

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 46 (1918)

Artikel: La théorie de la relativité en fonction du temps universel
Autor: Guillaume, Edouard
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-743170>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

EN FONCTION DU

TEMPS UNIVERSEL

PAR

Edouard GUILLAUME

(Avec 4 fig.)

INTRODUCTION.

Nous avons exposé ici même¹ les raisons qui permettent de croire à la possibilité d'exprimer la Théorie de la relativité en fonction du temps universel, c'est-à-dire d'un paramètre pouvant représenter le temps, et indépendant du système de référence auquel on rapporte les mouvements. Nous avons en outre indiqué dans quel sens il convenait d'en chercher la solution analytique.

Nous nous proposons aujourd'hui de reprendre la question avec plus de détails, et de faire un exposé qui ne laisse aucun doute sur la possibilité du problème.

Caractérisons d'abord en quelques mots le point de vue qui nous a guidé dans ces recherches.

Depuis Huyghens jusqu'à Lorentz, en passant par Fresnel et Maxwell, la théorie des phénomènes lumineux et, ensuite, des phénomènes électromagnétiques, reposait sur le dualisme *éther-matière*, chacun de ces éléments ayant son existence propre, in-

¹ GUILLAUME, Ed. Les Bases de la Physique moderne, *Arch.* 1917, vol. 43, p. 5, 89, 185 ; Sur la possibilité d'exprimer la Théorie de la relativité en fonction du temps universel, *Ibid.*, vol. 44, p. 48.

dépendante de l'autre ; la matière pouvait agiter l'éther et y produire les ondes électromagnétiques à la manière des cailloux qui, jetés dans l'eau, produisent des rides à la surface.

Cette théorie ne peut être acceptable que s'il est possible de mettre en évidence les mouvements de la matière par rapport à l'éther. Or l'expérience, maintes fois interrogée, a toujours répondu négativement : on ne peut constater que les mouvements de la matière par rapport à la matière, fait que l'on exprime en disant que le principe de la relativité des mouvements ne s'applique qu'à la matière *seule*. Dès lors, une conclusion s'impose : il faut rejeter le *dualisme* éther-matière. Le plus simple, semble-t-il, serait de revenir à la théorie de l'*émission*, qui satisfait à cette relativité. C'est ce qu'a tenté Walther Ritz. Faisant remarquer que de l'équation des ondes de d'Alembert — base de la théorie ondulatoire — on peut tirer un peu tout ce que l'on veut, Ritz proposa de l'abandonner et de partir directement de certaines intégrales de cette équation : les *potentiels retardés*, qui contiennent les seuls résultats tangibles de la théorie. Si remarquable que soit la tentative, les résultats obtenus n'en présentent pas moins un vice essentiel : Ritz ne peut expliquer d'une façon simple la célèbre expérience de Fizeau sur l'entraînement partiel des ondes lumineuses par les milieux en mouvement.

Il faut donc trouver autre chose.

Pour le mathématicien, la notion de *relativité* est équivalente à la notion de *groupe*. C'est pourquoi la relativité des mouvements n'est nullement l'apanage exclusif de la cinématique classique, qui repose sur un groupe particulier : le groupe euclidien, avec lequel Ritz voulait bâtir l'électrodynamique. Il appartenait à l'illustre physicien hollandais, H.-A. Lorentz, de découvrir un nouveau groupe permettant de prévoir et de calculer les expériences fondamentales de l'électrooptique des corps en mouvement. La particularité de ce groupe consiste en ce que les transformations portent non seulement sur les coordonnées, mais encore sur la variable qui représente le temps. On en a conclu qu'à côté du temps universel, il devait exister des temps *locaux* ou référenciels, seuls déterminables physiquement, et empêchant de mettre en évidence le mouvement absolu de la matière, c'est-à-dire le mouvement par rapport à l'éther. Et l'on continua à

raisonner comme si le dualisme éther-matière existait, bien qu'il échappât à toute expérience.

Ce fut Albert Einstein qui montra toute l'inconséquence de cette attitude : il est très choquant, remarqua-t-il, de considérer un système de référence comme *privilegié* — comme symbolisant l'éther — alors qu'il ne se distingue en rien de tout autre système. Semblablement, il est vain de vouloir conserver la distinction entre « temps universel » et « temps local », du moment qu'il sera toujours impossible de dire si l'indication d'une horloge est universelle ou locale ; on parlera du « temps », tout court, grandeur à détermination multiple. Puis, dégageant de la théorie de Lorentz un postulat simple, le *principe de la constance absolue de la vitesse de la lumière*, Einstein parvint à établir directement les transformations du groupe de Lorentz. Enfin débarrassée du dualisme fantôme, la théorie prend une ampleur inattendue. Matière et énergie deviennent de même nature et peuvent se fondre l'une dans l'autre. Les deux principes conservatifs fondamentaux de la Mécanique classique : conservation de l'énergie et conservation de la masse, n'en forment plus qu'un seul. La synthèse est imposante.

Mais, ainsi comprise, la théorie devient purement *phénoménologique* ; elle permet le calcul des phénomènes ; elle n'en fournit aucune image. Bien plus : par la suppression du temps universel, suppression considérée comme essentielle, la possibilité même de créer une image des phénomènes est mise en question. C'est là une conséquence d'une portée incalculable pour le développement futur de la science ; aussi convient-il de l'examiner avec soin.

Au lieu de chercher, comme Ritz, à modifier la théorie pour l'adapter à une image simple, nous pensons que l'ampleur même du problème exige qu'on l'attaque dans son essence : *si le temps universel est vraiment une forme a priori de notre entendement, il doit être possible de le faire apparaître dans l'expression même des transformations du groupe de Lorentz.*

En définitive, il s'agirait d'un *changement de variables*.

Jusqu'à présent, on pouvait distinguer, *grosso modo*, deux sortes de changements de variables : les changements purement mathématiques et les changements physiques. Les premiers ont

pour seul but de faciliter des calculs ou des raisonnements. C'est ainsi, par exemple, qu'on étudie avantageusement les relations de la géométrie hyperbolique à l'aide des quantités imaginaires. Aux seconds, s'attache toujours une signification concrète : étant donné, par exemple, le mouvement d'un projectile par rapport à la Terre, trouver son mouvement relativement au système absolument fixe de Newton. C'est un problème semblable que l'on résoud, lorsqu'on applique la transformation de Lorentz. Exemple : si des ondes lumineuses sont entraînées par un milieu réfringent, comment ces ondes agiront-elles sur un observateur ne participant pas au mouvement du milieu ?

A ces deux sortes de changements de variables, nous en ajouterions un troisième, qu'on pourrait appeler *psychologique*.

Il aurait essentiellement pour but de nous faire voir les phénomènes d'un autre « point de vue », sans que l'on pût dire que ce « point de vue » conduise, quant aux grandeurs directement observées, à des résultats différents de ceux que donne le premier.

C'est à un changement de variables de cette espèce qu'est consacrée la présente étude.

Une comparaison, lointaine il est vrai, permettra de préciser un peu notre pensée. On sait qu'en projetant tous les points d'une sphère sur un plan à partir de son centre, on obtient une *carte* de la surface, sur laquelle on peut étudier toute la géométrie sphérique. On réalise ainsi dans le plan euclidien une représentation également justifiée de toute la métrique de la sphère, représentation que l'on substitue à la surface qui lui a donné naissance. De même, nous tenterons de « projeter » dans un système de variables comprenant le temps universel, les variables ordinairement utilisées pour exprimer le temps dans la Théorie de la relativité.

Ce m'est un plaisir, avant d'aborder notre sujet, de témoigner ici ma reconnaissance à M. Gustave Juvet, licencié ès sciences mathématiques, qui a bien voulu travailler avec moi ces difficiles questions et m'a suggéré maintes idées heureuses.

§ 1. LE TEMPS, LES GROUPES GÉOMÉTRIQUES ET LES CINÉMATIQUES.

On peut distinguer dans la notion de temps deux éléments essentiels : un élément rationnel et un élément sensible.

1° L'*élément rationnel* est d'ordre purement mathématique. Il est contenu tout entier dans la notion fondamentale de « fonction » ; car, comme le fait remarquer M. Hadamard¹, le mot « fonction » ne fait que traduire ceux de « variations simultanées ». Les êtres mathématiques « ligne », « surface », « variété » ou « multiplicité » ne sont eux-mêmes, du point de vue de l'Analyse, que des synonymes de « variations simultanées ». On énonce une idée analogue lorsqu'on dit que les valeurs prises par les variables d'un système de relations sont « simultanées », ou encore que les points de plusieurs « multiplicités » sont exprimés en fonction d'un *paramètre indépendant*. Ce paramètre symbolise le temps universel, concept mathématique.

Si nous imaginons qu'une multiplicité se déplace par rapport à d'autres multiplicités ou encore qu'elle se déforme, il est commode d'exprimer ces variations en fonction d'un paramètre unique, auquel nous pourrions toujours conférer le rôle de temps. Les « vitesses » sont, par définition, les dérivées des variables par rapport à ce paramètre. On peut imaginer, sans mutiler les relations, que celui-ci varie aussi « lentement » qu'on veut, de sorte qu'on pourra « prendre conscience », à chaque instant, de la configuration entière de la multiplicité envisagée. Nous acquérons ainsi la notion de « représentation simultanée ».

On voit donc que le temps, élément rationnel, qui sert à exprimer les vitesses, n'en a point par lui-même. On ne saurait parler de la « vitesse d'écoulement du temps ». C'est ce qu'on énonce d'une autre façon en disant que le temps est *relatif*.

2° L'*élément sensible* a sa source dans le *rythme*, qui est une des manifestations les plus profondes de l'être humain. Il est très remarquable qu'un instrumentiste exercé, par exemple, arrive à reproduire *à la fois* des rythmes très divers. Nous en tirons la perception de la *simultanéité sensible*. L'homme a son corps

¹ *L'Enseignement Mathématique*, 1912.

comme premier instrument de mesure. Il le complète et le prolonge, pour ainsi dire, en construisant des instruments indépendants, qui reproduisent d'abord les rythmes familiers, puis, de proche en proche, des rythmes plus éloignés, qui vont lui permettre la *mesure* physique du temps, c'est-à-dire la comparaison des rythmes du monde qui l'entoure.

Cette mesure comportera la détermination de la « *simultanéité expérimentale* », et cette détermination est extrêmement complexe. Elle se confond avec l'élaboration d'une *cinématique* ; c'est dire qu'il est impossible de la définir en partant d'une expérience simple, si bien imaginée soit-elle.

En effet, pour établir une cinématique, il faut posséder un *groupe géométrique* ou *groupe de déplacements*, et la genèse d'un tel groupe échappe à l'analyse. Selon Poincaré, le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance ; il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.

Parmi les innombrables groupes de déplacements aujourd'hui connus, il en est trois particulièrement remarquables. Ce sont : le groupe *eulclidien* ou *parabolique*, le groupe *hyperbolique* et le groupe *elliptique*.

L'étude analytique de ces groupes a donné naissance à un algorithme d'une grande utilité, et qui devait prendre une place importante, dans la géométrie analytique moderne, pour l'expression de la métrique spatiale : ce sont les *quantités homogènes*. Gaston Darboux, dans ses *Principes de Géométrie Analytique*, après avoir indiqué le rôle primordial joué par les nombres négatifs et les nombres imaginaires, relève ainsi l'importance de cet algorithme : « ...Mais il y a une autre convention, écrit-il, ou plutôt un *artifice* tout à fait moderne, dont la portée et l'utilité ne sont pas aussi bien appréciées, je veux parler de l'emploi des quantités homogènes. Je suis loin de le mettre sur le même rang que l'emploi des nombres négatifs ou imaginaires ; mais, il se justifie par les mêmes raisons et tend, comme les conventions précédentes, à donner plus de précision et de généralité à l'instrument analytique. »

Vu la grande importance des quantités homogènes pour notre objet, nous allons préciser un peu l'emploi des coor-

données homogènes en examinant brièvement un cas particulier.

Considérons par exemple la correspondance homographique entre deux plans Π et Π' (qui peuvent être superposés). Comme on sait, les coordonnées (X', Y') du point P' correspondant du point $P(X, Y)$, s'expriment par les quotients de fonctions linéaires en X, Y , ayant tous deux la même fonction au dénominateur, — et vice-versa. Introduire les variables homogènes revient à faire correspondre aux points P et P' les points $p(\rho x, \rho y, \rho u)$ et $p'(\rho x', \rho y', \rho u')$ — où ρ est un facteur de proportionnalité arbitraire — de deux espaces $O(x, y, u)$ et $O'(x', y', u')$ à trois dimensions; les deux quotients sont remplacés par trois fonctions entières, et à l'homographie primitive à deux dimensions se substitue une homographie à trois dimensions, qui conserve les éléments de l'infini (*Affinité*). En général, on raisonnera plus aisément sur cette dernière, d'où la justification de son introduction. Pour obtenir les figures planes correspondantes cherchées, il suffit, après tout calcul fait, de couper chacun des espaces à trois dimensions par les plans Π et Π' perpendiculairement aux axes u et u' , à la distance 1 des origines O et O' . On voit donc qu'utiliser les coordonnées homogènes revient à projeter les plans Π et Π' à partir de O et O' respectivement, c'est-à-dire à substituer à la correspondance ponctuelle deux faisceaux projectifs. Les coordonnées homogènes d'un point P d'un espace à n dimensions, sont alors les coordonnées ordinaires d'un point d'un espace auxiliaire à $n + 1$ dimensions, situé sur le rayon qui projette le point P à partir de l'origine des coordonnées.

De ce qui précède, retenons bien ceci, qui nous sera très utile plus tard : u et u' sont essentiellement des *variables*; mais l'homographie cherchée s'obtient en leur attribuant, à l'une comme à l'autre, la valeur particulière 1 dans les formules finales.

Une fois en possession des expressions analytiques des groupes de déplacements, il s'agit de construire les cinématiques correspondantes, c'est-à-dire d'exprimer les coordonnées qui définissent les déplacements particuliers à chacun d'eux en fonction d'un paramètre t , auquel nous pourrions attribuer le rôle du temps.

Le problème consiste à fixer la forme de ces fonctions. Or,

les coordonnées sont toutes liées entre elles par les relations analytiques qui représentent le groupe de déplacements envisagé. Si nous choisissons l'une d'elles comme variable indépendante, toutes les autres sont déterminées par les équations de liaison. Il arrive alors que cette coordonnée, que nous distinguons des autres en général pour des raisons suggérées par l'expérience, est posée proportionnelle à t . Il en résulte qu'à une même valeur de t correspondra un ensemble de valeurs pour toutes les coordonnées, valeurs dites simultanées, et qui déterminent la configuration du système cinématique envisagé à l'instant t . La coordonnée que nous avons posée proportionnelle au temps sera l'*horloge fondamentale* ou *horloge-mère*. Pour étudier les phénomènes, on se sert d'*horloges auxiliaires*; elles sont fondées sur un phénomène quelconque, présentant un paramètre de déplacement variable θ qui peut être une fonction quelconque de t . En pratique, on s'arrange pour que $\theta = t$, et l'on dit que l'horloge est « synchronisée » sur l'horloge-mère.

Parmi toutes les Cinématiques que l'on peut imaginer, il en est deux qui, à l'heure présente, tiennent la première place dans la Physique moderne : ce sont la Cinématique newtonienne et la Cinématique de Lorentz-Einstein.

La *Cinématique newtonienne* a pour base, comme on sait, le groupe euclidien, et tous les déplacements qu'elle envisage sont euclidiens. Pour définir l'« horloge-mère », Newton lie aux étoiles dites fixes un système d'axes qu'il nomme « système absolument fixe », et il pose le temps proportionnel à l'angle dont a tourné la Terre par rapport à ce système. Soit ρ un angle, ω une constante; on a par définition :

$$t = \frac{1}{\omega} \rho .$$

et, par définition, la Terre est animée d'une rotation « uniforme », de vitesse angulaire ω .

Cette convention, qui semble si immédiate et si naturelle, et à laquelle l'Homme est parvenu après des siècles de recherches et de tâtonnements, entraîne avec soi une foule de conséquences dont on ne se rend en général pas assez compte. Voici un phénomène; me basant sur le principe de raison suffisante, je dé-

clare qu'il se déroule d'une façon « uniforme ». En ai-je le droit ? Nullement, car en ce faisant, je le pose proportionnel à t , qui n'est pas indépendant ; t est une variable de liaison qui lie tous les phénomènes à la rotation terrestre. Et cependant, c'est ce que l'on fait quand on évalue les distances stellaires en « années de lumière ». On postule implicitement que la vitesse des ondes lumineuses dans les espaces interstellaires est « constante ». Nous savons aujourd'hui que cela ne saurait être rigoureusement exact.

Si l'on considère, dans un phénomène quelconque, un *paramètre* x variable avec le temps, la vitesse de cette variation sera

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{d\varphi} .$$

Lorsque, pour mesurer le temps, on se sert d'une horloge auxiliaire marquant un temps quelconque τ , on aura :

$$v = \frac{dx}{d\tau} : \frac{dt}{d\tau} ;$$

ainsi, la vitesse par rapport à l'horloge-mère, est égale au quotient des vitesses du paramètre et de la Terre relativement à l'horloge auxiliaire.

Il est bien digne de remarque que le paramètre t ainsi défini, et qui doit sa définition à la rotation de ce petit sphéroïde où le sort nous a jetés, jouisse justement de la propriété de donner aux équations de la Mécanique une forme aussi simple, en particulier, qu'il ait conduit à la loi de Newton¹. « Il y a des raisons,

¹ A ce propos, il est intéressant de citer les réflexions suivantes de TANNERY, Jules. Science et Philosophie, p. 24 : « Si l'on veut appliquer ces sciences (la Géométrie et la Cinématique) à la réalité, le temps ne pourra plus être une variable quelconque, ce sera une variable déterminée, qu'il faudra évaluer sur une *pendule* déterminée. Théoriquement, on pourrait mesurer le temps avec n'importe quelle pendule, pourvu que les aiguilles marchassent toujours dans le même sens : ayant choisi cette pendule, on dira que deux intervalles de temps sont égaux quand, pendant ces intervalles, l'aiguille aura tourné d'un même angle ; par définition, le mouvement de l'aiguille sur cette pendule sera dit uniforme. Une autre pendule, réglée différemment, marquera un autre temps ; des durées qui, évaluées sur la première pendule, étaient égales, ne le seraient plus si on les évaluait de même avec la seconde : peu importe, si l'on sait, à chaque instant, les deux nombres que marquent les deux pendules, si, connaissant

dit quelque part Jules Tannery, tirées de la Mécanique même, pour croire que si on l'appliquait à des périodes extrêmement longues, extraordinairement plus longues que celles que l'observation nous permet de considérer, cette définition ne permettrait plus de conserver aux équations de la Mécanique leur forme simple ; c'est elle, non les équations, qu'il conviendrait de changer, si la science embrassait un jour des périodes aussi considérables. » Le jeu des marées, par exemple, produit un « freinage » de la rotation terrestre, qui, à la longue, pourra faire sentir ses effets. C'est là un phénomène extra-mécanique, étranger aux équations différentielles de la Mécanique céleste, et dont on ne pourrait tenir compte qu'en modifiant la définition de la durée.

La détermination du temps ne se borne pas à celle de la *durée*, il faut encore déterminer la *simultanéité*, détermination qui se confond avec l'établissement d'une cinématique. Or, la cinématique newtonienne repose principalement sur des observations astronomiques ; elle n'a donc pu être établie qu'en faisant appel à la lumière et à sa vitesse, postulée constante, c'est-à-dire à un phénomène étranger à la Mécanique. Et, comme Poincaré le

l'un de ces nombres on peut en déduire l'autre, soit au moyen d'un tableau convenablement dressé, soit au moyen d'une formule ; on aura alors tous les éléments nécessaires pour faire ce que l'on appelle en mathématiques un changement de variable. Mais il arrive que ce changement de variable modifie profondément les équations de la Mécanique ; si elles étaient simples avec la première variable, elles seront compliquées avec la seconde. Ces équations acquièrent toute leur simplicité, quand on fait choix d'une pendule spéciale, la pendule sidérale, réglée sur le mouvement apparent des étoiles, ou, si l'on veut, sur le mouvement de la Terre. Pour passer de l'heure marquée par la pendule sidérale, à celle que marquent nos pendules ordinaires, il n'y a d'ailleurs qu'un changement insignifiant à faire, insignifiant parce qu'il n'altère pas l'*égalité* ; deux durées qui sont égales quand on les évalue avec une pendule sidérale, sont encore égales quand on les évalue avec une pendule ordinaire, qui marque ce qu'on appelle le temps moyen. Il n'en serait plus de même si l'on se servait d'une pendule réglée sur le mouvement apparent du Soleil : les lois de la Mécanique, simples avec la pendule sidérale, se compliqueraient singulièrement avec la pendule solaire : c'est cette simplicité qui a déterminé le choix. Comment est-on arrivé à le reconnaître ? Par de nombreuses observations dont quelques-unes sont très vulgaires. Nous sommes habitués à la répétition d'une foule de phénomènes, qui se ressemblent tellement que nous les regardons

relève, on a adopté pour cette vitesse une valeur telle que les lois astronomiques compatibles avec cette valeur soient aussi « simples » que possible.

On voit que le terrain est mouvant. Le problème de la simultanéité sensible est posé avec toute son ampleur par Poincaré¹ dans l'hypothèse simple suivante. « Considérons trois astres, dit l'illustre géomètre, par exemple le Soleil, Jupiter et Saturne; mais, pour plus de simplicité, regardons-les comme réduits à des points matériels et isolés du reste du monde. Les positions et les vitesses des trois corps à un instant donné suffisent pour déterminer leurs positions et leurs vitesses à l'instant suivant, et par conséquent à un instant quelconque. Leurs positions à l'instant t déterminent leurs positions à l'instant $t + h$, aussi bien que leurs positions à l'instant $t - h$. Il y a même plus; la position de Jupiter à l'instant t , jointe à celle de Saturne à l'instant $t + a$, détermine la position de Jupiter à un instant quelconque et celle de Saturne à un instant quelconque. L'ensemble des positions qu'occupent Jupiter à l'instant $t + \varepsilon$ et Saturne à l'instant $t + a + \varepsilon$ est lié à l'ensemble des positions qu'occupent Jupiter à l'instant t et Saturne à l'instant $t + a$, par des lois aussi pré-

presque comme identiques. Il est commode de dire qu'ils demandent le même temps pour s'accomplir; cela signifie, au fond, qu'on suppose l'existence d'une pendule marchant de telle façon qu'elle marquerait toujours des temps égaux pour la durée de ces phénomènes. Voici un sablier; j'admets bien volontiers qu'il mettra le même temps à se vider, aujourd'hui ou demain, dans cette chambre ou dans cette autre: de même pour une foule de phénomènes physiques. Cette habitude est si familière qu'on a prétendu trouver là une définition de l'égalité de deux durées: deux durées sont égales, dit-on, si pendant chacune d'elles, s'accomplissent deux phénomènes identiques. Cette proposition, prise comme définition, contient un non-sens, ou tout au moins un cercle vicieux: tout d'abord, il n'y a pas, à proprement parler, deux phénomènes identiques; s'ils sont *deux*, si on les distingue, c'est qu'ils diffèrent par quelque chose: pourquoi ne diffèrent-ils pas par leurs durées? Ce qui caractérise un phénomène, c'est comme l'on dit, les circonstances de ce phénomène, et la durée du phénomène est une de ces circonstances; pourquoi l'isoler des autres? Veut-on dire que si toutes les circonstances de deux phénomènes, autres que la durée, sont les mêmes, les durées aussi seront les mêmes? On aurait grand'peine à trouver de pareils phénomènes; et la définition, ainsi comprise, serait peu applicable; c'est sans doute *quelques* circonstances qu'on veut dire; lesquelles? »

¹ *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1898, p. 1.

cises que celle de Newton, quoique plus compliquées. Dès lors pourquoi ne pas regarder l'un de ces ensembles comme la cause de l'autre, ce qui conduirait à considérer comme simultanés l'instant t de Jupiter et l'instant $t + a$ de Saturne? Il ne peut y avoir à cela que des raisons de commodité et de simplicité, fort puissantes, il est vrai. »

Cet exemple du grand géomètre français montre parfaitement combien flottantes sont pour nous les notions de temps et de simultanéité *expérimentales*. C'est en ce sens qu'on peut donner pleinement raison à Einstein lorsqu'il parle de la *relativité* de la simultanéité. Toutes ces questions n'ont pas de sens, dit-il. C'est vrai; mais rien ne nous empêche de leur en conférer un! Il est bien évident, en effet, qu'étant donnée la tournure de notre esprit, nous pourrions certainement, dans l'exemple de Poincaré, introduire un paramètre τ qui jouerait le rôle du temps; ρ ne varierait pas proportionnellement à τ ; la dépendance serait plus compliquée, voilà tout.

Vue sous ce jour, la simultanéité apparaît comme une convention, un artifice mathématique, introduit pour nous permettre de jeter un coup d'œil d'ensemble sur des corps en mouvement, d'établir des figures, telles ces images du système solaire que l'on voit dans les traités d'astronomie.

Comme le dit Poincaré, nous voulons nous représenter le monde extérieur, car ce n'est qu'à ce prix que nous croirons le connaître. C'est pourquoi nous aimons tout au moins à imaginer une « intelligence » très puissante, une sorte de grande « conscience » qui se représenterait à la fois, à chacun de « ses » instants, tous les points d'une portion immense de l'univers.

Cette image proposée par Poincaré est excellente. Elle nous donne une véritable *définition* de la « représentation » du monde sensible. Elle est suggérée par l'extension à un être fictif des phénomènes qui permettent à notre être de prendre conscience de son ambiance. Cette « conscience » serait celle de quelque immense pieuvre pénétrant tout l'Univers avec ses tentacules subtiles et innombrables, et dont l'influx nerveux se propagerait avec une vitesse *infinie* jusqu'à ses centres conscients.

L'être ainsi imaginé a une existence indépendante du monde physique qu'il est appelé à juger; il est extra-phénoménal. Alors

que nous accordons une vitesse infinie à son influx nerveux, il nous répugnerait d'en attribuer une à quelque manifestation « naturelle ». Mais ici, parler d'une telle vitesse n'est qu'une autre manière de dire que le temps sensible est *relatif*, relativité qui résulte immédiatement de l'extension au monde *extérieur* de la relativité du temps rationnel. On admet, en effet, que tous les mouvements de l'univers physique pourraient être « ralentis » dans un même rapport sans que les positions relatives des « points physiques » soient altérées. A la limite, toutes les vitesses sont *infinitement petites*, et nous pouvons imaginer qu'on examine à son aise les configurations successives. Or, évidemment, ces vitesses ne peuvent être « infinitement petites » que par rapport à un être de comparaison, qui conserverait la notion de vitesse *finie*, ce qui revient exactement à comparer les vitesses finies à une vitesse infinie.

On pourrait dire aussi que l'univers extérieur a été *quasi-solidifié*, et retrouver de la sorte une extension du *principe de solidification* déjà employé dans la mécanique des fluides.

On voit ainsi réapparaître le corps solide, qui joue un rôle fondamental dans la notion de simultanéité, comme on l'a souvent relevé. Il n'y a pas lieu de s'en étonner. Un solide, en effet, est une portion de l'étendue géométrique, c'est-à-dire un ensemble de multiplicités, et nous avons vu que, par définition, « multiplicité » était synonyme de « variation simultanée ».

Ce qui précède paraîtra, en général, relativement simple et clair. Nous allons nous en servir pour essayer de pénétrer les difficultés que l'on rencontre dans la compréhension de la Théorie de la relativité¹.

Auparavant, nous attirerons l'attention sur les inconvénients de certaines habitudes de langage.

Il est d'usage courant en Mathématiques de donner aux points une existence *absolue* et de dire que l'on rapporte un « même » point P tantôt à un système d'axes tantôt à un autre. Si ce langage n'a pas d'inconvénient lorsqu'il s'agit d'objets dénués de qualité comme les points des géomètres, il peut en avoir de grands dans une théorie physique où les points acquièrent cer-

¹ Voir GUILLAUME, Ed., loc. cit., *Arch.* 1917, p. 5 et suiv.

taines propriétés. Dans la Théorie de la relativité, chaque point est caractérisé non seulement par les valeurs que prennent, en ce point, trois coordonnées x , y , z , mais aussi par les valeurs d'un paramètre τ indiquant le temps local. Tout système de valeurs des quatre quantités (x, y, z, τ) est appelé « événement élémentaire »; il est représentable par un point de l'espace à 4 dimensions. Le mot « événement », malheureusement, évoque à tort l'idée que l'on se fait d'un événement dans la vie courante, et le fait qu'il est représentable par un point géométrique contribue encore plus à lui conférer une existence absolue. Aussi, lorsqu'on fait un changement d'axes, il nous semblera tout naturel de dire que c'est le « même » événement que l'on rapporte à un autre système de référence; on pense tout naturellement à des observateurs qui assisteraient d'endroits différents à quelque manifestation naturelle. Ce langage, admissible dans les descriptions grossières de tous les jours, peut ne plus l'être, lorsque, par exemple, on comparera entre elles des sources lumineuses servant d'horloges, comme nous le verrons plus loin.

C'est pourquoi nous préférons dire que les événements observés sont *conjugués*, affirmant par là qu'ils ne sont pas parfaitement identiques, qu'ils diffèrent en quelque chose¹. Tout événement élémentaire d'un système S aura ainsi son conjugué dans un système S' . En particulier, ces événements pourraient être confondus.

Ce langage est d'autant plus indiqué qu'un physicien n'admettra pas, en général, la compénétration de tous les systèmes de coordonnées, comme le font les mathématiciens. Pour lui, « système de référence » sera synonyme de « portion d'un milieu physique », et *changer de systèmes reviendra à établir une correspondance entre tous les événements conjugués de ces différentes portions*.

Nous allons illustrer immédiatement ce qui précède sur un exemple célèbre : l'expérience de Michelson et Morley. On sait — et nous le verrons plus loin — que le temps employé par la lumière au parcours des distances d entre les miroirs est, pour l'observateur au repos relativement aux appareils :

¹ Voir la note pages 289-291.

$$\Delta\tau_2 = \frac{2d}{c_0} ,$$

c_0 étant la vitesse de la lumière. Pour un observateur qui voit passer les appareils devant lui avec une vitesse uniforme v , le temps de parcours serait :

$$\Delta\tau_1 = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} .$$

Ainsi donc, voici un « même » événement dont la *durée* dépend du système de comparaison, autrement dit, qui a une infinité de durées différentes ! Il est bien évident que ce qui nous choque provient du mot « même », malencontreusement introduit, et qu'il vaut mieux parler d'« événements conjugués ».

Une remarque analogue peut être faite au sujet de la trajectoire, dans l'espace à quatre dimensions, du point représentant un événement élémentaire, trajectoire que l'on a appelée « ligne d'univers ». Cette trajectoire n'a d'existence que pour le groupe des systèmes — en nombre infini et en translation relative uniforme — qui ont la même fonction-accélération par rapport au point envisagé. En particulier, si l'on se place sur ce point, c'est-à-dire si l'on est au repos relatif avec lui, la ligne d'univers considérée s'évanouit, et est remplacée par une droite. Le « temps propre » du point, qui est par définition proportionnel à la longueur de la ligne d'univers, ne saurait donc non plus avoir une existence absolue ; il dépend du groupe de systèmes de comparaison.

Ces remarques faites, nous considérerons, d'une façon générale, deux systèmes S et S' , que nous supposerons, pour plus de simplicité, réduits à deux axes Ox et $O'x'$. Nous admettrons qu'on ait défini des horloges $h(\tau)$ et qu'il y en ait une en chacun des points de Ox pour donner le temps τ dans le système S . Nous ferons la même hypothèse en ce qui concerne les horloges $h'(\tau')$ indiquant le temps τ' du système S' . Nous supposerons enfin qu'à tout événement élémentaire (x, τ) de S se conjugue un événement élémentaire (x', τ') de S' , la conjugaison se faisant au moyen des relations :

$$x' = f(x, \tau) ; \quad \tau' = g(x, \tau) . \quad (1)$$

Il se passe alors des choses curieuses que nous allons examiner. Plaçons-nous sur le système S et donnons à τ une valeur déterminée τ_1 . Toutes les horloges de S indiquent le temps τ_1 ; on dit qu'elles sont « simultanées ». Or, en général pour cette valeur τ_1 , les horloges de S' marqueront chacune des temps τ' différents, variables avec x' , et que les relations (1) permettront de calculer; autrement dit, les horloges de S seront simultanées, tandis que les horloges de S' ne le seront pas; le système S aura un temps bien déterminé, le système S' n'en aura pas; il aura en général tous les temps possibles. Mais, d'autre part — et c'est ce qu'il y a de très curieux — nous pourrons faire un raisonnement identique en nous plaçant sur S', et en donnant à τ' une valeur déterminée τ'_1 .

En d'autres termes, la simultanéité perd son sens absolu; elle devient relative au système de référence sur lequel on se place.

Au lieu de la « conscience » universelle de Poincaré, nous devons imaginer une « conscience » particulière à chaque système, servant à définir la simultanéité de celui-ci, et percevant les différentes parties des autres systèmes à des instants qui ne sont pas simultanés pour les « consciences » de ces systèmes. Toutes ces « consciences » sont ainsi complètement impénétrables les unes aux autres.

Dès lors, l'on peut se poser la question fondamentale suivante:

Toutes ces « consciences », réciproquement impénétrables, excluent-elles l'introduction de la « conscience » universelle imaginée par Poincaré? En termes moins mystiques: ne peut-on faire un changement de variables et exprimer τ et τ' en fonction de deux autres variables r et t auxquelles on attribue: à la première un rôle « spatial » et à la seconde un rôle « temporel »?

Qu'est-ce que cela veut dire exactement?

Avant de poursuivre, remarquons que nous avons supposé les points x et x' au repos relatif dans leurs systèmes respectifs. Si ce n'était pas la cas, les choses seraient plus simples encore. En effet; le problème consisterait à se donner, par exemple, le mouvement de x en fonction de τ et à déterminer x' en fonction de τ' au moyen des relations (1). Il n'y a plus qu'une variable indépendante que nous pourrions exprimer à l'aide de t seulement.

Cela dit, reprenons notre question. Pour ne pas compliquer outre mesure, supposons que les relations (1) sont développables en série de puissances et que les termes linéaires ne sont pas nuls. Nous pourrions toujours nous arranger pour que les coefficients des termes en x soient de dimension nulle (nombre pur); x étant homogène à une longueur, les termes en x seront alors eux-mêmes homogènes à une longueur. Il devra en être de même des termes en t , autrement dit, leurs coefficients devront être homogènes à une vitesse. On peut toujours décomposer ces coefficients en un produit d'un nombre pur par une même vitesse constante c_0 , de sorte que, finalement, on pourra définir deux nouvelles variables

$$u = c_0 \tau ; \quad u' = c_0 \tau' \quad (2)$$

homogènes à des longueurs. Ainsi, aux variables τ et τ' qui symbolisent le temps, on peut substituer les variables spatiales u et u' . En d'autres mots, il est possible de se passer de la notion de temps et de ramener toutes les mesures à des constatations de *coïncidences spatiales*. Les durées en soi ne jouent aucun rôle. Tout ce qui nous intéresse, c'est la connaissance de l'ensemble des systèmes de valeurs simultanées — au sens mathématique — qui satisfont aux relations (1). Ce qui est essentiel, c'est de savoir que lorsqu'un mobile a parcouru la distance Δx , un autre mobile a parcouru la distance Δu , et que les mobiles conjugués ont parcouru respectivement les distances $\Delta x'$ et $\Delta u'$. Que cela ait duré une seconde, une heure, un jour, un siècle, ..., que cela se soit passé « régulièrement » ou non, que cela ait eu lieu « en même temps » dans le monde *sensible*, peu importe.

Nous donnerons le nom d'« horloge-mère du système S » à la coordonnée u , et celui d'« horloge-mère du système S' » à la coordonnée u' .

Une « vitesse » sera, par définition, proportionnelle au quotient différentiel du chemin parcouru par rapport à l'horloge-mère du système envisagé, c'est-à-dire à $\frac{dx}{du}$ pour S et à $\frac{dx'}{du'}$ pour S'.

Nous nous trouvons ainsi en présence d'une nouvelle représentation analytique des points de l'espace, et d'une nouvelle correspondance ponctuelle. A tout point du continu linéaire Ox , par exemple, correspondent deux nombres x, u de même espèce,

mais ces nombres ne peuvent pas être considérés comme des coordonnées du point, au sens habituel, comme des coordonnées homogènes, par exemple.

Or, d'autre part, nous aurions pu parfaitement ne faire appel qu'à la notion de temps, et rendre tous les termes du développement homogène à cette grandeur. Dans ce cas, les longueurs eussent été mesurées par les temps employés à les parcourir.

Concluons : *rationnellement, nous pouvons travailler soit avec l'une, soit avec l'autre exclusivement, soit à la fois avec l'une et l'autre des notions temporelle et spatiale. Dès lors, notre choix ne peut être dicté que par des convenances psychologiques, et nous devons introduire le temps et l'espace dans nos théories de façon telle, que celles-ci soient aussi intuitives que possible.*

Remarquons du reste qu'en pratique toutes les *mesures* temporelles se ramènent à des mesures spatiales, tandis qu'en perception, nous concevons mieux les longueurs si on les exprime en temps. Les anciennes bornes routières portaient les distances en heures ou en lieues, distance parcourue à pied en une heure.

Ce qui précède trouve sa confirmation dans l'extension de la Théorie de la relativité à la gravitation¹ : on n'y distingue même plus les quatre coordonnées en coordonnées spatiales et coordonnée temporelle. Ce sont quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 , qu'on peut représenter par un point dans un *espace fictif* à quatre dimensions et sans signification physique. Toutes les mesures deviennent spatiales.

Il nous est facile maintenant de répondre à la question primitivement posée : Faire le changement de variables envisagé, revient à décomposer deux variables spatiales u et u' en deux autres variables spatiales, dont l'une jouera, par convention, le rôle d'horloge. Celle-ci, à son tour, sera décomposée en un produit d'une vitesse par une variable t indépendante du système de référence. Ce sera le *temps auxiliaire universel*. Alors les vitesses seront, par définition :

$$q_x = \frac{dx}{dt} ; \quad q'_x = \frac{dx'}{dt} ; \quad c = \frac{du}{dt} ; \quad c' = \frac{du'}{dt} , \quad (3)$$

¹ Voir par exemple : EINSTEIN, A. Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, Sammlung Vieweg, Heft 38, p. 64 et suiv.

et les vitesses par rapport à l'horloge-mère correspondante seront :

$$\frac{1}{c_0} \frac{dx}{d\tau} = \frac{q_x}{c} ; \quad \frac{1}{c_0} \frac{dx'}{d\tau'} = \frac{q'_x}{c'} . \quad (4)$$

D'autre part, on a, en différentiant (1) et tenant compte de (2) :

$$\begin{cases} dx' = A dx + B du \\ du' = C dx + D du \end{cases} \quad (5)$$

où A, B, C, D sont, en général, des fonctions de x, x', u, u' . Divisons tous les termes de (5) par dt et faisons le quotient des deux équations ; il vient :

$$\frac{q'_x}{c'} = \frac{A q_x + B c}{C q_x + D c} . \quad (6)$$

C'est l'expression analytique de la composition des vitesses ; elle est homogène par rapport aux vitesses. Un cas important est celui où A, B, C, D sont des constantes ; alors (6) représente une transformation homographique. Si, de plus, nous remplaçons dans (6) c et c' par c_0 , nous obtenons une expression en relation projective simple avec la première, comme s'il s'agissait de coordonnées homogènes.

En résumé, nous voyons que nous allons avoir affaire à un nouvel algorithme : les *vitesses homogènes*, qui va donner naissance à une branche nouvelle de la Science du mouvement ; on peut l'appeler si l'on veut *Cinématique projective*. La Cinématique classique n'en est qu'un cas particulier ; c'est celui où

$$u \equiv u' ; \quad c \equiv c' .$$

§ 2. — ÉTUDE DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ DANS
LE CAS OÙ TOUS LES POINTS SONT AU REPOS RELATIF
DANS LEURS SYSTÈMES RESPECTIFS.

La Théorie de la relativité part, comme toute Cinématique, d'un certain groupe de déplacements.

Le groupe particulier qui est à la base de cette théorie est appelé *groupe de Lorentz*, du nom de son inventeur ; il est apparenté au groupe hyperbolique.

Il serait absolument vain d'essayer de le déduire de considérations simples, comme tentent de le faire les relativistes, car, inventé pour condenser un complexe d'expériences et de conventions très diverses, il a justement la prétention d'être l'instrument le mieux approprié à son analyse. Il ne faut pas commencer à rebours. Comme M. Bouasse le dit avec tant de bon sens, on pose une formule et l'on en déduit les conséquences; si celles-ci concordent avec l'expérience, on aura par là même montré *pourquoi* on l'a posée. Quant à savoir *comment* on est arrivé à la poser, c'est une question différente, d'ordre tout historique, et qui n'entre pas dans notre objet. Bien entendu par là nous ne préjugeons en rien des « explications » qu'on essaiera certainement de donner un jour des phénomènes classifiés par la Théorie de la relativité, « explications » qui seront à celle-ci ce que la Mécanique statistique est à la Thermodynamique.

Nous prendrons la transformation de Lorentz sous la forme qu'on lui donne habituellement. On considère deux systèmes d'axes rectangulaires $S_1(x_1, y_1, z_1)$, $S_2(x_2, y_2, z_2)$ qui se déplacent l'un par rapport à l'autre de façon que les plans x_1y_1 et x_2y_2 soient superposés, l'axe x_1 étant contre l'axe x_2 et de même sens; les plans x_1z_1 et x_2z_2 d'une part, et les plans y_1z_1 et y_2z_2 d'autre part restent alors constamment parallèles. A chaque point de S_1 on fait en outre correspondre une valeur déterminée d'une coordonnée u_1 qui représente l'horloge-mère du système S_1 ; de même u_2 sera une coordonnée représentant l'horloge-mère de S_2 . A l'événement élémentaire (x_1, y_1, z_1, u_1) de S_1 correspondra l'événement conjugué (x_2, y_2, z_2, u_2) de S_2 . Ces événements sont alors supposés liés par la transformation suivante, due à Lorentz :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \beta(x_2 + \alpha u_2) ; \quad u_1 = \beta(u_2 + \alpha x_2) ; \quad y_1 = y_2 ; \quad z_1 = z_2 \\ \text{où } \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} ; \quad \alpha = \text{constante.} \end{array} \right.$$

Observons d'abord que cette transformation est *symétrique*, c'est-à-dire qu'on l'obtient résolue par rapport à x_2, y_2, z_2, u_2 en permutant les lettres x_1 et x_2, y_1 et y_2, z_1 et z_2, u_1 et u_2 , et en changeant α en $-\alpha$.

Dans ce qui suit, pour simplifier, nous ferons abstraction des axes y_1, y_2 et z_1, z_2 , et nous admettrons que les deux systèmes S_1 et S_2 se réduisent aux axes x_1 et x_2 glissant l'un contre l'autre. Nous n'emploierons donc pour le moment que les deux premières équations (I).

Tout d'abord, nous ferons le « *métrage* » des systèmes, c'est-à-dire nous tracerons, en déplaçant une règle rigide par exemple, des échelles sur les axes x_1 et x_2 , afin qu'aux nombres x_1 et x_2 qui satisfont à (I) correspondent des points bien déterminés sur les axes. Les échelles ainsi tracées sont, par définition, *identiques* sur les deux systèmes.

Puis, nous procéderons au « *chronométrage* » des systèmes. A cet effet, nous commencerons par remarquer que les horloges-mères u_1 et u_2 ne sont pas autre chose que les chemins parcourus simultanément par la lumière, les « chemins optiques », dans les systèmes S_1 et S_2 respectivement. Ainsi, alors que dans la Mécanique classique, il n'y a qu'une seule horloge-mère, la rotation φ de la Terre, qui est une horloge circulaire, dans la théorie qui nous occupe, chaque système a son horloge-mère, et celle-ci est une horloge *linéaire*, une sorte de clepsydre lumineuse. Nous supposons, en effet, que les rayons se propagent dans le vide et que cette propagation est *rectiligne*. Le maniement de ces clepsydres n'est pas très commode, même en imagination; c'est pourquoi nous exemplifierons le temps à l'aide d'horloges *auxiliaires*, fondées sur un phénomène *périodique*, et supposées en synchronisme parfait avec l'horloge-mère. Pouvons-nous prendre comme instrument auxiliaire n'importe quelle manifestation postulée « uniformément » périodique en vertu du principe de raison suffisante? Evidemment pas; mais il est permis de supposer que les *sources* lumineuses, plus généralement les sources d'énergie rayonnante, sont naturellement synchronisables sur l'horloge-mère, autrement dit que le rapport $\frac{c}{\nu}$ de la vitesse de la lumière à la fréquence de la source envisagée, ne dépend pas du temps. En fait, si l'on examine les applications de la Théorie de la relativité, on verra que comparer des horloges revient toujours à comparer des couleurs.

Nous envisagerons, pour être précis, des *raies spectrales* de fréquences bien déterminées. Considérons, par exemple, la raie

D du sodium. A cette raie correspond un nombre ν_D qui désigne sa fréquence par rapport à la rotation terrestre. N'ayant pas affaire ici à des phénomènes mécaniques, nous ne pouvons utiliser cette horloge, et le nombre ν_D devient arbitraire. Par contre, nous pouvons comparer au spectroscopie les autres raies A, B, ..., G, ... à la raie D, et déterminer les rapports :

$$\frac{\nu_A}{\nu_D}, \quad \frac{\nu_B}{\nu_D}, \quad \dots \quad \frac{\nu_G}{\nu_D}, \quad \dots$$

qui seuls importent.

Cela posé, nous imaginerons que l'on a doté chaque point des systèmes de sources-horloges identiques, ayant même fréquence lorsqu'on les compare côte à côte au repos. Enfin, on peut supposer qu'on adjoigne à chaque point de l'espace un « démon-compteur », chargé d'enregistrer le nombre de vibrations lumineuses, et, d'indiquer ainsi les durées écoulées.

De la sorte, nos systèmes sont parfaitement identiques. Rien ne permet de les distinguer l'un de l'autre. S'ils étaient purement mécaniques et animés d'une translation relative uniforme de vitesse v , on passerait de l'un à l'autre au moyen de la transformation dite *galiléenne* :

$$x_1 = x_2 + vt .$$

Supposons que nous nous placions sur S_1 et que tous les points de S_2 soient au repos relatif. Alors de

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 + v\Delta t$$

on tire évidemment :

$$\Delta x_2 = 0 ; \quad \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = q_{1x} = v .$$

Voyons ce que donnent les équations (I) dans l'hypothèse où Δx_2 est nul. Entre les accroissements *concomitants* Δu_1 et Δu_2 des chemins optiques, on obtient la relation :

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta u_2}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

qui nous montre que Δu_1 est plus grand que Δu_2 . Vis-à-vis de ce

fait, on peut avoir deux attitudes simples, également remarquables :

1° On admet que la vitesse de la lumière c_2 dans S_2 , pour l'observateur lié à S_1 , est inférieure à la vitesse c_0 que cet observateur mesure dans son système¹, et cela suivant la relation :

$$c_2 = c_0 \sqrt{1 - \alpha^2} . \quad (1)$$

2° On admet que la vitesse de la lumière dans S_2 est mesurée, pour S_1 , par le même nombre c_0 , mais que les horloges de S_2 vont plus vite que celle de S_1 dans la proportion :

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} , \quad (2)$$

τ_1 et τ_2 étant les temps donnés par les sources-horloges.

Comme la forme symétrique de la transformation de Lorentz permet de faire des constatations et des hypothèses identiques en ce plaçant sur S_2 , nous pouvons dire qu'elle est compatible avec les deux points de vue simples suivants :

1° Dans le vide, la vitesse d'un rayon lumineux mesurée dans le système auquel appartient le rayon et par un observateur au repos dans ce système, est une constante universelle c_0 . C'est ce que nous appellerons le Principe de la constance *relative* de la vitesse de la lumière.

2° On accorde à la vitesse de la lumière dans le vide non seulement la valeur constante c_0 pour les rayons qui sont dans le système portant l'observateur, mais aussi pour les rayons qui se trouvent dans d'autres systèmes, quels que soient les mouvements de ceux-ci par rapport au premier. C'est le principe de la constante *absolue* de la vitesse de la lumière.

On sait qu'en partant de ce dernier principe et en postulant la relativité, c'est-à-dire la symétrie de la transformation, Einstein parvint directement à la transformation de Lorentz. Dans

¹ Il est bien clair que par c_0 nous désignons un nombre fixe et déterminé. On posera par exemple :

$$c_0 = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{sec-lumière}} ,$$

définissant de la sorte une nouvelle unité de temps : la « seconde-lumière », distincte de la « seconde-terrestre ».

ce cas, les chemins optiques u_1 et u_2 sont liés aux temps locaux τ_1 et τ_2 des systèmes S_1 et S_2 par les équations

$$u_1 = c_0 \tau_1 ; \quad u_2 = c_0 \tau_2 . \quad (3)$$

Il en résulte pour la vitesse relative v des systèmes :

$$v = \frac{\Delta x_1}{\Delta \tau_1} = \frac{\Delta x_2}{\Delta \tau_2} = \alpha c_0 . \quad (4)$$

Supposons qu'on ait mesuré sur S_2 une longueur $(x_2'' - x_2')_G$ avec une règle-unité rigide. C'est ce que nous appellerons une longueur *géométrique*. La longueur *cinématique* correspondante est obtenue en déterminant sur S_1 les points x_1' et x_1'' qui coïncident respectivement avec les extrémités du segment $(x_2'' - x_2')_G$ à un même instant τ_1 , et en mesurant ensuite, avec la règle-unité ci-dessus, la distance $x_1'' - x_1'$. Les équations de transformation donnent alors, entre les longueurs géométrique et cinématique d'un segment, la relation :

$$(x_1'' - x_1')_{\tau_1} = (x_2'' - x_2')_G \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (5)$$

qui exprime la célèbre « contraction » de Lorentz.

Voyons maintenant quelles sont les représentations qu'on peut lier aux mouvements des systèmes. Supposons toujours que nous sommes sur S_1 . A un instant quelconque, les aiguilles de tous les compteurs de S_1 marquent la même heure; elles sont « simultanées » par définition, affirme Einstein. Prenons pour simplifier

$$\tau_1 = 0 .$$

Toutes les aiguilles sont au zéro. La transformation (I) montre alors qu'il n'y a qu'une seule horloge de S_2 qui est au zéro à ce moment-là; c'est celle située à l'origine de S_2 , car si

$$\tau_1 = 0 , \quad \tau_2 = 0$$

on a :

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = 0 .$$

Toutes les autres horloges de S_2 marquent un temps $\tau_2 \neq 0$ donné par :

$$\tau_2 = \frac{\alpha \beta}{c_0} x_1 = \frac{\alpha}{c_0} x_2 .$$

Elles avancent du côté des x_1 , positifs et retardent de l'autre. En d'autres termes, alors que toutes les horloges de S_1 sont simultanées, celles de S_2 ne le sont pas. Mais cela n'est vrai que pour la « conscience » partielle C_1 , qu'on attribue à S_1 . La « conscience » partielle C_2 supposée liée à S_2 fera, de son côté, exactement les mêmes réflexions. C'est ce que l'on constate en permutant les accents et changeant le signe de α dans les formules précédentes.

Ainsi, la simultanéité est purement relative. Alors que le système entier sur lequel on suppose que l'observateur est placé, a , à chaque instant, un temps unique et bien déterminé, le système qu'il voit passer devant lui, a , au même instant, tous les temps possibles, selon les points envisagés. Cet observateur est dans l'incapacité complète de repérer simultanément dans son système, deux points simultanés du système en mouvement ; c'est ce qui crée la « contraction » de Lorentz.

On voit donc clairement de quelle façon essentiellement *subjective* on utilise la transformation de Lorentz dans la forme habituelle de la théorie, c'est-à-dire en y adjoignant le principe de la constance *absolue* de la vitesse de la lumière. Par convention, on fait exprimer aux variables (x_1, τ_1) — respectivement (x_2, τ_2) — les longueurs et les temps « réels » du système sur lequel on suppose l'observateur placé ; alors (x_2, τ_2) — respectivement (x_1, τ_1) — expriment les longueurs et les temps « apparents » de l'autre système pour ce même observateur.

Il est aisé maintenant de montrer pourquoi cette interprétation nous choque. Supposons-nous toujours sur S_1 . La transformation n'a de sens que si v est inférieure à c_0 ; toute vitesse de S_2 supérieure à c_0 est exclue. Or, par convention, nous déclarons *simultané* l'ensemble des points de S_1 lorsqu'on pose :

$$\tau_1 = \text{constante.}$$

Ceci entraîne — par définition même — la possibilité de communiquer avec une vitesse infinie entre deux points quelconques de S_1 , par exemple de transmettre instantanément à l'aide d'une tringle rigide des signaux entre ces deux points, en contradiction manifeste avec l'impossibilité de donner à S_2 une vitesse supérieure à c_0 . En d'autres termes, la convention représentative est inadéquate. Puisqu'aucune vitesse in-

finie n'est possible, il faut purement et simplement renoncer à la *représentation* d'un domaine *fini*. Tout se borne à cette constatation que lorsqu'en x_1 , l'horloge marque τ_1 , en x_2 l'horloge marque τ_2 . Autrement dit, non seulement nous ne pouvons faire appel à une conscience fictive universelle pour définir la représentation, mais même les « consciences partielles » s'accordent mal avec les variables τ_1 et τ_2 . Tout, dans la transformation, est essentiellement *local*. On interdit en quelque sorte à la pensée d'aller d'un point à l'autre avec une vitesse supérieure à c_0 !

C'est cette antinomie qu'il faut essayer d'écartier.

Les relativistes se défendent de faire la distinction entre « réel » et « apparent », soutenant qu'elle est vaine puisque des observateurs entraînés chacun avec son système, ne pourront que comparer ce qu'ils *perçoivent*, soit le « réel » avec « l'apparent », et jamais deux « réels » ou deux « apparents ». Or, cela n'est pas tout à fait exact. Il est bien vrai que, *physiquement*, ils ne pourront comparer que ce qui est *au contact* le plus immédiat. Mais en dehors de ces comparaisons physiques, il y a des comparaisons mathématiques, sans lesquelles tout raisonnement, tout calcul serait impossible. C'est ce qu'a exprimé M. Darlu en termes excellents² : « On nous parle, dit-il, de deux groupes d'observateurs qui mesurent, *chacun de son côté*, la durée d'une série de mouvements. Il y a nécessairement un tiers, un savant, si l'on veut, qui s'assure qu'il s'agit de *la même suite* de mouvement et qui, rapprochant les deux mesures, trouve qu'elles donnent des temps différents. Ce tiers a donc dans son esprit une notion déterminée du mouvement, une notion déterminée du temps qu'il applique également aux deux expériences. Les expériences diffèrent, mais en quoi sa notion du temps est-elle changée ? Par hypothèse même, elle est la même, puisqu'elle lui permet de rapprocher, de comparer les deux expériences, d'en énoncer le résultat. La différence est dans les faits, dans les expériences. Il lui appartient de chercher si l'une est plus vraie ou plus illusoire que l'autre. Les vérités les plus opposées s'accordent fort bien quand elles ne sont que relatives. »

Selon nos prémisses, nous avons posé que les deux systèmes

¹ Voir la note sur le *paradoxe d'Ehrenfest*, p. 321.

² *Bulletin de la Société française de Philosophie*, n° 1, 1912.

sont identiques, métrés et chronométrés identiquement, avec des instruments identiques; ils sont indiscernables, parfaitement équivalents, animés d'une translation purement relative. Or, je le demande, toutes ces affirmations ne sont-elles pas universelles, je veux dire indépendantes du système sur lequel on se place? Et pourquoi, dès lors, ne pourrait-on passer d'un système à l'autre à l'aide de la transformation galiléenne? N'est-ce pas, une fois de plus, une question de « point de vue », et ne pourrait-on imaginer qu'on concrétise le point de vue universel par une « conscience » C , servant à définir le temps universel t ?

Voyons si cela est possible. Nous devons commencer, bien entendu, par abandonner le principe de la constance absolue de la vitesse de la lumière et le remplacer par celui de la constance relative; autrement dit, au lieu d'exprimer les chemins optiques u_1 et u_2 en fonction des variables τ_1 et τ_2 introduites par les relations (3), nous devons les exprimer en fonction de deux autres variables t et r , dont l'une jouera, par convention, le rôle de temps universel et l'autre, r , sera une fonction spatiale, c'est-à-dire une fonction de x_1 et de x_2 , selon le système envisagé. Il est alors naturel de poser, pour les relations cherchées, les formes linéaires simples suivantes :

$$u_1 = c_1 t + r ; \quad u_2 = c_2 t - r , \quad (6)$$

où c_1 et c_2 sont deux quantités dont nous disposerons en supposant — dans le cas spécialement envisagé au présent paragraphe — qu'elles ne dépendent pas de t . Substituons les valeurs (6) dans la seconde équation (I); nous obtenons :

$$r = \frac{\beta c_2 - c_1}{\beta + 1} t + \frac{\alpha \beta}{\beta + 1} x_2 . \quad (7)$$

Supposons d'abord que nous sommes sur S_1 , et disposons de c_1 et c_2 de façon que l'équation (1) soit satisfaite. Désignons par c'_1 et c'_2 les valeurs qu'elles prennent dans cette hypothèse. On aura :

$$c'_1 = c_0 = \beta c'_2 \quad (1')$$

$$r_2(x_2) = \frac{\alpha \beta}{\beta + 1} x_2 = \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_2 \quad (8)$$

où x_2 ne dépend pas de t par hypothèse.

Pour étudier commodément ces relations, le plus simple est de tracer un graphique. A cet effet, l'on posera :

$$\alpha = ia ;$$

alors les deux premières équations (I') expriment une rotation des axes $(x_1, c_0\tau_1)$ et $(x_2, c_0\tau_2)$ d'un angle A autour de l'origine, tel que

$$a = \operatorname{tg} A ,$$

et la figure 1 montre que l'on a alors :

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \cos A ; \quad ab = \sin A$$

$$\frac{ab}{1+b} = \frac{1-b}{ab} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} .$$

Si, maintenant, nous nous plaçons sur S_2 , nous pourrions ré-

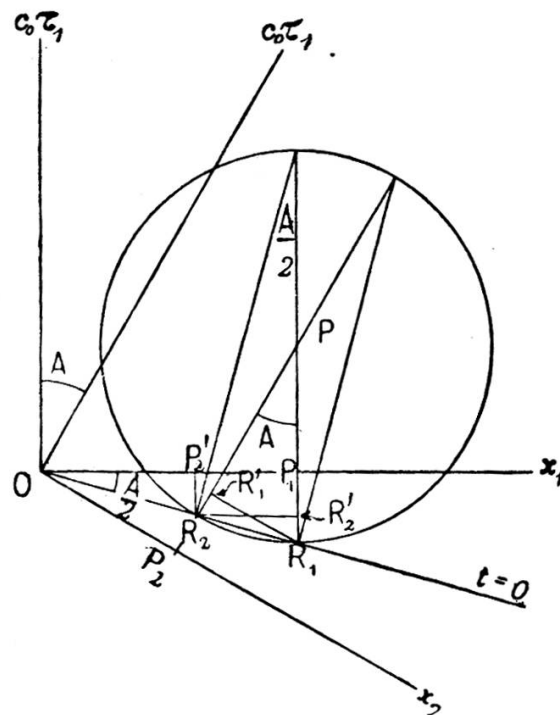


Fig. 1.

péter identiquement le raisonnement précédent, et l'on parviendrait aux relations corrélatives :

$$c_2'' = c_0 = \beta c_1'' \quad (1'')$$

$$r_1(x_1) = - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1 . \quad (8')$$

On voit sur la figure que :

$$\begin{aligned} OP_1 = x_1 ; \quad OP_2 = x_2 ; \quad P_1P = c_0\tau_1 ; \quad P_2P = c_0\tau_2 \\ PR'_1 = PR'_2 = c_0t ; \quad PR_1 = PR_2 = \frac{c_0t}{b} ; \quad P_1R_1 = r_1 ; \quad P_2R_2 = r_2 . \end{aligned}$$

En définitive, nous pourrions écrire le système de relations suivant, formé à l'aide des deux premières équations (I) et des équations (3) et (6) :

$$(I') \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \beta(x_2 + \alpha c_0\tau_2) \\ c_0\tau_1 &= \beta(c_0\tau_2 + \alpha x_2) \\ c_0\tau_1 &= \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_1 \\ c_0\tau_2 &= \frac{c_0}{\beta} t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x_2 . \end{aligned} \right.$$

Ce système remarquable résout le problème. Il se compose de quatre équations entre les cinq variables x_1 , x_2 , τ_1 , τ_2 , t ; mais comme l'une quelconque des équations est la conséquence des trois autres, nous avons toujours deux variables indépendantes. En remplaçant $c_0\tau_2$ dans la première équation par sa valeur tirée de la quatrième, nous obtenons en tenant compte de (4), la relation fondamentale :

$$\underline{x_1 = x_2 + vt} . \quad (9)$$

Ainsi, du point de vue de C, *les systèmes se meuvent bien comme des tous rigides ordinaires*, conformément aux prémisses. La vitesse v sera toujours, évidemment, inférieure à c_0 . Mais cela ne saurait gêner notre compréhension, la transformation galiléenne étant elle-même indépendante de cette restriction; elle ne doit être utilisée que dans un certain domaine de validité, voilà tout.

La figure 2 montre immédiatement dans le système de variables imaginaires, pourquoi la « contraction » disparaît lorsqu'on introduit le paramètre t , et que l'on a effectivement :

$$x''_1 - x'_1 = x''_2 - x'_2 .$$

Il convient de bien remarquer que nous n'avons nullement

« mutilé » la transformation de Lorentz, exprimée par les deux premières équations (I). Nous n'avons fait qu'un « changement de variables », traduction en langage mathématique de « changement de point de vue ». Les équations nouvelles, c'est-à-dire les deux dernières du système, permettent d'exprimer le temps local en fonction du temps universel, et vice versa. Pour le mathématicien, la question de savoir si l'un des points de vue est plus « vrai » que l'autre ne se pose pas ; ils sont équivalents — également justifiés, dirait Einstein — en ce sens qu'on peut passer de l'un à l'autre, traduire l'un dans l'autre, simplement en

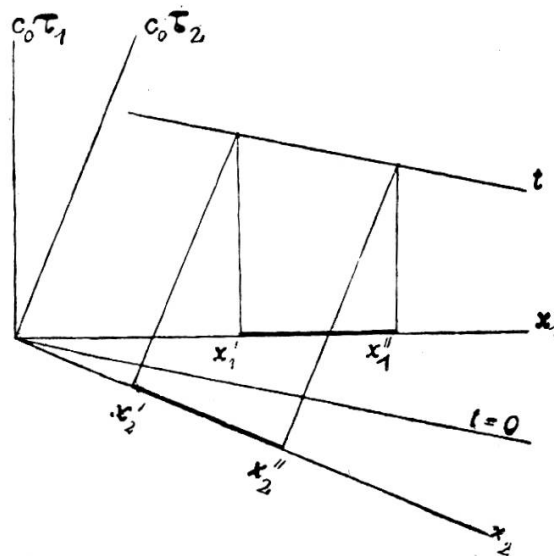


Fig. 2.

fixant celles des variables que l'on conviendra de regarder comme indépendantes.

Pour C_1 , par exemple, le temps τ_1 ne dépend pas de x_1 , tandis que t en dépendra. Ce sera le contraire pour C_2 . Les « consciences » C_1 et C_2 ou C_1 et C_2 sont aussi « impénétrables » l'une à l'autre que les « consciences » C_1 et C_2 entre elles, ce qui est une façon imagée d'exprimer ce fait mathématique, que lorsqu'on aura fixé le choix des variables indépendantes, on ne pourra, au cours de la même question, en choisir d'autres. Quant au physicien, jamais aucune expérience ne lui permettra de trancher le différend entre l'un ou l'autre des points de vue.

Les « consciences » ont toutefois certaines perceptions communes. De (I') on tire encore les relations :

$$\left. \begin{aligned} c_0 \tau_1 &= c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_2 \\ c_0 \tau_2 &= c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha \beta} x_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Si l'on est sur S_1 , on a

$$\Delta x_2 = 0$$

d'où

$$\Delta \tau_1 = \Delta t ;$$

ainsi, les horloges vont également vite pour C_1 et C . Mais il y a plus; C et C_1 par exemple, peuvent chronométrer leur système S_1 en envoyant des signaux *brefs*, de vitesse *quelconque*. Dans ce cas en effet, puisque les signaux sont brefs, le système S_2 que nous utilisons pour les produire se réduit à un point: l'origine O_2 , et l'on aura :

$$x_2 = 0$$

c'est-à-dire

$$\tau_1 = t .$$

En d'autres mots, lorsque C_1 ne fait que se contempler lui-même, il se voit comme C le voit. Par contre, lorsque C_1 regarde à la fois et lui et un autre système, il change sa physionomie pour s'adapter en quelque sorte à celle du système qu'il regarde passer; il possède, pour ainsi dire, un certain « pouvoir d'accommodation ». C'est ce qui résulte du reste de l'équation (5), qui exprime la « contraction » de Lorentz. Le premier membre, comme le second, est une fonction de α , c'est-à-dire de la vitesse relative des deux systèmes, ce qu'on peut exprimer en disant que le système de comparaison S_1 a un *pouvoir mesurateur* variable, au lieu de dire, comme on le fait communément, que c'est le système mesuré qui subit une contraction, — dont, au demeurant, il ne s'aperçoit pas. Nous retrouvons sous une autre forme cette *subjectivité* que nous avons déjà signalée, et qui introduit « un degré de relativité de plus », selon l'expression de M. Darlu (*loc. cit.*). C'est par cette sorte de double relativité que la transformation de Lorentz diffère profondément de la transformation galiléenne, simplement relative, quoique, *physiquement*, la première n'exprime rien de plus que la seconde lorsque tous les

points sont supposés au repos relatif dans leurs systèmes respectifs.

§ 3. -- CAS OU LES POINTS SONT EN MOUVEMENT DANS LEURS SYSTÈMES RESPECTIFS.

Ce qu'il y a de vraiment nouveau dans la transformation de Lorentz n'apparaît que dans le cas où les points de chaque système sont eux-mêmes en mouvement. On peut alors déduire de la transformation une règle remarquable pour la composition des vitesses, qui confère à la Théorie de la relativité son caractère cinématique propre. Ce sera le grand mérite d'Einstein d'avoir mis en lumière cette règle simple, qui contient les résultats fondamentaux de l'Electrooptique. Il nous reste à en donner l'expression en fonction de la variable t . Auparavant quelques éclaircissements s'imposent

Si l'on dérive l'équation (9) par rapport à t , on obtient évidemment, en désignant par q_{1x} et q_{2x} les dérivées de x_1 et de x_2 relativement à cette variable :

$$q_{1x} = q_{2x} + v \quad (11)$$

soit la règle ordinaire, cas particulier de la règle du parallélogramme. Il semble donc que nous n'avons rien gagné, et que nous ne sortirons pas de la cinématique classique. Ce serait vrai si l'on voulait que x_1 et x_2 se rapportassent au même point de l'« Espace », au sens que l'on donne habituellement à cette expression. Il n'en est plus ainsi lorsqu'à un point x_1 d'un système on fait correspondre un « conjugué » x_2 dans l'autre ; la *liaison* entre les mouvements de x_1 et de x_2 peut alors être absolument quelconque ; à un point x_1 de S_1 il est possible de faire correspondre ainsi une infinité de conjugués dans S_2 . Illustrons ceci sur un exemple. Imaginons qu'un minuscule ver luisant se promène sur une surface transparente agencée rigidement à une lentille, et supposons que nous déplaçons le tout au-dessus d'une feuille de papier. Si l'on veut calculer la projection sur la feuille de la trajectoire absolue de l'insecte, nous appliquerons évidemment la règle du parallélogramme ; si, par contre, nous voulons avoir

la courbe décrite par son image, nous devons appliquer une autre règle, et il sera parfaitement possible d'établir une formule qui permette de calculer directement la vitesse de cette image lorsqu'on donne la vitesse de l'insecte sur la surface et celle du système surface-lentille par rapport au papier.

Cela dit, envisageons la transformation (I). Nous allons en déduire deux règles fondamentales pour la composition des vitesses. Appelons respectivement $q_{1x}, q_{1y}, q_{1z}, c_1; q_{2x}, q_{2y}, q_{2z}, c_2$ les dérivées par rapport à t des variables $x_1, y_1, z_1, u_1; x_2, y_2, z_2, u_2$; ces dérivées seront elles-mêmes, dans le cas général, des fonctions de t . Nous obtenons le système :

$$(II) \quad q_{1x} = \beta(q_{2x} + \alpha c_2) ; \quad c_1 = \beta(c_2 + \alpha q_{2x}) ; \quad q_{1y} = q_{2y} ; \\ q_{1z} = q_{2z} ,$$

qui donne ce que nous appellerons la règle de composition *extérieure* des vitesses.

La règle de composition *intérieure* s'obtient en rapportant les vitesses à leurs horloges-mères respectives. A cet effet, nous traiterons les vitesses comme des *quantités homogènes*. Le système (II) représente alors une homographie, ce qu'on pourrait nommer une « homographie cinématique » dans un espace représentatif à quatre dimensions. Pour avoir les vitesses dans l'espace à trois dimensions, nous formerons les quotients par rapport à c_1 et à c_2 , et nous donnerons à ces dernières la valeur particulière c_0 , comme on le ferait pour des coordonnées spatiales. On obtient ainsi le système :

$$(III) \quad \frac{Q_{1x}}{c_0} = \frac{Q_{2x} + v}{c_0 + \alpha Q_{2x}} ; \quad \frac{Q_{1y}}{c_0} = \frac{Q_{2y}}{\beta(c_0 + \alpha Q_{2x})} ; \quad \frac{Q_{1z}}{c_0} = \frac{Q_{2z}}{\beta(c_0 + \alpha Q_{2x})} .$$

C'est la règle de composition des vitesses d'Einstein exprimée en fonction du paramètre t , comme il est facile de le vérifier directement.

La figure 3 montre les relations projectives entre les q, Q, c_1, c_2, c_0 , toujours à l'aide d'un système de variables auxiliaires imaginaires.

Les formules (II) forment un groupe identique au groupe de Lorentz. Les formules (III) forment un nouveau groupe, prove-

nant de la propriété additive de la tangente hyperbolique, comme nous le verrons un peu plus loin.

Les *vitesses homogènes* contiennent ce qu'il y a de vraiment nouveau dans la Théorie de la relativité, et qui est irréductible au dualisme éther-matière qu'on a essayé en vain, pendant un siècle, d'adapter aux phénomènes. Aussi convient-il de bien se rendre compte de la signification du nouvel algorithme. A cet effet, nous allons examiner les applications les plus importantes des formules ci-dessus. Nous commencerons par les formules (III). Les relations (II) trouvent leur signification dans l'expé-

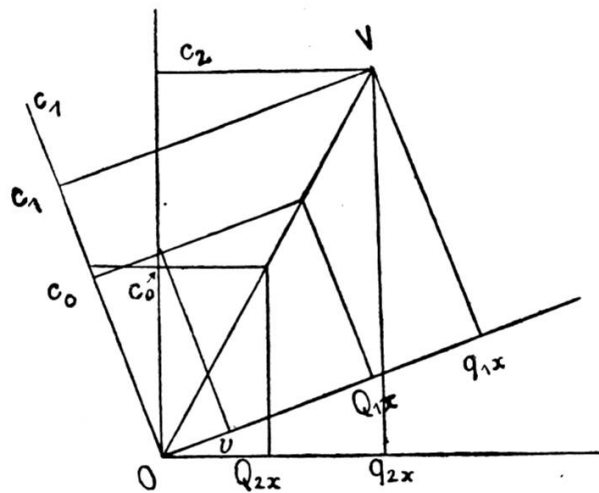


Fig. 3.

rience toute particulière de Michelson et Morley, dont nous parlerons plus tard.

Pour fixer les idées, considérons d'abord l'illustration la plus remarquable du système (III): la célèbre expérience de Fizeau sur l'entraînement « partiel » des ondes lumineuses par les milieux en mouvement.

Expérience de Fizeau. — Débutons par quelques remarques. Si l'on envisage un point X_1 et son conjugué X_2 , tous deux en mouvement uniforme dans leurs systèmes respectifs, nous aurons les relations

$$X_1 = Q_{1x}t ; \quad X_2 = Q_{2x}t ,$$

où Q_{1x} et Q_{2x} sont liés par la première des équations (III). On

voit qu'à l'instant $t = 0$, les points sont aux origines O_1 et O_2 , qui coïncident; puis ils se séparent, X_2 prenant de l'avance sur X_1 , et leur distance relative augmente proportionnellement au temps, le facteur de proportionnalité étant $\frac{vQ_{1x}Q_{2x}}{c_0}$. Si X_2 se

meut avec la vitesse de la lumière c_0 dans S_2 , il en sera de même de X_1 dans S_1 , L'écart entre les fronts lumineux est alors constamment égal à la distance $O_1O_2 = vt$ des origines des systèmes.

Cela dit, supposons que le système S_2 soit un milieu d'indice n . La vitesse de la lumière dans ce milieu, pour l'observateur lié au système S_2 , sera :

$$Q_{2x} = \frac{c_0}{n}.$$

Quant à S_1 , peu lui importe de savoir où sont « réellement » les ondes vues par S_2 . en entendant par là les positions que donnerait la Cinématique classique. Ce qui importe, c'est de savoir comment le train d'ondes va se comporter pour S_2 ; il y a alors une sorte de phénomène d'aberration, une « pseudo-aberration » dans les vitesses. En appliquant la première des formules (III), on trouve en effet :

$$Q_{1x} = \frac{\frac{c_0}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc_0}} = \frac{c_0}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

en négligeant les termes en v^2 . Et l'on voit que tout se passe pour S_1 comme s'il y avait *entraînement partiel* des ondes par le milieu en mouvement. On retrouve le coefficient d'entraînement de Fresnel.

Aberration. Phénomène de Doppler. — Si l'on pose :

$$\begin{aligned} Q_{1x} &= c_0 \cos \varphi_1 ; & Q_{2x} &= c_0 \cos \varphi_2 ; & Q_{1y} &= c_0 \cos \psi_1 ; \\ & & & & Q_{2y} &= c_0 \cos \psi_2 ; \dots \end{aligned}$$

on obtient en substituant dans (III) :

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{\cos \varphi_2 + \alpha}{1 + \alpha \cos \varphi_2} ; & \cos \psi_1 &= \frac{\cos \psi_2}{\beta(1 + \alpha \cos \varphi_2)} ; \\ \cos \gamma_1 &= \frac{\cos \gamma_2}{\beta(1 + \alpha \cos \varphi_2)} ; \end{aligned}$$

formules qui expriment l'aberration. On trouverait encore ces formules en identifiant deux vecteurs lumineux proportionnels à :

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda_1} (u_1 - l_1 x_1 - m_1 y_1 - n_1 z_1) ; \quad \sin \frac{2\pi}{\lambda_2} (u_2 - l_2 x_2 - m_2 y_2 - n_2 z_2),$$

où $l_1, m_1, n_1, l_2, \dots$ représentent, pour abrégé, les cosinus ci-dessus. On trouverait, en plus, la relation suivante entre les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 dans le vide par rapport à chacun des systèmes :

$$c_1 \lambda_1 = c_2 \lambda_2 .$$

Divisons cette équation par c_0 , et posons :

$$\frac{\lambda_1}{c_0} = \frac{1}{\nu_1} ; \quad \frac{\lambda_2}{c_0} = \frac{1}{\nu_2} ;$$

les fréquences ainsi définies satisfont à la relation remarquable :

$$\frac{c_1}{\nu_1} = \frac{c_2}{\nu_2}$$

qui exprime le phénomène de Doppler dans sa forme générale. Il est très satisfaisant, au point de vue physique, que ce phénomène soit rattaché aux variations de la vitesse de la lumière. Dans la théorie sous sa forme ordinaire, le phénomène de Doppler reste inexplicable.

Electrodynamique. — Les équations (I) et (III) laissent invariantes les équations du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz :

$$Q_{1x} \rho_1 + \frac{\partial X_1}{\partial u_1} = \frac{\partial N_1}{\partial y_1} - \frac{\partial M_1}{\partial z_1} , \dots$$

où X, Y, Z sont les composantes du champ électrique et L, M, N celles du champ magnétique; ρ est la densité électrique. L'application de la transformation conduit aux expressions connues :

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \beta(1 - \alpha Q_{1x}) \rho_1 , & X_2 &= X_1 , & Y_2 &= \beta(Y_1 - \alpha N_1) , \\ & & Z_2 &= \beta(Z_1 + \alpha M_1) , \end{aligned}$$

dont la première donne la relation remarquable

$$\frac{\rho_1}{c_1} = \frac{\rho_2}{c_2} ,$$

entre la densité électrique et la vitesse de la lumière.

Comme nous n'avons pas la contraction, le volume est un invariant, mais la *quantité d'électricité* n'en est pas un, contrairement à ce qui a lieu dans la théorie ordinaire. Pour une charge e_0 liée à S_2 , on a :

$$e_1 = \beta e_0 .$$

Equations de la Dynamique de l'électron. Accélération rapportées aux horloges-mères. — On établit ces équations par un passage à la limite. On suppose que la forme newtonienne :

$$\text{masse} \times \text{accélération} = \text{force}$$

est valable, et l'on cherche comment la masse du point varie avec la vitesse. Soient m_0 la masse, e_0 la charge d'un électron pour un observateur au repos par rapport au point, Γ_1 et Γ_2 les accélérations par rapport à S_1 et S_2 respectivement. Plaçons-nous sur S_1 et supposons que le point a la vitesse v à l'instant considéré; il est alors au repos relatif sur S_2 et coïncide avec son conjugué sur S_1 . Le problème consiste à chercher comment on peut passer des équations :

$$m_0 \Gamma_{2x} = e_0 X_2 ; \quad m_0 \Gamma_{2y} = e_0 Y_2 ; \quad m_0 \Gamma_{2z} = e_0 Z_2$$

valables pour S_2 , c'est-à-dire au repos, aux équations :

$$m_x \Gamma_{1x} = e_0 X_1 ; \quad m_y \Gamma_{1y} = e_0 Y_1 ; \quad m_z \Gamma_{1z} = e_0 Z_1$$

valables pour S_1 , c'est-à-dire lorsque le point est animé d'une vitesse v . Pour résoudre la question, dérivons par rapport à t , dans nos hypothèses, la première, la troisième et la quatrième des équations (II). On obtient simplement :

$$\gamma_{2x} = \beta \gamma_{1x} ; \quad \gamma_{2y} = \gamma_{1y} ; \quad \gamma_{2z} = \gamma_{1z} ,$$

où les γ désignent les dérivées des q par rapport à t . D'autre part, on a dans notre cas :

$$\beta c_2 = c_1 .$$

Pour avoir les accélérations Γ_1 et Γ_2 , rapportées à leurs horloges-mères respectives, il faut diviser les trois premières de ces relations par le carré de la quatrième, et, dans le résultat obtenu, remplacer c_1 et c_2 par c_0 , comme nous l'avons fait pour les vitesses. Cela donne :

$$\Gamma_{2x} = \beta^3 \Gamma_{1x} ; \quad \Gamma_{2y} = \beta^2 \Gamma_{1y} ; \quad \Gamma_{2z} = \beta^2 \Gamma_{1z} .$$

En tenant compte des relations ci-dessus, on en déduit les formules suivantes connues entre la masse au repos m_0 , la masse *longitudinale* m_x et la masse *transversale* m_y ou m_z :

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}} ; \quad m_y = m_z = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \alpha^2}} .$$

Ces relations sont bien vérifiées par l'expérience¹.

Expérience de Michelson et Morley. — Cette expérience tient une place spéciale et doit son importance à une question historique. Pour bien en fixer la signification, envisageons d'abord un phénomène très simple : la propagation des ébranlements lumineux émis par une certaine source. Cette propagation mesurée dans le système S_1 a la valeur c_0 ; mesurée dans le système S_2 , elle a également la valeur c_0 . Mais on peut se demander quelle est la valeur de la vitesse dans S_2 pour S_1 , compatible avec la théorie. Cette valeur spéciale n'est pas, bien entendu, directement accessible à l'expérience. L'expérience interrogée donnera toujours c_0 pour la vitesse de la lumière. Néanmoins, théoriquement, la question comporte une réponse. Voici comment le problème se pose. On installe sur le système S_2 des appareils pour faire une certaine expérience d'interférences. A cet effet, il y a un miroir à l'origine O_2 et deux autres miroirs M_x et M_y sur les axes x_2 et y_2 respectivement, à la même distance d de O_2 . Si des rayons lumineux vont et viennent entre ces miroirs, il est évident que l'intervalle de temps Δt_{2y} employé par un faisceau lumineux pour parcourir la distance $O_2 M_y O_2 = 2d$, est égale à l'intervalle de temps Δt_{2x} employé par le faisceau qui parcourt le chemin $O_2 M_x O_2 = 2d$, pour les observateurs entraînés avec S_2 , puisque la vitesse de la lumière est invariablement c_0 , et l'on a simplement :

$$\Delta t_{2x} = \Delta t_{2y} = \frac{2d}{c_2} = \frac{2d}{c_0} .$$

Y a-t-il encore égalité pour un observateur qui se trouverait sur S_1 et verrait passer les appareils devant lui ? Ce sont les équations (II) qui permettent de répondre à la question posée.

¹ GUYE, Ch.-Eug. et RATNOWSKI, S. *Arch.* 1911 ; GUYE, Ch.-Eug. et LAVANCHY, C. *Arch.* 1917.

Les deux premières donnent :

$$q_{2x} = \beta(q_{1x} - \alpha c_1) ; \quad c_2 = \beta(c_1 - \alpha q_{1x}) .$$

1° Faisceau $O_2 M_y O_2$. — Dans leur direction, on a :

$$q_{2x} = 0 ; \quad q_{1x} = \alpha c_1 = \alpha c_0$$

d'où :

$$c_{2y} = \beta c_0 (1 - \alpha^2) = \sqrt{c_0^2 - v^2}$$

donc :

$$\Delta t_{1y} = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}} .$$

2° Faisceau $O_2 M_x O_2$. — On a tout de suite, puisque dans ce cas

$$q_{1x} = c_1 = \pm c_0 ,$$

$$(c_2)_{+x} = \beta(c_0 - v) ; \quad (c_2)_{-x} = \beta(c_0 + v) ;$$

donc :

$$\Delta t_{1x} = \frac{d}{\beta} \left(\frac{1}{c_0 - v} + \frac{1}{c_0 + v} \right) = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}}$$

et l'on a bien

$$\Delta t_{1x} = \Delta t_{1y} .$$

Ainsi, non seulement les durées sont égales entre elles pour S_1 , mais elles sont données par les mêmes expressions que dans la théorie sous la forme habituelle. Suivant cette théorie, les longueurs sont « contractées » ; on applique la règle du parallélogramme — parce que les vitesses sont rapportées au *même* système de comparaison — et l'on remplace la longueur d par la longueur moindre $\frac{d}{\beta}$. Selon notre point de vue, les longueurs restent intactes, mais les vitesses ne s'additionnent plus selon la règle classique ; elles sont augmentées dans le rapport β . Les résultats sont identiques ; en particulier, les *durées* pour les observateurs liés à S_1 et ceux liés à S_2 sont *différentes* et conformes à ce que nous avons dit plus haut (page 295).

§ 4. — SIGNIFICATION PHYSIQUE DE LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ.

En conclusion, nous voyons qu'on peut répondre par l'affirmative à la question que nous nous étions posée : les résultats de la théorie de la relativité peuvent s'exprimer indifféremment

en temps local ou en temps universel. Les deux points de vue sont également justifiés et physiquement indiscernables. L'introduction d'un paramètre t pour exprimer le temps conduit de plus à des représentations simples :

1° Lorsque les points sont au repos relatif dans leurs systèmes respectifs, ces systèmes se meuvent comme des tous rigides ordinaires.

2° Lorsque les points sont en mouvement dans leurs systèmes, à un point de l'un correspond un *conjugué* dans l'autre. La correspondance est univoque et réciproque.

Il convient maintenant de voir s'il est possible d'attribuer une signification physique à la théorie sous sa nouvelle forme, en d'autres mots, s'il est possible de la stigmatiser par une *image* simple.

Commençons par quelques remarques. Lorsque deux systèmes S_1 et S_2 se meuvent conformément à la transformation galiléenne :

$$x_1 = x_2 + vt ,$$

nous disons qu'ils se meuvent comme des tous rigides ordinaires. De plus, nous postulons que les abscisses x_1 et x_2 se rapportent à deux points de S_1 et de S_2 , qui sont *au contact* à l'instant considéré, ou encore, imaginant quelque système absolument immobile, nous affirmons que ces abscisses concernent le « même » point de l'« Espace ». Or, rien ne nous oblige à tenir un pareil langage. Nous pouvons parfaitement admettre que l'équation précédente n'exprime qu'une *correspondance ponctuelle* entre les points des deux systèmes, indépendamment de leurs positions « réelles » dans l'Espace, c'est-à-dire conformes à celles du groupe euclidien, en supposant qu'elles soient déterminables. C'est ainsi par exemple que des observateurs enfermés dans un wagon et regardant passer un autre wagon sur une voie parallèle, ne verront pas celui-ci là où il est « réellement », s'ils font leurs observations à travers des milieux réfringents. Si les observateurs ne peuvent sortir de leur wagon et faire des expériences qui permettent de repérer les positions relatives des wagons conformément aux règles de la Mécanique classique, ils en seront réduits à considérer comme « réelles » les positions que nous appelons « apparentes ».

D'autre part, envisageons la règle de composition des vitesses (III). Au premier abord, on pourrait se demander s'il ne serait pas possible de ramener cette règle à une règle d'addition linéaire, en se plaçant dans un espace à courbure convenable. On sait que lorsqu'on substitue les arcs aux tangentes, on obtient une semblable règle. Mais, si précieuse que soit cette transformation pour l'analyste, elle n'intéresse guère le physicien. L'expérience cruciale de Fizeau, à laquelle il faut toujours revenir, est l'expression concrète immédiate du théorème d'addition (III), et non pas de l'addition des arcs.

Quoi qu'il en soit, imaginons pour un instant qu'on ait résolu le problème, et qu'on ait trouvé un espace courbe tel que les tangentes elles-mêmes s'y additionnent linéairement. Qu'en résulterait-il? On voit aisément que nous retomberions sur l'une de ces difficultés essentielles que nous nous sommes justement proposé d'écartier ici en supprimant la « contraction » de Lorentz. En effet, les observateurs dans chacun des systèmes peuvent mesurer ceux-ci, déterminer les angles, comparer les longueurs, etc., et, par définition même, le résultat de leur étude ne pourrait les conduire qu'à une seule conclusion : les systèmes de coordonnées sont des systèmes trirectangles euclidiens. Dès lors, il faudrait admettre que les systèmes « apparaissent » euclidiens, tandis qu'ils ne le seraient pas « en réalité », conséquence qui répugne au même titre que la « contraction » de Lorentz¹.

¹ C'est M. Ehrenfest qui, avec son célèbre *paradoxe*, a le mieux montré à quelle bizarrerie mène l'introduction du temps relatif et de sa compagne la « contraction ». On sait que ce paradoxe est présenté par un cercle tournant uniformément autour de son centre ; les éléments périphériques, dirigés dans la direction du mouvement, subissent la « contraction », tandis que les éléments radiaux conservent leurs longueurs, puisqu'ils sont perpendiculaires au mouvement. Il en résulte une figure inintelligible pour tout observateur non entraîné avec le cercle. Car l'observateur se forme sa représentation en parcourant *instantanément*, par la pensée, tout l'espace, alors que les mesures, conformément aux formules, sont basées sur le « temps relatif », c'est-à-dire sur l'impossibilité de créer des vitesses supérieures à une limite fixe (cf. p. 306). Seule l'introduction du temps universel résout le conflit en supprimant la « contraction », partant, le paradoxe. Quant à invoquer le champ de forces centrifuges pour expliquer le paradoxe, c'est là un argument que nous ne saurions accepter. N'entrent en jeu ici, en effet, que la transformation de Lorentz, c'est-à-dire des considérations de cinématique pure.

Il faut donc trouver autre chose.

Pour simplifier, bornons-nous à des systèmes linéaires, en supposant que ceux-ci se réduisent aux axes O_1x_1 et O_2x_2 , et considérons la première des équations (III). A première vue, il semble que la vitesse v y joue un rôle privilégié. Pour bien montrer qu'il n'en est rien et que la relativité est sauvegardée, c'est-à-dire que nous avons à faire à un groupe, il suffit de poser :

$$\alpha = Q_{12} ; \quad \frac{Q_{2x}}{c_0} = Q_{23} ; \quad \frac{Q_{1x}}{c_0} = Q_{31} .$$

Nous avons alors trois systèmes S_1, S_2, S_3 , dont les vitesses relatives sont Q_{12}, Q_{23}, Q_{13} , liées par la formule :

$$Q_{31} = \frac{Q_{12} + Q_{23}}{1 + Q_{12} \cdot Q_{23}} \quad (Q_{ij} = Q_{ji}) ,$$

qui montre effectivement qu'aucune d'elles ne joue un rôle spécial. Entre deux quelconques des systèmes, on peut établir une *correspondance* telle qu'ils se meuvent l'un pour l'autre comme des tous rigides ordinaires, conformément aux relation :

$$\left. \begin{aligned} X_{1.2} &= X_{2.1} + Q_{12} t \\ X_{2.3} &= X_{3.2} + Q_{23} t \\ X_{3.1} &= X_{1.3} + Q_{31} t \end{aligned} \right\} \quad (X_{i,j} \neq X_{j,i}) .$$

A ces trois formules correspondent trois *représentations* différentes, selon le système sur lequel on se suppose placé. Reprenons pour un instant l'expérience de Fizeau. Le milieu réfringent, consistant en un courant d'eau, forme le système S_2 , tandis que les parois du tube parcouru par le courant et liées aux appareils optiques composent le système S_1 ; le système S_3 est alors formé des ondes lumineuses qui cheminent dans l'eau. La position de ce dernier système, à un instant donné, est *différente*, selon qu'on le considère dans ses relations avec S_2 ou avec S_1 ; il y a « aberration », dirons-nous, et pour S_1 tout se passe comme s'il y avait « entraînement partiel », tandis que pour S_2, S_3 est totalement entraîné.

Or, ce que nous venons de dire du train d'onde peut — en vertu de la symétrie des formules — être répété exactement soit pour l'eau, soit pour les parois du tube, selon le système sur le-

quel on se suppose placé. Ceci exige, physiquement, qu'il n'y ait pas de différence essentielle entre la nature des ondes lumineuses et celle de la matière, liquide ou solide. Et en effet, dans la Théorie de la relativité, la masse matérielle est variable avec la vitesse relative, et l'énergie possède de la masse d'inertie. Ainsi s'évanouit le dualisme éther-matière, d'une part, et, d'autre part, l'idée primitive de la matière considérée comme un tout parfaitement délimité et éternellement immuable. L'interprétation que nous proposons s'accorde donc bien avec les conclusions généralement admises dans la théorie.

Nous pouvons faire un pas de plus et symboliser d'un mot la signification physique de celle-ci. Les équations (III) représentent l'*aberration*, lorsque le système S_3 se compose de rayons lumineux, comme nous l'avons vu plus haut. Si nous nous plaçons sur ces rayons S_3 , l'ensemble des systèmes S_1 et S_2 offrira une certaine configuration, et comme nous admettons que notre système S_3 ne diffère pas essentiellement, quant à sa nature, des systèmes S_1 et S_2 , nous pourrions encore dire que ceux-ci présentent, pour nous, une certaine *aberration*. Généralisant ainsi la notion d'aberration, nous parviendrons à la conclusion fondamentale suivante :

La Théorie de la relativité exprime, physiquement, une aberration généralisée.

La figure 4 montre, dans le cas spécial envisagé, les trois configurations que forme l'ensemble des systèmes S_1 , S_2 , S_3 les uns par rapport aux autres, selon le système sur lequel on se place. Il est aisé de voir que les 3 cas représentés correspondent aux 3 bissectrices $t = 0$ des angles x_1Ox_2 , x_2Ox_3 , x_3Ox_1 du graphique analogue à celui de la fig. 1 et établi pour 3 systèmes. Nous laissons au lecteur le soin de faire les figures dans le cas plus général de l'aberration astronomique (p. 315), où les systèmes sont la Terre, une étoile et un rayon lumineux.

« Aberration » signifie phénomène qui met en évidence les mouvements autrement qu'ils ne s'effectuent « réellement ». Nous pouvons dire que les positions relatives des systèmes, exigées par la Théorie de la Relativité, sont les positions *actives* pour tous les phénomènes classifiés par cette théorie. Il s'introduit ainsi une nouvelle relativité, qu'on appellera, si l'on veut, « re-

lativité de la localisation », mais qui a un sens concret facilement accessible, ce qui n'est pas le cas pour la « contraction ». Quelles sont maintenant les positions « réelles » des systèmes, c'est-à-dire conformes à la cinématique euclidienne ? Il est bien évident qu'il ne peut y avoir aucun phénomène rentrant dans le cadre de la théorie et permettant de répondre à cette question. Mais rien n'empêche d'espérer qu'on découvrira un jour quelque phénomène entièrement étranger à la théorie et qui rendra possible la solution de la question. On sait, par exemple, que la vitesse de propagation d'une discontinuité dans l'air est supérieure à la propagation du son. Peut-être trouvera-t-on le moyen de créer des ébranlements se propageant dans le vide

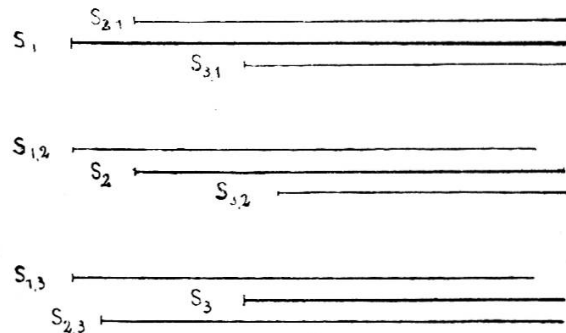


Fig. 4.

bien plus rapidement que les perturbations électro-magnétiques. La théorie de ces nouveaux phénomènes nous conduirait alors à assigner des positions « actives » aux systèmes de référence, différentes de celles qu'exige la Théorie de la Relativité. Si, de proche en proche, nous étions capables de produire ainsi des ébranlements animés de vitesses de plus en plus grandes, nous pourrions arriver à assigner aux systèmes des positions actives de plus en plus voisines de celles que postule la cinématique euclidienne, qui correspond au corps solide parfait et à la possibilité d'échanger des signaux avec une vitesse infinie. A la limite, les trois configurations offertes par l'ensemble des systèmes S_1 , S_2 , S_3 se confondraient en une seule, comme c'est le cas dans la Mécanique classique. Du reste, pratiquement, la vitesse de la lumière est déjà si grande vis-à-vis des vitesses mécaniques, que les trois figures ci-dessus diffèrent très peu les unes des autres.

Mais, théoriquement, nous ne serons satisfaits que lorsque nous aurons atteint le *cas limite*, car ce n'est qu'à ce moment-là que nous pourrons affirmer que nous possédons une image de l'Univers répondant sans restriction au principe de solidification. Dans ce cas, en effet, on obtiendra toujours la même configuration pour l'Univers entier, quel que soit le mouvement du système sur lequel on se trouve à l'instant t de la solidification.

Dans la Mécanique des milieux continus on envisage déjà trois sortes d'opérations : la *translation*, la *rotation* et la *déformation*. Par les considérations développées ici, nous ajoutons une quatrième et nouvelle opération aux précédentes : l'*aberration*. Dans la Théorie de la Relativité, les systèmes subissent une aberration *sans* déformation. On peut se demander si, dans la généralisation proposée par Einstein pour englober les phénomènes de gravitation, l'aberration *avec* déformation suffira à la description des phénomènes, ou s'il y aura lieu d'introduire encore de nouvelles opérations.

CONCLUSION.

Résumant les résultats de notre étude, nous voyons que l'introduction du Temps universel dans la Théorie de la Relativité permet de substituer aux concepts très abstraits de « temps relatif » et de « contraction » de Lorentz, les notions physiques claires de phénomènes de Doppler pour la marche des horloges et d'aberration pour la localisation des systèmes, lesquels se meuvent deux à deux comme des tous rigides euclidiens indéformés¹.

¹ Faisons remarquer que cette importante conclusion délivre la Physique des corps « relativement » solides, « relativement » élastiques, etc., qu'on avait dû inventer pour satisfaire au temps « relatif ».
