

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 46 (1918)

Artikel: Sur la théorie du Couronoïde
Autor: Cailler, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-743167>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LA
THÉORIE DU COURONOÏDE

PAR

C. CAILLER

§ 1. — Les pages suivantes se rattachent à l'article paru dans le dernier numéro des *Archives*¹ sur les rapports existant entre la Géométrie non euclidienne de Riemann et la Cinématique des figures sphériques mobiles à la surface de leur propre sphère. Le but de ce travail était de mettre en évidence l'identité substantielle des deux théories.

Pour y parvenir il a fallu toutefois modifier sur un point essentiel la physionomie de la Cinématique classique. Celle-ci, en fait de mouvements, ne connaît que ceux par le moyen desquels la figure solide se déplace sur la sphère: elle ignore les *antidéplacements* qui font correspondre à toute figure une autre figure solidairement liée à la première. Il faut mettre sur pied d'égalité ces deux catégories de *mouvements*: c'est seulement après avoir composé un groupe général, avec les deux sous-groupes des *déplacements* et des *antidéplacements* de la figure sphérique, qu'il sera permis d'identifier la Cinématique et la Géométrie de l'espace E_3' .

Parmi les avantages de ce passage à l'espace E_3' , j'ai déjà signalé la possibilité d'un classement rationnel des mouvements à la surface de la sphère. C'est évidemment le *degré* de la courbe ou de la surface représentatives du mouvement dans E_3' , qui fournira la mesure de la simplicité.

A ce point de vue, la rotation autour d'un centre fixe, étant

¹ *Arch.* 1918, vol. 46, p. 119-150.

représentée par une droite de E_g'' , constitue le mouvement le plus simple à un degré de liberté: il y a ici accord entre les anciennes et les nouvelles conceptions. Quant aux mouvements à deux degrés de liberté, la Cinématique ordinaire les relègue au second plan, et ne sait rien du plus simple d'entre eux, le *Couronoïde*.

Peut-être, en raison même du rôle important dévolu au couronoïde dans toute la théorie, n'est-il pas hors de propos d'insister quelque peu, ne fût-ce que pour expliquer une difficulté singulière qu'on rencontre quand on aborde la théorie par la voie analytique élémentaire. On prend alors, et tout naturellement, pour point de départ la définition du couronoïde donnée par M. de Saussure, la seule valable en Géométrie plane, suivant laquelle *le couronoïde est le lieu de toutes les flèches qui sont réflexes d'une flèche fixe par rapport aux grands cercles de la sphère*.

Or le calcul indique d'abord que le couronoïde ainsi défini attache *deux* flèches à chaque point, et non pas une seule: ce résultat paradoxal, contraire à la construction géométrique, provient du fait que l'équation qui s'offre la première pour traduire la définition précédente représente en réalité l'ensemble de deux couronoïdes conjugués au lieu d'un seul couronoïde. C'est ce que je me propose de montrer tout d'abord.

§ 2. — Une flèche est l'association de deux points x et y , rangés dans un certain ordre, dont l'un fait fonction d'origine, l'autre d'extrémité de la flèche. Comme la longueur de la flèche est arbitraire, rien n'empêche de prendre la distance sphérique xy toujours égale à un quadrant. Nous définissons donc la flèche xy par les formules

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 ,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 ,$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0 ,$$

qui traduisent ces différentes conditions.

Avec la précédente, prenons une nouvelle flèche $x'y'$, et demandons-nous comment on reconnaît que les deux flèches sont

réflexes, autrement dit, symétriques relativement à un grand cercle de la sphère.

A une même distance s des origines respectives, prenons sur chaque flèche un point X , ou X' . Nous avons¹ :

$$X = x \cos s + y \sin s ,$$

$$X' = x' \cos s + y' \sin s ;$$

le milieu ξ des points X et X' est déterminé par les formules

$$\rho \xi = (x + x') \cos s + (y + y') \sin s ,$$

où ρ représente un facteur scalaire de proportionnalité.

Le lieu des points ξ , quand s varie, est évidemment un arc de grand cercle, dont le pôle est placé sur la sphère dans la direction du vecteur

$$[x + x', y + y'] .$$

D'autre part, le pôle de l'arc xx' , est placé suivant le vecteur $[xx']$. Pour que les flèches (x, y) et (x', y') soient réflexes, il faut que les pôles des deux arcs précédents soient à la distance d'un quadrant. On doit donc avoir :

$$([x + x', y + y'], [x, x']) = 0 ,$$

équation qui moyennant quelques réductions faciles peut s'écrire sous la forme :

$$\Sigma x(x + x') \Sigma x'(y + y') = \Sigma x(y + y') \Sigma x'(x + x')^2 .$$

Or, on a

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2 = 1 , \Sigma x'^2 = \Sigma y'^2 = 1 , \quad (1)$$

$$\Sigma xy = \Sigma x'y' = 0 . \quad (2)$$

Par suite, la relation ci-dessus se réduit à

$$(1 + \Sigma xx') (\Sigma x'y - \Sigma xy') = 0 .$$

On voit aisément que la condition $\Sigma xx' = -1$ peut être né-

¹ Ces formules, et la plupart des suivantes, possèdent une signification vectorielle; dans chaque équation, on peut mettre au pied de chacune des lettres x, x', X , etc., l'indice 1, 2, ou 3, le même pour toutes les lettres.

² Les sommes sont relatives aux diverses coordonnées de chaque point ou vecteur.

gligée, et ainsi, pour que les deux flèches soient réflexes, il faut avoir :

$$(x'y) = (xy') ; \quad (3)$$

cette équation sera donc celle du couronoïde, si on y considère x' , et y' comme donnés et constants¹. Nous allons voir que cette condition peut se décomposer en deux autres².

A cet effet, considérons l'expression

$$\Delta = 1 - (xx')^2 - (xy')^2 = 1 - (xx')^2 - (x'y)^2 ,$$

ou

$$\Delta = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3)^2 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 .$$

En vertu de (1) et (2), x' , y' sont deux vecteurs unités rectangulaires; donc nous pouvons écrire sous forme carrée

$$\Delta = \{ x_1 [x'y']_1 + x_2 [x'y']_2 + x_3 [x'y']_3 \}^2 , \quad (4)$$

et aussi, en raison de la symétrie qui existe entre les lettres accentuées et les lettres simples

$$\Delta = \{ x'_1 [xy]_1 + x'_2 [xy]_2 + x'_3 [xy]_3 \}^2 . \quad (5)$$

Egalons les deux valeurs de $\sqrt{\Delta}$, tirées de (4) et (5), nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y_1 \pm y'_1 & y_2 \pm y'_2 & y_3 \pm y'_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

De là résulte que si les flèches sont réflexes, on doit avoir, soit les équations vectorielles

$$y + y' = ax + bx' , \quad (6)$$

soit encore

$$y - y' = cx - dx' , \quad (7)$$

a, b, c , et d étant certains scalaires inconnus.

¹ Pour abrégé, j'écris par exemple (xx') au lieu de $x_1x'_1 + x_2x'_2 + x_3x'_3$.

² Les équations $\Sigma y^2 = 1$, $\Sigma xy = \Sigma x'y'$, $\Sigma x'y = \Sigma xy'$, où les y sont les inconnues, les autres lettres étant données, forment un système du second degré. Il y a donc, ce semble, deux flèches y attachées à chaque point x par le couronoïde; c'est le paradoxe dont j'ai parlé plus haut.

Admettons, par exemple, le système (6); multiplions-le scalairement par $x - x'$, et employons les relations (1) et (2), il vient :

$$(xy') - (x'y) = (a - b)(1 - (xx')) .$$

En vertu de (3) le premier membre est nul, tandis que, en général, (xx') est différent de l'unité. Ainsi on a $a = b$, et (6) s'écrit en réalité

$$y + y' = a(x + x') . \quad (8)$$

La même méthode, appliquée à la seconde équation vectorielle (7), montre qu'elle doit être de la forme

$$y - y' = c(x - x') . \quad (9)$$

La détermination des facteurs de proportionnalité a et c qui figurent dans ces formules est immédiate. Par exemple, en multipliant scalairement la relation (8) par x , il vient

$$(xy') = a(1 + (xx')) .$$

D'où

$$a = \frac{(xy')}{(xx') + 1} .$$

Exactement de la même manière, nous trouvons

$$c = \frac{(xy')}{(xx') - 1} .$$

A l'inspection de la formule (8), il est évident qu'elle traduit la condition pour que les flèches (x, y) et (x', y') soient *conjuguées*, ou symétriques par rapport à un certain centre; ce dernier occupe la position moyenne entre les points d'application des deux flèches.

De même, la relation (9) exprime que la flèche (x, y) est conjugée à l'*inverse* de l'autre; ces flèches sont donc *réflexes* l'une de l'autre, ou symétriques relativement à un certain arc de grand cercle.

Et ainsi la formule

$$(xy') = (x'y)$$

correspond à la double condition¹; cette relation représente à

¹ Il est facile de le constater également par la Géométrie.

la fois deux couronoïdes. L'un de ces couronoïdes admet la flèche fixe (x', y') comme flèche polaire, l'autre comme flèche réflexe.

La décomposition de la relation (3) en deux équations distinctes est d'ailleurs une conséquence directe des formules de Rodrigues.

Si on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2, & y_1 &= 2(e_1 e_2 - e_0 e_3), \\ x_2 &= 2(e_1 e_2 + e_0 e_3), & y_2 &= e_0^2 + e_2^2 - e_1^2 - e_3^2, \\ x_3 &= 2(e_1 e_3 - e_0 e_2), & y_3 &= 2(e_2 e_3 + e_0 e_1), \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} x'_1 &= e_0'^2 + e_1'^2 - e_2'^2 - e_3'^2, & y'_1 &= 2(e'_1 e'_2 - e'_0 e'_3), \\ x'_2 &= 2(e'_1 e'_2 + e'_0 e'_3), & y'_2 &= e_0'^2 + e_2'^2 - e_1'^2 - e_3'^2, \\ x'_3 &= 2(e'_1 e'_3 - e'_0 e'_2), & y'_3 &= 2(e'_2 e'_3 + e'_0 e'_1), \end{aligned}$$

on trouve, par un calcul facile,

$$(x'y) - (xy') = 2(e_0 e'_0 + e_1 e'_1 + e_2 e'_2 + e_3 e'_3) (e_0 e'_3 - e_1 e'_2 + e_2 e'_1 - e_3 e'_0).$$

L'annulation des deux facteurs du second membre fournit les deux couronoïdes représentés respectivement par les formules (8) et (9).

§ 3. — Le couronoïde attache une flèche à chaque point de la sphère; on peut donc distribuer ces ∞^2 points le long de ∞^1 courbes, de telle manière que la flèche attachée à l'un quelconque d'entre eux soit toujours dirigée suivant la tangente à la courbe de la famille qui contient ce point: les dites courbes sont les *trajectoires* du couronoïde. Comme on sait, ces trajectoires sont des cercles tangents entre eux en un point fixe¹.

Les calculs développés plus haut fournissent d'ailleurs un moyen très rapide de retrouver ces trajectoires.

¹ Je ne crois pas utile de reproduire ici la figure du couronoïde. Le lecteur est prié de faire lui-même le dessin appuyant les explications qui suivent.

Prenons l'équation du couronoïde sous la forme (9), ou

$$y - y' = \frac{(xy')}{(xx') - 1} (x - x') ,$$

et représentons en X_1, X_2, X_3 les traces sur la sphère des trois axes coordonnés. La position de la flèche fixe $f' (x', y')$ étant arbitraire, supposons cette flèche appliquée suivant $X_1 X_2$, son origine étant en X_1 , son extrémité en X_2 . Nous avons ainsi

$$x' = (1, 0, 0) , \quad y' = (0, 1, 0) .$$

Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point de la sphère, ou

$$x_1 = \cos r , \quad x_2 = \sin r \cos \theta , \quad x_3 = \sin r \sin \theta ;$$

si ce point est l'origine d'une flèche, ds l'élément d'arc de la trajectoire, les coordonnées de l'extrémité de la même flèche seront

$$y_1 = \frac{d(\cos r)}{ds} , \quad y_2 = \frac{d(\sin r \cos \theta)}{ds} , \quad y_3 = \frac{d(\sin r \sin \theta)}{ds} .$$

De plus

$$(xx') = \cos r , \quad (xy') = \sin r \cos \theta , \quad \frac{(xy')}{(xx') - 1} = -\cot \frac{r}{2} \cos \theta ;$$

les équations différentielles, compatibles entre elles, des trajectoires sont ainsi

$$\frac{d \cos r}{ds} = -\cot \frac{r}{2} \cos \theta (\cos r - 1)$$

$$\frac{d(\sin r \cos \theta)}{ds} - 1 = -\cot \frac{r}{2} \cos \theta \cdot \sin r \cos \theta ,$$

$$\frac{d(\sin r \sin \theta)}{ds} = -\cot \frac{r}{2} \cos \theta \sin r \sin \theta .$$

En divisant la première de ces formules par la troisième nous trouvons

$$\frac{d(1 - \cos r)}{d(\sin r \sin \theta)} = \frac{1 - \cos r}{\sin r \sin \theta} ;$$

d'où, par intégration,

$$1 - \cos r = a \sin r \sin \theta ,$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} r = a \sin \theta ,$$

formule qui représente ∞^1 cercles tangents à l'arc $\overline{X_1 X_2}$ au point X_1 ; les *trajectoires* affectent bien la forme qu'on leur connaît d'autre part.

§ 4. — La Cinématique des lamelles mobiles à la surface d'une sphère est susceptible d'être prolongée suivant deux directions contraires, dans le sens extensif et dans le sens restrictif.

J'ai déjà indiqué précédemment¹ en vertu de quelles considérations la Cinématique de la figure sphérique comprend celle du solide invariable se mouvant librement dans l'espace. Le solide, quelle qu'en soit la forme, peut toujours se remplacer par un *feuillet*, et le feuillet lui-même est toujours assimilable à une flèche dont les deux points extrêmes se sont convertis en droites par le passage du réel à l'imaginaire². Je ne reviens pas sur ce point aujourd'hui.

La seconde généralisation sur laquelle je désire, au contraire, m'arrêter quelque peu est relative à la Cinématique des figures planes se déplaçant sur leur propre plan. Par rapport à la Cinématique des figures sphériques, celle-ci n'est qu'une simple dégénérescence; pour arriver au nouveau cas, il faut, par un passage à la limite, raisonner sur une portion infiniment petite de la sphère.

Bien entendu cette hypothèse relative à l'extension démesurément réduite du corps solide mobile doit être poursuivie d'une manière conséquente; et cela ne va pas toujours sans certains embarras. Citons-en un exemple particulièrement gênant.

De toutes les définitions du couronoïde sphérique, la plus naturelle est celle qui en fait le lieu des flèches conjuguées à une certaine flèche fixe. Dans le passage au couronoïde plan,

¹ *Arch.* 1918, t. 46, p. 122 et 123.

² Les points *imaginaires* de la Géométrie ponctuelle sont les droites *réelles* de la Géométrie réglée. Quand l'espace est euclidien, l'unité imaginaire vérifie la condition $i^2 = 0$.

cette définition devient inapplicable: elle exige en effet que le centre de rotation autour duquel doit chavirer la flèche du couronoïde pour s'appliquer sur la flèche fixe soit à une distance infiniment petite de cette dernière. On n'obtient de la sorte, pour le couronoïde plan, qu'une forme particulière¹.

C'est la raison pour laquelle on en est réduit, dans le cas du plan, à considérer le couronoïde comme le lieu des flèches réflexes d'une flèche fixe, soit encore comme l'ensemble des couronnes ayant une flèche commune et dont les centres décrivent une droite du plan. La même raison fait disparaître la notion des couronnes *conjuguées*, et ne laisse subsister que celle des couronnes *réflexes*².

Ce cas de la Cinématique de la figure plane se mouvant dans son plan est assez important pour qu'il vaille la peine d'indiquer la forme limite que présente la théorie analytique: ce sont les transformées des formules de Rodrigues qui joueront naturellement ici le rôle principal.

§ 5. — Sur le plan de la figure, traçons deux axes coordonnés X_1X_2 et X_1X_3 orthogonaux entre eux, et soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées *homogènes* d'un point M, de manière que $\frac{x_2}{x_1}$ représente l'abscisse, $\frac{x_3}{x_1}$ l'ordonnée du dit point³.

Soient, d'autre part, trois unités complexes i_1, i_2, i_3 jouissant des propriétés suivantes

$$\left. \begin{aligned} i_1^2 &= -1, i_2^2 = 0, i_3^2 = 0; \\ i_1i_2 &= -i_2i_1 = i_3; i_3i_1 = -i_1i_3 = i_2; i_2i_3 = i_3i_2 = 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

Faisons correspondre au point M un vecteur du type

$$\xi = x_1i_1 + x_2i_2 + x_3i_3$$

¹ Toutes les flèches de ce couronoïde particulier sont parallèles entre elles: c'est le cas où le point de contact des trajectoires du couronoïde est transporté à l'infini.

² Sur ce point la nomenclature s'écarte de celle adoptée par M. R. de Saussure.

³ Le lecteur est prié de s'aider d'un croquis.

et à un mouvement du plan sur lui-même un *quaternion* du type

$$p = p_0 + i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3 . \quad (11)$$

Voici la définition de ce dernier. Si ω est la *grandeur*¹ d'une rotation qui s'exécute autour d'un point d'abscisse c_2 , d'ordonnée c_3 , nous avons

$$p_0 = \cos \omega , p_1 = \sin \omega , p_2 = c_2 \sin \omega , p_3 = c_3 \sin \omega ; \quad (12)$$

si, au lieu d'être rotatif, le mouvement était translatif, et que le glissement fût parallèle et égal au vecteur $2a_2, 2a_3$, il faudrait écrire à la place de (12)

$$p_0 = 1 , p_1 = 0 , p_2 = -a_3 , p_3 = a_2 . \quad (13)$$

Dans les deux cas, le *quaternion* (11) est *unimodulaire*, ce qui veut dire qu'on a dans le cas actuel

$$p_0^2 + p_1^2 = 1 .$$

Cela posé, la formule du mouvement sur la sphère est encore applicable ici, et l'on a de nouveau, dans le cas du plan,

$$\xi' = p \xi \bar{p} . \quad (14)$$

Tout calcul fait, les formules de changement d'axes qui viennent se substituer aux formules de Rodrigues se présentent à nous comme suit

$$\begin{aligned} x'_1 &= (p_0^2 + p_1^2) x_1 = x_1 \\ x'_2 &= 2(p_1 p_2 + p_0 p_3) x_1 + (p_0^2 - p_1^2) x_2 - 2p_0 p_1 x_3 , \\ x'_3 &= 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) x_1 + 2p_0 p_1 x_2 + (p_0^2 - p_1^2) x_3 . \end{aligned}$$

La *translation* et la *rotation* des axes coordonnés sont traitées dans ces équations d'une manière toute semblable, il n'y a pas à distinguer entre elles.

On trouve immédiatement, comme une conséquence des formules qui précèdent, celles qui fournissent la transformation des coordonnées linéaires homogènes d'une droite (u_1, u_2, u_3) ; ce sont

¹ ω est donc égal à la *moitié* de l'angle de la rotation.

$$\begin{aligned} u'_1 &= (p_0^2 + p_1^2) u_1 + 2(p_1 p_2 - p_0 p_3) u_2 + 2(p_1 p_3 + p_0 p_2) u_3, \\ u'_2 &= (p_0^2 - p_1^2) u_2 - 2p_0 p_1 u_3, \\ u'_3 &= 2p_0 p_1 u_2 + (p_0^2 - p_1^2) u_3. \end{aligned}$$

La non conformité de ces deux systèmes, relatifs aux points et aux droites, est un des embarras dont j'ai parlé plus haut : ils rendent à certains égards la théorie des flèches plus complexe dans le plan que sur la sphère¹.

§ 6. — Il est clair désormais qu'ayant choisi une flèche initiale f_0 pour compléter le système de repères, toute autre flèche du plan est caractérisée, relativement à (S, f_0) , par le mouvement qui amène f_0 sur f ; autrement dit la flèche f est représentée analytiquement à l'aide du quaternion

$$\eta = e_0 + i_1 e_1 + i_2 e_2 + i_3 e_3,$$

soit de ses composantes e_h .

Quand on changera le système de repères, les coordonnées d'une flèche déterminée se transformeront suivant la formule

$$\eta' = r \eta s.$$

Enfin la rotation qui conduit une flèche η sur une autre η' a pour représentant le quaternion

$$\eta' \bar{\eta}.$$

Jusqu'ici, l'analogie avec la sphère est parfaite, les différences des deux cas semblent inexistantes. Pour les mettre en évidence il suffit toutefois d'opposer à la forme ancienne de l'invariant de deux flèches, à quatre termes, la forme actuelle, à deux termes seulement.

Cet invariant est égal à la partie scalaire de la quantité $\eta' \bar{\eta}$; en vertu des lois de composition contenues dans les for-

¹ Il est aisé de reconnaître l'existence d'un *invariant* relatif à deux points, c'est $(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2$, ou sous forme homogène, $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_3 y_1 - y_3 x_1)^2$. Les coordonnées linéaires u_1, u_2, u_3 sont respectivement égales aux déterminants $x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1$, et u_2, u_3 subissent évidemment une transformation orthogonale.

mules (10), cette partie scalaire vaut

$$e_0 e'_0 + e_1 e'_1 . \quad (15)$$

Qu'on projette donc les faits de la Cinématique plane dans un espace E'_3 : à une flèche correspondra un point de cet espace, de manière que le point et la flèche possèdent les mêmes coordonnées¹.

Mais l'espace E'_3 est un espace non euclidien *dégénéré*; il n'appartient ni au type de Riemann, ni au type de Lobatchewsky ainsi que le fait voir l'équation de sa quadrique fondamentale

$$e_0^2 + e_1^2 = 1 .$$

La propriété métrique d'un tel espace, qui remplacera la relation trigonométrique de E'_3 , se déduit immédiatement de la forme de l'invariant (15).

Supposons que la flèche initiale f_0 subisse successivement deux rotations d'amplitude α et α' . Nous aurons

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \alpha , & e_1 &= \sin \alpha , \\ e'_0 &= \cos \alpha' , & e'_1 &= \sin \alpha' , \end{aligned}$$

et de là

$$e_0 e'_0 + e_1 e'_1 = \cos (\alpha - \alpha') .$$

Par suite, en revenant à l'espace E'_3 ; *si un point P_0 décrit deux segments de droites, de grandeurs respectives α et α' , la distance qui sépare les positions finales est égale à $\alpha - \alpha'$, cela quel que soit l'angle des deux segments.*

§ 7. — La propriété précédente est évidemment analogue à celle qui appartient aux angles d'un triangle dans l'espace euclidien; mais, dans l'espace E'_3 , elle concerne les *côtés* du triangle, et forme le point de départ de la Géométrie de cet espace, laquelle fait pendant à la Cinématique de la figure plane mobile dans son plan.

Mais je remets à une autre occasion l'étude de cette Géométrie

¹ En vertu de la relation (14), la correspondance reste inaltérée quand on change le système de repères.

particulière, et je reviens à la théorie du couronoïde plan pour présenter une remarque à son sujet.

Au point de vue géométrique, il est évident que le couronoïde plan et la couronne correspondent au plan et à la droite de l'espace E'_3 ; mais la forme *binôme* de l'invariant

$$e_0 e'_0 + e_1 e'_1 = 0, \quad (16)$$

entraîne pour la théorie analytique de ces figures une petite difficulté, qu'il est d'ailleurs facile de tourner.

L'équation générale du couronoïde est celle d'un polynôme du premier degré à quatre termes

$$a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0, \quad (17)$$

elle ne saurait être assimilée à (16) que dans des cas particuliers: ce n'est donc qu'exceptionnellement, ainsi qu'on l'a vu plus haut, que le couronoïde plan se présente comme le lieu des flèches conjuguées d'une flèche fixe. Et il reste à trouver l'interprétation géométrique d'une relation telle que (17).

Mais il est clair que le couronoïde (17) admet, en fonction de trois quelconques des flèches qui y sont contenues, une représentation paramétrique du type

$$\eta = l_1 \eta_1 + l_2 \eta_2 + l_3 \eta_3, \quad (17')$$

l_1, l_2, l_3 désignant trois scalaires quelconques.

De même la couronne, définie comme l'intersection de deux couronoïdes, se représentera paramétriquement à l'aide de deux flèches qui y sont contenues, comme suit

$$\eta = l_1 \eta_1 + l_2 \eta_2. \quad (17'')$$

Les formules précédentes (17'') et (17') donnent ensuite

$$[\eta_1 \bar{\eta}] = l_2 [\eta_1 \bar{\eta}_2], \quad (18)$$

et

$$[\eta_1 \bar{\eta}] = l_2 [\eta_1 \bar{\eta}_2] + l_3 [\eta_1 \bar{\eta}_3], \quad (19)$$

dont l'interprétation est immédiate.

Suivant (18), l'intersection de deux couronoïdes est telle que le centre de la rotation qui applique l'une sur l'autre deux quel-

conques des flèches renfermées dans cette intersection est un point fixe du plan¹. *C'est donc bien une couronne au sens vulgaire du mot.*

De même l'équation (19) signifie que les centres des trois rotations $(\eta_1\eta_2)$, $(\eta_1\eta_3)$ et $(\eta_1\eta)$ se trouvent en ligne droite. Autrement dit, *le couronoïde est le lieu des positions d'une flèche η_1 à laquelle on fait décrire successivement toutes les couronnes dont les centres se trouvent en ligne droite*².

Si l'on désigne par D l'axe commun de toutes les couronnes en question, et par η_0 la flèche *réflexe* de η_1 relativement à D, on voit immédiatement qu'une flèche quelconque appartenant au couronoïde est symétrique de cette flèche η_0 par rapport à une certaine droite du plan.

De la sorte, on a retrouvé les deux définitions classiques du couronoïde plan.

§ 8. — Le principal intérêt de la méthode que je viens d'esquisser, c'est qu'elle présente la théorie d'une manière strictement parallèle pour les deux cas des flèches situées dans le plan ou sur la sphère : il n'y a de différence que quant aux propriétés particulières qui caractérisent les quaternions relatifs à chacun de ces cas.

Mais celui du plan est susceptible de simplifications importantes. Quand on veut exposer la Cinématique des figures planes d'une manière indépendante, le mieux sera d'abandonner les quaternions pour des moyens plus directs. Les quantités complexes ordinaires suffisent en effet complètement pour présenter la théorie analytique sous une forme à la fois claire et concise.

Le montrer dans le détail, en nous obligeant à des retours superflus sur une foule de faits connus, allongerait ce mémoire sans profit. Je me bornerai donc, pour conclure, à quelques rapides indications concernant les équations du couronoïde et

¹ Il faut revenir ici à l'interprétation géométrique du quaternion représentatif d'un mouvement, et se rappeler que $\eta_1\eta$ par exemple, est le symbole de la rotation qui conduit η sur η_1 .

² En changeant η_1 contre une autre flèche quelconque appartenant au même couronoïde, la description du couronoïde suivant ce procédé sera possible d'une double infinité de manières.

de la couronne; elles suffisent pour faire comprendre le principe de la méthode.

Soient, relativement à un système d'axes, x et y les coordonnées de l'origine de la flèche, $z = x + yi$ la quantité complexe qui en est l'affixe; soient a et b les cosinus directeurs de cette flèche, et $A = a + bi$.

Les quantités z et A caractérisent complètement la flèche, quant à sa position et à sa direction. Elles équivalent à trois données réelles, car les cosinus a et b devant toujours vérifier la condition $a^2 + b^2 = 1$, le module de A est égal à l'unité.

Cela posé, le groupe des déplacements (sous-groupe des mouvements au sens large) est représenté par les ∞^3 transformations

$$z \sim ze^{\omega i} + t, \quad A \sim e^{\omega i} A; \quad (20)$$

t est une quantité complexe quelconque qui représente la translation des axes, tandis que ω est réel et détermine leur rotation.

De son côté, le groupe des antidéplacements, autre sous-groupe contenu dans le groupe général des mouvements, contient les ∞^3 transformations

$$z \sim z + uA, \quad A \sim e^{\omega' i} A, \quad (21)$$

avec deux paramètres, l'un ω' réel, l'autre u complexe quelconque.

Considérons une expression telle que

$$A^{-\frac{1}{2}} A'^{-\frac{1}{2}} (z - z'), \quad (22)$$

laquelle, outre les variables z et A , contient encore deux *paramètres* complexes z' et A' , ce dernier unimodulaire comme A . L'expression précédente est invariante par les substitutions du groupe (20), pourvu que les paramètres subissent les transformations suivantes

$$z' \sim z'e^{\omega i} + t, \quad A' \sim A'e^{\omega i}, \quad (23)$$

tandis que les variables se transforment d'après les formules (20).

Admettons en outre que les mêmes paramètres subissent la transformation ¹

¹ Je désigne par \bar{u} la *conjuguée* d'une quantité quelconque u , obtenue en changeant i en $-i$.

$$z' \sim z' + \bar{u} A', \quad A' \sim A' e^{\omega' i}, \quad (24)$$

alors que les variables se transforment selon le groupe (21) des antidéplacements.

L'expression (22), invariante par le groupe des déplacements, ainsi qu'on vient de voir, ne l'est pas pour celui des antidéplacements; quand on lui applique les formules (21) elle augmente de la quantité

$$A^{-\frac{1}{2}} A'^{-\frac{1}{2}} (u A - \bar{u} A'), \text{ ou, } u A^{\frac{1}{2}} A'^{-\frac{1}{2}} - \bar{u} A^{-\frac{1}{2}} A'^{\frac{1}{2}}.$$

Mais celle-ci, qui est la différence de deux quantités conjuguées, est purement imaginaire. Ainsi, si l'on désigne par p_r la partie réelle d'une quantité complexe p , on voit que l'équation

$$[A^{-\frac{1}{2}} A'^{-\frac{1}{2}} (z - z')]_r = 0, \quad (25)$$

est invariante, relativement au groupe (20), comme relativement au groupe (21); elle est donc invariante dans le groupe de tous les mouvements au sens large.

Et puisque cette formule (20) représente évidemment une bi-série de flèches, c'est l'équation générale du couronoïde.

Quant à l'équation de la couronne, elle s'obtient d'une manière plus immédiate encore.

Désignons par z_0 et v deux quantités complexes quelconques constantes, il est clair que la relation

$$z = z_0 + v A, \quad (26)$$

où A est la variable, représente une couronne; cette couronne est centrée au point z_0 , son rayon est égal au module de la quantité v , enfin les flèches qui lui appartiennent font avec le rayon vecteur un angle égal et de signe contraire à l'argument de la même quantité v^1 .

Le couronoïde (25) contient une double infinité de couronnes. En effet, z' et A' étant donnés, imposons aux paramètres z_0 et v

¹ Pour transformer les unes dans les autres toutes les couronnes du plan, il faut employer les antidéplacements et les déplacements, soit la totalité de mouvements au sens large.

de la couronne la condition¹

$$z' = z_0 + \bar{v}A' , \quad (27)$$

par le moyen de laquelle un de ces paramètres devient fonction de l'autre arbitrairement choisi.

D'après les formules (26) et (27), nous avons

$$z - z' = vA - \bar{v}A' ,$$

et cette valeur, mise dans l'équation (25), la rend identique, car

$$\left[vA^{\frac{1}{2}}A'^{-\frac{1}{2}} - \bar{v}A^{-\frac{1}{2}}A'^{\frac{1}{2}} \right]_r = 0 .$$

Par suite, la couronne (26) appartient au couronoïde (25) pourvu que ses paramètres vérifient la condition précédente (27)².

Ainsi, si on prend deux couronoïdes de paramètres (z', A') et (z'', A'') ils admettront toujours une couronne commune dont les éléments (z_0, v) se détermineront d'après les conditions

$$z_0 + \bar{v}A' = z' ,$$

$$z_0 + \bar{v}A'' = z'' .$$

La dite couronne est l'intersection complète des deux couronoïdes, ainsi qu'il est aisé de le montrer.

En cherchant enfin les équations des couronnes qui sont communes, d'une part aux couronoïdes (z', A') , (z'', A'') , de l'autre aux couronoïdes (z', A') et (z''', A''') , on reconnaît tout de suite que les deux couronnes se rencontrent. Par suite, trois couronoïdes ont toujours une flèche commune, laquelle est d'ailleurs unique. Il est inutile de chercher les formules, très simples, qui fournissent explicitement en fonction des données la flèche commune à trois couronoïdes, ou encore, car les deux problèmes n'en font qu'un seul, le couronoïde contenant trois flèches données.

Mais j'arrêterai ici ces brèves remarques suffisamment expli-

¹ Si on regarde z et z' comme deux fonctions des *variables* indépendantes A et A' , les flèches correspondantes (z, A) et (z', A') engendrent deux couronnes (26) et (27) qui sont *réflexes* l'une de l'autre.

² Cette condition est nécessaire, en même temps que suffisante, ainsi que cela se voit facilement.

cites pour tenir lieu de plus longs développements, et je termine par une dernière observation.

§ 9. — Les couronoïdes et les couronnes qui imitent la Géométrie *projective* de la droite et du plan, jouissent d'une propriété caractéristique, c'est d'être invariants au sein du groupe *complet* des mouvements, groupe formé, nous le savons, de la réunion des groupes partiels (20) et (21) des déplacements et des antidéplacements.

Or, on peut se demander si la même imitation est possible en employant, au lieu de la couronne et du couronoïde, d'autres monoséries et biséries de flèches qui ne seraient plus invariantes que relativement à un seul des sous-groupes composants.

Sans traiter ici ce problème qui admet une infinité de solutions tant pour le groupe des antidéplacements que pour celui des déplacements, je me borne à un exemple; il se rattache immédiatement aux calculs ci-dessus.

Au lieu de l'équation (25), qui est celle du couronoïde, écrivons:

$$[A^{-m} A'^{-m} (z - z' - sA)]_r = 0, \quad (28)$$

m , s sont deux constantes données a priori, la première réelle, la seconde complexe, tandis que A' , et z' , sont des paramètres variables.

On reconnaît immédiatement que les ∞^3 *pseudocouronoïdes*¹ (28) se transforment les uns dans les autres par le groupe des déplacements (20); ils sont tous, à la position près, la reproduction de l'un quelconque d'entre eux. Par contre les pseudocouronoïdes n'admettent pas le groupe des antidéplacements.

D'autre part, les intersections mutuelles deux à deux de ces pseudocouronoïdes, au lieu de se disposer selon ∞^6 monoséries, ainsi qu'on devrait l'attendre a priori, n'en forment en réalité que ∞^4 seulement; de même l'ensemble des rencontres des ∞^3

¹ J'étends à un cas plus général une locution que j'ai employée à propos d'un cas particulier dans mon premier mémoire sur la théorie du couronoïde. Ce cas correspond à la valeur $s = 0$ du paramètre s . Si, en outre, on a $m = -\frac{1}{2}$, le pseudocouronoïde devient l'*anticouronoïde*.

plans de l'espace se réduit à ∞^4 droites seulement. Chacune des *pseudocouronnes* admet pour équation la suivante¹, avec les paramètres z_0 et v ,

$$z = z_0 + sA + vA^{2m}, \quad (29)$$

et le pseudocouronoïde contiendra ∞^3 pseudocouronnes; la condition à vérifier pour cela se lit

$$z' = z_0 + \bar{v}A'^{2m}.$$

On a ainsi, en apparence, reproduit les propriétés significatives de la droite et du plan; et il est vrai que, exclusion faite de l'unicité des solutions qu'il faut expressément réserver, les pseudocouronoïdes et les pseudocouronnes répéteront dans leurs relations mutuelles les axiomes *projectifs* de la Géométrie ordinaire.

Toutefois, en raison de la structure du groupe des mouvements, réduit à ∞^3 substitutions au lieu de ∞^6 , il ne sera pas possible de pousser plus loin l'assimilation, de l'étendre aux propriétés *métriques*; en un mot, on doit renoncer à projeter la Géométrie nouvelle dans un espace E_3 dont les propriétés soient analogues à celles de notre espace, ainsi qu'on le fait avec le couronoïde ordinaire.

¹ L'origine de la flèche qui décrit la pseudocouronne engendre une courbe de l'espèce des épicycloïdes.