**Zeitschrift:** Archives des sciences physiques et naturelles

**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

**Band:** 46 (1918)

**Artikel:** Probabilités composées et groupes de déplacements

**Autor:** Guillaume, Edouard

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-743177

P. GRUNER (Berne). — *Les lois physiques de l'éclairage de l'atmosphère.*

Ce travail fera l'objet d'une publication ultérieure.

EDOUARD GUILLAUME (Berne). — *Probabilités composées et groupes de déplacements.*

Les savants qui écrivent des traités sur le Calcul des probabilités, ont presque toujours soin, à propos du théorème des probabilités composées, de faire remarquer avec Bertrand qu'il n'est pas permis d'appliquer ce théorème aux probabilités géométriques pour déterminer, par exemple, la répartition des points d'impact sur une cible ou la loi de répartition des vitesses de Maxwell ; car, affirment-ils, les probabilités de position d'un point suivant les différentes directions de l'espace, ne sont pas « indépendantes ». Mais, à l'appui de cette affirmation, ils ne donnent que des démonstrations faisant appel à l'intuition géométrique, démonstrations qui ne sauraient satisfaire l'analyste.

On sait que l'auteur de la présente note a essayé d'établir la théorie des probabilités sur des bases nouvelles[1], où la notion si vague d'« indépendance » est remplacée par celle de « liaison » empruntée à la Mécanique ; de cette façon, les problèmes physiques qui utilisent les formules du Calcul des probabilités se ramènent à une sorte de cinématique — le temps jouant toujours un rôle fondamental dans ces questions, — que l'auteur appelle *Cinématique du brassage parfait.* Dire que des probabilités sont indépendantes revient alors à dire qu'il n'y a pas d'*équation de liaison* entre elles. Les problèmes de probabilités se ramènent ainsi à la recherche de ces équations.

Appliquant ce point de vue aux cas ci-dessus envisagés, il est naturel de se demander quelles sont les *liaisons* qui interviennent dans ces problèmes de probabilités géométriques.

A cet effet, imaginons un espace quelconque, euclidien ou non-euclidien, et supposons qu'on y ait défini la « droite » et la « distance ». Soit $Ox$ une droite, et admettons que la probabilité pour qu'un point A tombe à la distance $x$ de l'origine O ait pour valeur $e^{-x^2}dx$. Considérons une seconde droite $O_1y$, sans relation avec la première, et définissons de même une probabilité $e^{-y^2}dy$ pour qu'un point B tombe à la distance $y$ de $O_1$. La probabilité pour que les deux événements aient lieu à la fois, sera, en vertu du théorème des probabilités composées :

$$P = e^{-x^2-y^2}dx\,dy \; .$$

[1] Voir *Arch. 1914* et *1915*.

Refaisons exactement le même raisonnement pour deux autres droites quelconqnes $O'x'$ et $O_1'y'$ et deux nouveaux points A′ et B′; nous parviendrons à la probabilité composée :

$$P' = e^{-x'^2-y'^2} dx'dy' .$$

Or, il est bien évident qu'il n'y a aucune raison pour que les probabilités P et P′ aient constamment la même valeur numérique. puisque jusqu'ici nous n'avons introduit aucune relation entre elles. Pour que ce soit le cas, il faudrait que l'on ait constamment :

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 . \qquad (i)$$

C'est *l'équation de liaison.* Elle n'est autre que *l'invariant fondamental de toutes les rotations euclidiennes autour d'un même centre dans un certain plan.* Dans ce cas, les points A, B, A′, B′ sont les point-coordonnées d'un même point M de ce plan, par rapport à deux systèmes d'axes rectangulaires $xOy$ et $x'Oy'$, ayant le point O comme origine commune.

Si le plan considéré était *hyperbolique*, on aurait comme équation de liaison l'invariant :

$$x^2 - y^2 = x'^2 - y'^2 ,$$

et la loi de répartition des points d'impact sur une cible de *l'espace lobatschewskien* serait représentée par la fonction

$$z = e^{-(x^2-y^2)} .$$

En résumé, on voit que dans les lois de répartition des points d'impact ou des points de vitesse, les probabilités de position des points-coordonnées ne sont pas indépendantes, quoi qu'en aient prétendu certains auteurs ; elles sont liées par des invariants semblables à $(i)$.

Ces sortes de probabilités, qu'on pourrait appeler « probabilités-coordonnées », jouent un rôle tout spécial ; liées par des liaisons spatiales, elles peuvent cependant se composer comme des probabilités indépendantes. C'est ce qui explique le succès des raisonnements de Maxwell et de ses successeurs[1].

A. PICCARD et Edm. BAUER. — *Le Coefficient d'Aimantation de l'oxygène et de l'oxyde azoteux.*

Des mesures très précises avec une nouvelle méthode nous ont donné des valeurs différant sensiblement des anciennes mesures (A.

[1] Cf. BOREL, E. *Le Hasard*, p. 167, Paris, 1914.