axes.

En appelant χ l'angle dont la tangente est μ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{2\mu}{1 + \mu^2} = \sin 2\chi \\ \beta = \frac{1 + \mu^2}{4 - \mu^2} = \frac{1}{\cos 2\chi} \end{array} \right.$$

L'équation de la droite devient :

$$u = \mu x + c_0 t \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2}$$

Si l'on cherche l'enveloppe de cette droite, on trouve en exprimant les coordonnées en fonction de μ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = c_0 t \frac{4\mu}{(1 + \mu^2)^2} \\ y = c_0 t \frac{1 + 4\mu^2 - \mu^4}{(1 + \mu^2)^2} \end{array} \right.$$

En étudiant cette courbe, on arrive à la caractériser comme une courbe du 4^{me} ordre et de 3^{me} classe doublement tangente à la droite de l'infini aux points cycliques. Ces propriétés suffisent pour caractériser la courbe comme une *hypocycloïde à trois rebroussements*¹.

Le temps est de nouveau défini comme le rapport d'homothétie d'un système de courbes. Mais, dans ce cas, ces courbes sont des hypocycloïdes.

Dans la figure 4 nous avons représenté l'hypocycloïde correspondant à $c_0 t = 1$. On peut se livrer sur ce mode de représentation, à des considérations analogues à celles du cas précédent. Toutefois il est moins commode pour la construction des aberrations, à cause du changement d'échelle lors du passage d'un système dans l'autre et de l'angle aigu formé par Ox_2 et Ou_2 .

L'interprétation géométrique de la représentation monoparamétrique du temps, décrite dans ce travail, conduit à considérer le paramètre t comme un rapport d'homothétie, c'est-à-dire comme un *nombre pur*. La vitesse de la lumière a alors la

¹ Cf. CREMONA. « Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements », *Créelles*, J., 1865 et Gino Loria, *Spezielle algebraïsche und transcendentale ebene Kurven*, t. I, p. 161, 2^{me} édition, Teubner, 1910.

dimension d'une longueur. Le temps est en dehors de l'espace, il est despatialisé, ce qui concorde avec l'universalité de cette notion. Cette conclusion résulte directement de la définition de la mesure du temps. Nous nous donnons une longueur c_0 et nous admettons que la propagation de la lumière est un phénomène identique en tout point de l'espace. Mesurer un temps revient à dire, combien de fois la longueur c_0 est parcourue, pendant qu'un événement se produit. Le temps est donc un simple facteur numérique de proportionnalité qui mesure le rapport du chemin parcouru effectivement par la lumière à celui servant à définir l'unité de temps.

L'interprétation de Minkowski, qui a voulu faire du temps une quatrième dimension de l'espace est toute artificielle et tient à ce que ce savant nous paraît confondre les paramètres τ avec les chemins $c_0\tau = u$ parcourus par les rayons lumineux mensurateurs.

Du point de vue cinématique, on donnera à t , par définition, la dimension du temps. c_0 aura la dimension d'une vitesse et les abscisses x seront homogènes à des longueurs. On fera ainsi dans les formules de dimensions une distinction entre des longueurs variables et des longueurs fixes et l'on retrouve les représentations usuelles de la Mécanique classique.

On peut du reste observer que lorsqu'on définit le temps à l'aide de la rotation de la Terre, il se trouve mesuré par un angle, donc également par le rapport de deux longueurs, exactement comme dans le cas des horloges lumineuses.