Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 46 (1918)

Artikel: Sur une interprétation euclidienne de la géométrie de Riemann à trois dimensions et sur la cinématique des figures sphériques se déplaçant sur leur propre sphère

Autor: Cailler, C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743165

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UNE INTERPRÉTATION EUCLIDIENNE

DE LA

GÉOMÉTRIE DE RIEMANN

A TROIS DIMENSIONS

ET SUR LA

CINÉMATIQUE DES FIGURES SPHÉRIQUES

se déplaçant sur leur propre sphère

PAR

C. CAILLER

(Avec 3 fig.)

§ 1. — Généralités.

Tout le monde connaît l'interprétation de la planimétrie de Lobatchewsky selon Beltrami; chacun sait que cette planimétrie exprime, dans le domaine euclidien, les propriétés des surfaces à courbure constante négative, telles que la pseudosphère. Bien plus immédiate encore est l'interprétation de la Géométrie riemannienne à deux dimensions; faits et formules transcrivent simplement les propriétés classiques de la Géométrie ordinaire sur les surfaces à courbure constante positive, la sphère par exemple.

Quand on passe du plan à l'espace, la réduction des Géométries non euclidiennes à la Géométrie euclidienne est beaucoup moins directe, il faut l'avouer. Pour rester dans le même ordre d'idées qui a réussi à propos du plan, il faudrait se figurer les espaces plats de Lobatchewsky ou de Riemann sous l'aspect d'espaces à courbure constante localisés dans l'espace euclidien à 4 dimensions. La méthode reste pareille, mais — inconvénient

majeur — l'imagination n'y trouve plus son compte, incapable qu'elle est de se reconnaître dans l'espace à 4 dimensions.

Aussi ne faut-il pas s'étonner si les interprétations euclidiennes des deux stéréométries construites sur ce modèle sont presque inconnues; pour éviter l'inconvénient dont je viens de parler, il faut en imaginer d'une tout autre nature, et parmi celles-ci je citerai celle qu'a donnée Poincaré, pour la Géométrie de Lobatchewsky, dans *Science et hypothèse*[1].

En cet endroit, l'illustre auteur se borne à décrire la correspondance des deux espaces, sans indiquer la méthode qui sert à la réaliser. Mais l'omission est facile à réparer.

Une transformation birationnelle, semblable à *l'inversion* des éléments de la Géométrie, permet de faire correspondre un point de l'espace ordinaire à un autre de l'espace hyperbolique. Tous les points transformés se trouvent d'un seul et même côté d'un certain plan fixe[2]. Les plans et les droites non euclidiens deviennent des sphères, ou des cercles, les uns et les autres orthogonaux sur le plan fondamental. Et tout théorème, valable pour la Géométrie de Lobatchewsky, en fournit un nouveau, de Géométrie ordinaire, relatif à des systèmes de cercles ou de sphères perpendiculaires à un même plan fixe.

Il est curieux que Poincaré n'ait rien dit non plus, dans le passage que je viens de rappeler, au sujet de la réduction à l'espace ordinaire de la Stéréométrie riemannienne. Peut-être a-t-il pensé que son lecteur n'aurait pas besoin d'aide pour imaginer tout seul la transformation stéréographique qui remplit à l'égard de l'espace sphérique le même office que celle dont je viens de parler à propos de l'espace hyperbolique; et, en fait, la première de ces transformations s'offre bien plus immédiatement, et a certainement servi de modèle à sa congénère.

Quoi qu'il en soit, ces représentations des deux stéréométries dans l'espace euclidien sont assez détournées, malgré leur élégance. En ce qui concerne l'espace riemannien, sa planimétrie s'interprète, d'une manière tout élémentaire, sur la sphère, la plus simple des surfaces après le plan. Ce fait même devait

[1] Pages 56 et suivantes.

[2] Il est loisible de substituer une *sphère* à ce plan.

faire croire à la possibilité d'une représentation également simple dans le cas de la géométrie à 3 dimensions. Le présent article qui reprend à un point de vue plus restreint, et aussi plus approfondi, des questions que j'ai déjà traitées ici même dans toute leur étendue[1] a pour principal objectif de montrer, et l'exactitude de la prévision, et l'intérêt de la représentation euclidienne dont il s'agit.

Chose extrêmement singulière. Cette représentation euclidienne directe de la Stéréométrie riemannienne est à la fois banale et méconnue. Qu'on ouvre un traité de Cinématique : c'est elle qui forme, de manière implicite, et non sans une certaine mutilation des faits géométriques, la substance du chapitre consacré aux déplacements finis d'une figure sphérique sur sa propre sphère.

La loi de la composition des rotations finies, conforme de tout point à la formule de la Trigonométrie sphérique, est le premier indice, le plus frappant aussi, d'une correspondance existant entre les deux domaines. Qu'on suive ce fil conducteur, de découverte en découverte, on finira par s'étonner d'avoir fait si longtemps, sous le nom de Cinématique des figures sphériques, de la Géométrie non euclidienne sans le savoir.

Il est à coup sûr très intéressant de voir une transition naturelle s'établir soudain entre deux sujets dont l'un paraissait devoir rester toujours « un vain exercice de Logique », tandis que le second fait dès longtemps partie intégrante des éléments de la Mécanique, c'est-à-dire d'une science concrète entre toutes.

Mais on conçoit assez que tout ne se borne pas à une constatation de cette espèce d'un intérêt purement théorique. Ici, comme dans tous les cas semblables, un profit plus direct découle de la corrélation posée entre les deux domaines pour la connaissance de l'un et l'autre. Et je ne pense pas m'avancer trop en affirmant que c'est la Cinématique des figures sphériques qui a le plus à gagner dans cet échange de services réciproques.

Quoi de plus simple, par exemple, sitôt perçu le lien de la Cinématique avec la Géométrie ponctuelle à 3 dimensions, que

[1] Voir en particulier mon article « Géométrie des corps solides et Géométrie imaginaire », *Arch. 1916*, vol. 42, nos d'août, septembre, octobre.

de classer les mouvements d'une lamelle sphérique selon le *degré* de la courbe représentative? Cette idée de répartir les mouvements algébriques en catégories naturelles de complexité croissante est bien étrangère à la Cinématique usuelle.

Ou bien encore, que les *couronnes* décrites par la lamelle puissent engendrer des *complexes,* des *congruences,* ou des *surfaces* de tous les ordres reproduisant trait pour trait les lois de la Géométrie réglée, le fait s'impose avec une entière évidence à qui sait reconnaître dans la couronne le parfait équivalent de la droite non euclidienne.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister, on comprend assez que, de même que les mouvements à un degré de liberté se représentent dans l'espace riemannien E_3'', à l'aide d'une courbe, les mouvements à deux degrés de liberté correspondent à une surface. Et ainsi, la totalité des notions de la Géométrie infinitésimale des courbes et des surfaces trouveront leur place marquée d'avance dans le domaine de la Cinématique : il suffira de les y transporter par une simple transcription.

Une particularité nouvelle, en étendant à la Cinématique générale d'un corps solide quelconque librement mobile dans l'espace la réalité du rapport existant déjà entre l'espace E_3'' et la Cinématique de la figure sphérique, vient en accroître singulièrement la portée et en multiplier les applications. Il y a là un fait des plus remarquables, et bien que je n'aie pas à y revenir dans la suite de ce travail, il ne me paraît pas inutile d'en indiquer ici sommairement les causes.

La lamelle sphérique admet pour forme canonique la plus simple une *flèche,* c'est-à-dire l'ensemble de deux points rangés dans un ordre déterminé, l'un servant d'origine à la flèche, l'autre d'extrémité, le premier à la distance d'un quadrant du second.

D'une manière absolument analogue le corps solide peut être ramené à un *feuillet,* soit le système formé par deux demi-droites issues d'un même point, et orthogonales entre elles.

Or, en vertu d'un théorème fondamental de la Géométrie réglée, les droites de l'espace sont assimilables, tant en ce qui concerne leurs propriétés métriques que leurs propriétés projec-

tives, aux points *imaginaires*[1] de la sphère. Ainsi donc, abstraction faite de la *réalité* des objets, la flèche et le feuillet apparaissent comme des éléments identiques: de ce point de vue général, la lamelle sphérique et le corps solide invariable sont deux variétés d'une seule et même chose.

On comprend par là le rapport étroit qui existe entre les Cinématiques de la lamelle sphérique et du solide librement mobile dans l'espace, et l'on s'explique par quel singulier concours de circonstances, la même Géométrie de Riemann à trois dimensions puisse servir d'image à l'une et à l'autre. Ce sont des faits d'Algèbre qui servent de support aux géométries non euclidiennes; il n'y a pas lieu d'être surpris si la nature réelle ou complexe des variables ne joue le rôle que d'un détail accidentel sans influence sur le fond de la théorie.

Mais je le répète: je laisse aujourd'hui de côté le cas général du corps solide se déplaçant dans l'espace, et avec lui les quantités complexes. Je m'en tiens à la lamelle sphérique mobile sur sa propre sphère: c'est le cas primitif, qu'il faut d'abord bien comprendre. Nous allons essayer de justifier ce qui précède touchant la correspondance de la Cinématique qui s'y rattache avec la Géométrie de l'espace E_3^r; nous emploierons à cet effet une méthode nouvelle, extrêmement simple, où la part du calcul se trouve considérablement réduite au profit du raisonnement synthétique. Cette méthode, me semble-t-il, est la plus propre à bien faire saisir la nature du rapport qui existe entre les deux espaces.

C'est l'essentiel de mon sujet: bien loin d'en épuiser la matière, sur plusieurs points assez fondamentaux je me bornerai à l'effleurer. Dans un second article, j'aurai à revenir sur un certain nombre de questions accessoires qui en dépendent plus ou moins directement. La Cinématique des figures planes nous y occupera notamment; le peu que j'en dirai suffira, je pense, à montrer les profondes différences qui séparent ce cas de celui que je traite aujourd'hui, et à faire sentir dans quelle direction les recherches ultérieures auront à s'orienter.

[1] Suivant la nature de l'espace E_3, l'unité imaginaire aura des propriétés différentes. Selon que cet espace est euclidien, hyperbolique, ou elliptique, il faut faire $i^2 = 0$, $i^2 = -1$, $i^2 = 1$.

§ 2. — Système de référence et coordonnées.

Considérons une sphère fixe, et soit à sa surface une figure invariable donnée, polygonale ou curviligne : c'est la *lamelle,* elle peut se déplacer en prenant une triple infinité de positions.

La forme de la lamelle est quelconque : sans la changer autrement qu'en apparence, nous pouvons toujours la réduire à une *flèche.* La flèche est un petit vecteur attaché à l'un des points de la lamelle, dans une direction donnée relativement à celle-ci ; c'est aussi, si on préfère, un arc de grand cercle unissant l'origine de la flèche à son extrémité située 90° plus loin. La lamelle étant donnée, il est clair que son remplacement par une flèche est possible d'une triple infinité de manières différentes, et que deux flèches représentatives de la même lamelle sont toujours solidairement liées l'une à l'autre.

Commençons par nous demander par le moyen de quelles *coordonnées* nous pourrons représenter la position de la lamelle L (ou de la flèche f) mobile à la surface de la sphère.

Pour définir des coordonnées, il faut d'abord un système de repères fixes, ensuite un moyen d'y rapporter l'élément mobile.

Constituons le système de repères par le procédé suivant ; il y entre deux objets de nature différente, il le semble du moins à première vue.

Le premier de ces objets est un trièdre coordonné S, dont les trois axes OX_1, OX_2, OX_3, rectangulaires deux à deux, partent du centre de la sphère ; les extrémités de ces axes à la surface de la sphère, X_1, X_2, X_3 forment un triangle de points conjugués, triangle qu'on peut, si on préfère, employer en lieu et place du trièdre S.

Le second élément du système de référence est une lamelle *initiale* L_0, ou flèche *initiale* f_0, placée à volonté sur la sphère.

Dans la Géométrie riemannienne de l'espace, à l'inverse de ce qui précède, le système de référence est formé d'une manière parfaitement symétrique. On prend, pour remplir cet office, les quatre sommets d'un tétraèdre *conjugué,* dont les sommets sont deux à deux orthogonaux. Et ainsi les éléments du système de référence, qui sont des points, non seulement sont homogènes

entre eux, mais ils le sont encore aux éléments ponctuels de l'espace qui doivent leur être rapportés. Ces caractères sont absents du système disparate (S, f_0) que nous venons de construire comme repère des flèches portées par notre sphère ; et ainsi il semble que l'analogie, manifestée par l'identité des *dimensions* des deux espaces, ∞^3 dans l'un et l'autre cas, s'arrête aux premiers pas.

Mais il est aisé de voir que la divergence est purement artificielle ; elle s'évanouit quand on donne au système de référence une forme symétrique, équivalente en fait, quoique légèrement moins précise que la précédente.

A cet effet, faisons pirouetter la flèche initiale f_0, chaque fois de 180°, autour des trois axes OX_1, OX_2, OX_3, de manière à la transporter dans trois nouvelles positions f_1, f_2, ou f_3. Il est facile de reconnaître que les flèches f_1, f_2, f_3, qui sont à 180° de distance[1] de la flèche f_0, sont aussi à 180° de distance les unes des autres. En outre, si l'on cherche quelles rotations amènent une quelconque des quatre flèches sur une autre également quelconque, on trouve que les axes de ces 6 rotations reforment constamment le même trièdre aux arêtes OX_1, OX_2, OX_3.

Ainsi donc, il revient au même de substituer au système de référence primitif (S, f_0), un système nouveau qui comprend les 4 flèches f_0, f_1, f_2, f_3, orthogonales deux à deux : toutefois la forme symétrique du système de référence ne permet pas de retrouver le *sens* des arêtes du trièdre S, et de ce fait la première forme est presque toujours à préférer.

Le système de référence étant défini comme dit plus haut, comment lui rapporter une flèche quelconque f placée sur la sphère ? Considérons le mouvement de rotation autour du centre de la sphère, par le moyen duquel la flèche initiale vient s'appliquer sur la flèche donnée f.

[1] On prendra bientôt, pour la mesure de la distance, la moitié de l'angle de rotation.

[2] Le sens de ce terme, au lieu duquel j'emploierai souvent celui de *conjugué*, se comprend immédiatement par ce qui précède. Sont *orthogonales* ou *conjuguées* deux flèches qu'une rotation de 180° amène en coïncidence. Le procédé employé dans le texte pour construire un système de 4 flèches orthogonales deux à deux est général.

On sait que ce mouvement est caractérisé par 4 paramètres de Rodrigues, e_0, e_1, e_2, e_3 liés ensemble par l'identité

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \ . \qquad (1)$$

Ces constantes e_k seront pour nous les *coordonnées de la flèche f* relativement au système de référence (S_0, f). Leur signification est bien connue, et la voici.

Soient 2ω la grandeur de la rotation qu'il faut faire subir à f_0 pour l'appliquer sur f, et a_1, a_2, a_3 les coordonnées du centre de cette rotation[1] par rapport au trièdre S, nous avons

$$e_0 = \cos \omega \qquad e_h = a_h \sin \omega \ . \qquad (2)$$

Au point de vue de la précision de ces formules, il faut remarquer que la rotation est toujours supposée s'exécuter dans le cas direct, lui-même déterminé par la disposition *dextrorsum* ou *sinistrorsum* du trièdre S. Cette rotation admet une période égale à 2π ; enfin son centre $A(a_1, a_2, a_3)$ pourrait être échangé contre le point diamétralement opposé $A_1(-a_1, -a_2, -a_3)$. De là résulte immédiatement que la flèche f étant donnée, le choix des coordonnées comporte une indétermination quant au signe des 4 lettres e correspondantes ; deux systèmes opposés tels que $+e_h$ et $-e_h$, $(h = 0, 1, 2, 3)$ caractérisent une seule et même flèche[2].

Prenons maintenant dans l'espace riemannien un tétraèdre T de 4 points conjugués entre eux. Tout point de l'espace possède 4 coordonnées, à savoir les cosinus de ses distances aux 4 sommets du tétraèdre ; comme on sait, les 4 cosinus e_h vérifient la relation (1), ou $\sum_h e_h^2 = 1$.

Il est donc loisible de faire correspondre à chaque flèche de notre sphère le point de l'espace E_3^r qui possède les mêmes coordonnées. Il importe toutefois d'observer que la correspondance dont il s'agit n'est pas biunivoque : en effet, deux systèmes de quantités e_h et e_{-h} déterminent une seule et même flèche, nous le savons, tandis que ces mêmes systèmes définissent dans E_3^r deux points distincts, diamétralement opposés.

[1] On suppose désormais le rayon de la sphère pris pour unité.

[2] Je rappelle que les formules de Rodrigues, d'où dépend la situation relative de deux trièdres fixement liés à f et f_0, contiennent les e au second degré.

Il résulte de là que si une flèche unique est associée à un point donné de E_3', réciproquement à une flèche donnée sur la sphère correspond un couple de deux points, toujours placés à 180° l'un de l'autre. Cette circonstance qu'il ne faut pas perdre de vue, ne joue cependant qu'un rôle secondaire ; fort souvent on peut, sans faire aucune entorse aux principes de la Géométrie riemannienne, traiter comme s'ils ne formaient qu'un point unique, l'ensemble de deux points diamétralement opposés. Cela a lieu notamment quand le point mobile dans E_3' décrit une ligne composée de deux parties symétriques par rapport à l'origine. La seconde partie apparaît comme la répétition de la première, et l'une et l'autre se représenteront sur la sphère par une même monosérie de flèches deux fois décrite. Si, par exemple, une flèche décrit une couronne, au premier tour, le point correspondant trace la moitié d'une droite située dans E_3', au second tour l'autre moitié opposée à la première. Et rien n'empêche d'identifier par la pensée les deux parties de la droite qui correspondent ainsi à la même monosérie de flèches.

Mais il ne suffit pas, pour affirmer l'identité de la Géométrie des figures sphériques avec la Géométrie riemannienne, d'avoir établi une correspondance plus ou moins arbitraire entre les coordonnées d'une flèche f et celles d'un point P. Un rôle essentiel paraît appartenir, dans cette correspondance, aux systèmes de référence respectifs des deux espaces, (S, f_0) pour la sphère, le tétraèdre T pour E_3' : pour que la corrélation conserve une signification réelle, d'ordre géométrique, il est indispensable que les repères n'interviennent pas en fait, ou que la relation instituée entre les deux espaces possède un caractère invariant par rapport aux éléments de référence. C'est cette invariance qu'il s'agit de mettre en lumière maintenant.

§ 3. — Invariance de la Correspondance entre les deux espaces.

A cet effet rappelons quelques propriétés élémentaires qui se rattachent aux formules de Rodrigues; elles ne s'expriment aisément que grâce à l'intervention du calcul des quaternions dont je n'ai pas à rappeler ici les principes.

Si un point de la sphère a pour coordonnées x_1, x_2, x_3 par rapport à S, faisons-lui correspondre un quaternion (vecteur)

$$\xi = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 \ . \tag{3}$$

Soit d'autre part

$$p = p_0 + p_1 i_1 + p_2 i_2 + p_3 i_3 \ , \quad \Sigma p_h^2 = 1 \ ,$$

un quaternion unimodulaire, dont les composantes, relativement au système S, soient égales aux paramètres de Rodrigues définissant un mouvement de la sphère autour de son centre. Alors

1° Si la rotation p est appliquée au point ξ, elle le transformera en un nouveau point ξ' de coordonnées x'_1, x'_2, x'_3

$$\xi' = x'_1 i_1 + x'_2 i_2 + x'_3 i_3 \ ,$$

et l'on aura

$$\xi' = p \xi \bar{p} \ , \tag{4}$$

où $\bar{p}$ désigne le quaternion *conjugué* de p, à savoir

$$\bar{p} = p_0 - p_1 i_1 - p_2 i_2 - p_3 i_3 \ .$$

2° La succession de deux rotations p et q, exécutées dans cet ordre, équivaut à une nouvelle rotation de quaternion

$$qp \ . \tag{5}$$

Selon les propriétés du calcul des quaternions l'ordre des facteurs, dans cette *composition des rotations,* ne peut être alterné.

3° Entraînons le trièdre S de référence, et changons-le en un nouveau trièdre S′ par le moyen d'une rotation dont le quaternion soit q relativement à S.

Dans ces conditions, si une rotation admet p pour quaternion représentatif quand on la rapporte au premier trièdre de référence, le quaternion deviendra

$$\bar{q} p q \ ^{1}, \tag{6}$$

quand on rapportera la même rotation au nouveau trièdre S′.

Voici maintenant les conséquences à tirer de là. On a rapporté les flèches de la sphère au système de référence (S, f_0), et

[1] Remarquer qu'on pourrait mettre le signe — devant ces deux formules, sans changer le résultat.

caractérisé chacune de ces flèches par le quaternion

$$\eta = e_0 + e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 \; ; \tag{7}$$

c'est, relativement au trièdre S, le symbole de la rotation amenant f_0 en coïncidence avec f. Comment va se transformer ce quaternion η lorsque les éléments du système de référence, S et f_0, se remplaceront par d'autres éléments semblables S′ et f'_0?

Si S seul change, venant en S′ sous l'influence de la rotation p, tandis que f_0 reste en place, les nouvelles coordonnées η' (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) de la flèche f, seront telles que

$$\eta' = \bar{p}\eta p \; ; \tag{8}$$

c'est la propriété n° 3 ci-dessus.

Conservons au contraire le trièdre S, et imprimons à la flèche initiale f_0 une rotation q qui l'amène en f'_0; dans ce cas, les coordonnées η' devront représenter la rotation $f'_0 f$, elle-même équivalente à la succession des deux rotations $f'_0 f_0$, et $f_0 f$. Donc, d'après la règle de la composition des rotations

$$\eta' = \eta \bar{q} \; . \tag{9}$$

Si enfin les deux éléments du système coordonné sont changés l'un et l'autre, par le moyen des rotations p et q, la transformation cherchée résulte de la combinaison des deux précédentes ; elle sera donc en général

$$\eta' = \bar{p}\eta\bar{q}p \; ,$$

ou, si l'on veut

$$\eta' = r\eta s \; , \tag{10}$$

en désignant par r et s les quaternions unimodulaires quelconques

$$r = \bar{p} \; , \qquad s = \bar{q}p \; ,$$

d'où l'on déduit inversément

$$p = \bar{r} \; , \qquad q = \bar{r}\bar{s} = \overline{sr} \; .$$

En prenant, par exemple, $s = 1$, ou $q = p$, on voit que la transformation

$$\eta' = \bar{p}\eta \; , \tag{11}$$

symétrique de (9), est celle que subissent les coordonnées de la

flèche η, quand on déplace à la fois S et f_0, par une même rotation p, après les avoir rendus solidaires l'un de l'autre.

Or, on reconnaît immédiatement dans la formule de transformation (10) celle de la transformation des axes dans l'espace E_3^r. La chose est d'ailleurs évidente en soi : car cette formule (10) est linéaire quant aux coordonnées e_h et e'_h ; elle renferme autant de paramètres que le mouvement général de l'espace E_3^r, trois par quaternion unimodulaire r ou s, soit six en tout. Enfin la même formule laisse invariante la forme fondamentale

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 .$$

Et voici la conséquence de tout cela.

On a mis en correspondance, par la coïncidence de leurs coordonnées, d'une part une flèche f appartenant à la sphère, de l'autre un point P situé dans E_3^r ; *si on s'avise de changer le système de référence auquel est rapportée la flèche* (S, f_0), *le point associé à* f *dans* E_3^r, *n'a pas bougé ; seul le trièdre coordonné T s'est déplacé dans l'espace.* C'est la propriété d'invariance dont j'ai parlé plus haut.

Toute Géométrie particulière n'est au fond que l'étude des propriétés d'un certain groupe, le groupe des mouvements. Un groupe commun — quelle que soit la forme spéciale des éléments de deux géométries, point ou droite par exemple, — fait de ces géométries un seul et même corps de doctrine, l'une n'étant que l'image de l'autre. Telle est bien la circonstance que nous offrent la Géométrie de l'espace E_3^r et celle des lamelles mobiles à la surface de la sphère.

Nous sommes encore au point de départ de l'une et l'autre, et le peu que nous avons emprunté à leurs théories respectives suffit déjà pour affirmer *a priori* leur identité substantielle. D'avance il est certain que nous pouvons imiter avec les lamelles de la sphère toutes les propriétés, métriques et projectives, de l'espace ponctuel E_3^r.

Il ne s'agit que d'un décalque ; je vais y procéder sans m'attacher à suivre un ordre rigoureusement logique ni prétendre

être complet. Je désire seulement montrer quelle clarté s'ajoute, du fait de la copie exécutée à la surface de la sphère, aux notions fondamentales de la Géométrie riemannienne, et réciproquement avec quelle évidence s'interprètent dans E_3' les propriétés élémentaires de la Géométrie des flèches.

§ 4. Le couronoïde et la couronne sphériques[1].

Comme E_3' contient ∞^3 points, la sphère contient ∞^3 flèches différentes. Par le moyen d'une rotation, deux flèches quelconques f et f' peuvent être appliquées l'une sur l'autre ; nous dirons que f et f' sont *conjuguées* lorsque l'angle de la dite rotation est égal à 180°; cela revient à dire que ces flèches sont symétriques par rapport à un certain centre. De même, dans E_3', deux points sont *conjugués,* quand leur distance est d'un quadrant; dans ce cas l'invariant

$$e_0 e_0' + e_1 e_1' + e_2 e_2' + e_3 e_3' = 0 \ . \qquad (12)$$

Dans E_3', le plan est l'ensemble des points conjugués d'un point fixe, le *pôle* du plan; l'analogue du plan pour la sphère sera donc le *couronoïde,* c'est-à-dire la bisérie engendrée par une flèche mobile f qui se meut en restant toujours conjuguée à une flèche fixe f'. On obtient le couronoïde en faisant *chavirer*[2] le pôle f' autour de tous les centres pris à volonté sur la sphère.

Une autre définition est à remarquer pour le couronoïde: voici sur quelle propriété elle se base.

Si deux figures sphériques se correspondent point par point de manière que les points correspondants soient diamétralement opposés, nous les nommerons *inverses* l'une de l'autre: des figures inverses sont égales dans toutes leurs dimensions sans être congruentes, elles ne peuvent être amenées en coïncidence que moyennant un retournement préalable[3].

[1] Je rappelle que c'est à M. R. de Saussure qu'est due la notion de couronoïde. On connaît ses travaux fondamentaux sur le sujet publiés ici même.

[2] C'est-à-dire tourner de 180°.

[3] A noter que ceci n'est vrai qu'en donnant à l'une des figures une forme tout à fait générale. La figure inverse d'une flèche, par exemple, est une

Cela posé, il est facile de voir que deux figures inverses étant données, si on prend la symétrique de la première par rapport à un grand cercle, et la symétrique de la seconde par rapport au pôle du grand cercle précédent, ces deux symétriques coïncident.

Des figures (ou flèches) qui sont symétriques par rapport à un centre sont *conjuguées,* suivant la terminologie adoptée plus haut; elles sont toujours congruentes. Nommons de même figures (ou flèches) *réflexes* celles qui sont symétriques par rapport à un arc de grand cercle; l'une d'elles est congruente à l'inverse de l'autre.

Tout ceci étant bien compris, la deuxième définition du couronoïde est immédiate ; et voici les deux définitions réunies dans un seul énoncé.

Le couronoïde est le lieu des flèches conjuguées à une flèche fixe f', *c'est aussi le lieu des flèches réflexes d'une seconde flèche fixe* f_0. *Les flèches* f' *et* f_0 *(qui s'appellent respectivement la flèche conjuguée et la flèche réflexe du couronoïde) sont inverses l'une de l'autre.*

L'analogue de la droite riemannienne est la *couronne* : c'est le lieu d'une flèche qui tourne autour d'un centre fixe *c*. La couronne possède deux centres puisqu'on aurait pu faire tourner la flèche autour du centre *c'*, opposé à *c*, plutôt qu'autour de *c* lui-même, sans changer la couronne.

Il y a évidemment ∞^3 couronoïdes différents, autant que de plans dans E_3''. Les droites de l'espace sont au nombre de ∞^4 ; et de même, il existe sur la sphère ∞^4 couronnes, se distinguant les unes des autres par leur centre, leur rayon, et l'angle constant suivant lequel la flèche mobile rencontre la circonférence décrite par son origine.

L'analogie qui existe entre les couronnes de la sphère et les droites non euclidiennes n'est point évidente *a priori.* Pour la manifester, une construction, corrélative de celles des droites conjuguées de E_3'', est indispensable, celle de la fig. (1).

Deux couronnes C et C' sont dites *conjuguées*, si identiques

autre flèche égale à la première et qui peut s'appliquer sur celle-ci *sans retournement ;* il y a là une circonstance à remarquer, dont l'omission peut devenir une source d'obscurités.

entre elles par leur forme intrinsèque, elles sont tracées autour de deux centres diamétralement opposés tels que c et c'. De la

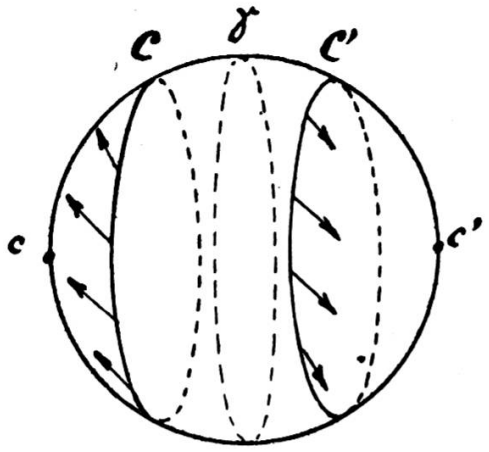

Fig. 1

sorte, si on unit invariablement la couronne C à son centre c, puis qu'on amène ce centre en c' par un déplacement convenable, la couronne C se sera transformée dans sa conjuguée C'.

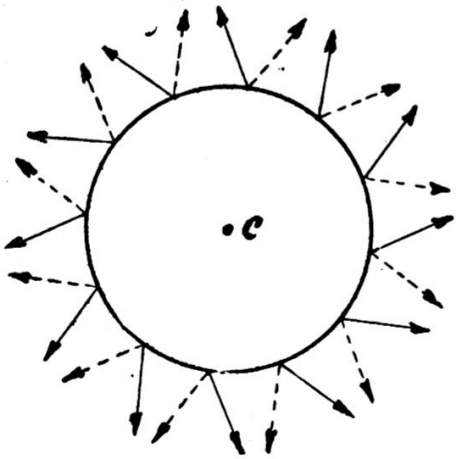

Fig. 2

Si on construit la figure C_0, inverse de C', on obtient une nouvelle couronne, la couronne *réflexe* de C; celle-ci, représentée dans la fig. (2), possède la même base que la couronne C,

leurs flèches respectives sont également inclinées sur la circonférence de la base, de part et d'autre de la normale.

On reconnaît immédiatement l'exactitude des propriétés suivantes :

1° Deux flèches quelconques respectivement placées sur les deux couronnes conjuguées sont elles-mêmes conjuguées ; le centre de la rotation amenant l'une sur l'autre est en γ au milieu de l'arc qui joint les points d'application. Les couronnes conjuguées sont ainsi l'analogue des droites conjuguées de l'espace E_3'', dont les points respectifs sont aussi conjugués deux à deux.

Toute droite possède une conjuguée, toute couronne pareillement.

2° Deux flèches quelconques prises dans deux couronnes *réflexes* sont aussi réflexes entre elles. L'arc de grand cercle par rapport auquel elles sont symétriquement placées divise en deux parties égales celui qui unit leurs points d'application.

3° Si l'on fait chavirer[1] une flèche fixe f' successivement autour de tous les centres placés sur l'équateur γ, elle engendre une couronne C. Autrement dit, le lieu des symétriques d'une flèche fixe par rapport aux différents rayons d'un faisceau plan est une couronne[2].

4° Une couronne est encore le lieu des symétriques d'une flèche fixe f_0 par rapport à tous les arcs de grand cercle passant par un même point.

De ces propriétés découle une série de conséquences ressemblant trait pour trait aux propriétés classiques de la droite et du plan non euclidiens ou euclidiens ; au fond, elles leur sont identiques, le couronoïde étant l'image du plan, la couronne celle de la droite[3].

[1] Tourner de 180°.

[2] Toute couronne peut être engendrée de ∞^1 manières, tant par le procédé n° 3, que par le procédé n° 4. La flèche f' sera empruntée comme on voudra à la couronne conjuguée, la flèche f_0 à la couronne réflexe. Le point c est au centre de la couronne donnée, l'équateur γ est parallèle à sa base.

[3] Le lecteur pourra aisément reconstituer les raisonnements dans le détail ; je me borne à les esquisser seulement où besoin est.

5° Par deux flèches distinctes f et f' passe une couronne et une seule.

6° Par deux flèches f et f' passent une simple infinité de couronoïdes; les pôles de tous ceux-ci sont situés à volonté sur la couronne conjuguée à celle qui joint f et f'; chacun des couronoïdes qui passent par f et f' contient dans son entier la couronne qui joint ces flèches.

7° Un couronoïde contient une infinité de couronnes. Pour obtenir une de ces couronnes il suffit de faire chavirer la flèche polaire[1] du couronoïde autour des droites d'un faisceau plan quelconque mené par le centre de la sphère.

8° Si deux couronnes sont contenues dans un couronoïde de pôle f, elles possèdent une flèche commune, et une seule.

Par le centre de la sphère, menons deux plans respectivement parallèles aux bases des couronnes données, puis faisons chavirer f autour de la ligne d'intersection de ces plans, nous obtenons une flèche commune aux deux couronnes, c'est la seule.

9° Réciproquement si deux couronnes différentes possèdent une flèche commune f', elles appartiennent toutes deux à un même couronoïde, lequel est d'ailleurs unique.

En effet, par le centre de la sphère, menons deux plans Γ et Γ' respectivement parallèles aux plans de base de nos couronnes C et C', et faisons chavirer f' autour de la droite d'intersection de Γ et Γ', en f. Construisons enfin le couronoïde ayant f pour pôle, il contiendra les deux couronnes C et C'; C, par exemple, sera engendré en faisant chavirer f autour de toutes les droites issues du centre et contenues dans le plan Γ.

10° Par trois flèches f', f'', f''' non contenues dans une même couronne passe un couronoïde et un seul.

C'est celui déterminé par les deux couronnes $(f'\ f'')$ et $(f'\ f''')$ qui se rencontrent sur f'.

11° Trois couronoïdes différents, qui ne passent pas par la même couronne, possèdent toujours une flèche commune et une seule.

Théorème identique au précédent par dualité, en substituant aux couronoïdes leurs pôles, et à la flèche le couronoïde polaire.

[1] J'emploie aussi ce terme de *polaire* comme équivalent à *conjugué;* on rencontrera aussi plus loin l'expression de *pôle* à la place de *flèche polaire.*

12° Deux couronoïdes se rencontrent suivant une couronne. C'est la couronne conjuguée de celle qui joint les pôles des deux couronoïdes donnés.

13° Un couronoïde C et une couronne c qui n'y est pas contenue ont une flèche commune et une seule.

Par la couronne c menons un nouveau couronoïde C′, lequel rencontrera C suivant une couronne c'. Les couronnes c et c' appartenant toutes les deux au couronoïde C′ admettent une flèche commune (proposition 8).

Les propriétés précédentes, qui sont toutes projectives, reproduisent dans leur ensemble les axiomes de la Géométrie touchant les relations unissant entre eux les points, les droites, et les plans [1]: elles sont seulement formulées à propos de nouveaux objets, les *flèches,* les *couronnes* et les *couronoïdes.*

§ 5. — Notion métrique fondamentale.

La Géométrie de E_3'' connaît, relativement à un couple de points η et η', un seul invariant, toujours compris entre — 1 et + 1. C'est le suivant.

$$e_0 e_0' + e_1 e_1' + e_2 e_2' + e_3 e_3' \,, \tag{13}$$

il représente, comme on sait, le cosinus de la *distance* des deux points.

L'interprétation, dans la Géométrie des flèches, de cette notion métrique fondamentale n'offre aucune difficulté.

Considérons en effet deux flèches f, f' [2] dont les quaternions représentatifs soient les suivants

$$\eta = e_0 + e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3 \,,$$

$$\eta' = e_0' + e_1' i_1 + e_2' i_2 + e_3' i_3 \,,$$

par rapport au système de référence (S, f_0).

[1] Ce sont les axiomes « *der Verknüpfung* » selon Hilbert (Grundlagen der Geometrie).

[2] Je rappelle qu'une même flèche peut être représentée par des coordonnées e_h ou $-e_h$, égales deux à deux et de signes contraires.

La rotation (ff') qui transporte f sur f' peut être remplacée par la succession des deux rotations (ff_0) et $(f_0 f')$; ainsi donc, d'après la règle de la composition des rotations, le quaternion représentatif du mouvement (ff') vaudra

$$\eta'\bar{\eta}\ .$$

D'une part, l'invariant (13) est la partie scalaire du produit précédent; de l'autre, cette même partie scalaire, conformément aux relations (2), est égale au cosinus de la moitié de l'angle dont la flèche doit tourner pour s'appliquer sur f'. En rapprochant ces deux faits, nous sommes conduits à la définition suivante :

Par convention, nommons *amplitude, grandeur*, ou *mesure* d'une rotation, la *moitié* de l'angle de cette rotation; nommons encore *distance* de deux flèches l'amplitude de la rotation qui applique l'une sur l'autre.

Alors, l'invariant

$$e_0 e_0' + e_1 e_1' + e_2 e_2' + e_3 e_3' \ ,$$

lequel, dans E_3'', mesure le *cosinus de la distance de deux points* η et η', mesurera dans la Géométrie des flèches, le *cosinus de la distance de deux flèches,* savoir celles qui *correspondent* aux points η et η'.

La distance n'est pas une quantité admettant une détermination unique; les flèches étant données, elle possède deux valeurs $\pm\,\omega$, auxquelles on peut encore ajouter des multiples quelconques de π. Et ainsi, l'invariant possède deux valeurs égales et de signes contraires; le changement de signe, dans (13), correspond à celui d'une des séries e_h ou e_h'.

Quant à la partie vectorielle du même quaternion $[\eta'\bar{\eta}]$, elle n'est pas invariante dans le changement d'axes, mais sa signification n'en est pas moins remarquable.

En écrivant cette quantité sous la forme

$$[\eta'\bar{\eta}] = (c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3) \sin\omega \ , \qquad (14)$$

les trois lettres c_1, c_2, c_3 *représentent, relativement au trièdre S, les coordonnées du centre de la rotation qui amène la flèche* η *sur la flèche* η' [1].

[1] Je représenterai souvent par la même lettre une flèche et le quaternion correspondant.

Employons ce résultat pour compléter sur un point important la définition du couronoïde.

Nous savons que par un point choisi à volonté dans un plan passe un faisceau de droites. Ainsi, grâce à la corrélation existant entre le plan et le couronoïde, et à celle qui relie la droite et la couronne, parmi les ∞^2 couronnes contenues dans un couronoïde, il y en aura tout juste ∞^1 qui contiennent une flèche arbitrairement choisie dans le couronoïde.

Il est facile de déterminer toutes ces couronnes, et leur construction fournira même une nouvelle description pour le couronoïde.

Soit (12), ou $(\eta'\bar{\eta}) = 0$, l'équation du couronoïde.

Prenons une des flèches du couronoïde, η'', et puisque la condition $(\eta'\bar{\eta}'') = 0$ exprime que la grandeur de la rotation ω vaut 90°, posons d'après l'équation (14)

$$\eta'\bar{\eta}'' = c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3 = c$$

où c désigne le centre de la rotation qui conduit sur η'' la flèche polaire η'.

On a ainsi

$$\eta' = (c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3)\,\eta'' = c\eta'' \;;$$

transportant cette valeur dans l'équation du couronoïde, celle-ci s'écrira sous la forme

$$(c\eta''\bar{\eta}) = (c[\eta''\bar{\eta}]) = 0 \;.$$

Mais, sauf un facteur scalaire, $[\eta''\bar{\eta}]$ représente le centre de la couronne qui joint η à η'' : l'équation ci-dessus exprime que *ce centre est à la distance d'un quadrant du point* c. La réciproque a évidemment lieu.

Donc, *si autour du point* c *on trace un arc de grand cercle ayant ce point pour pôle, et qu'on fasse tourner la flèche* η'' *autour d'un point quelconque* Γ *appartenant à ce grand cercle, la couronne engendrée de la sorte est entièrement contenue dans le couronoïde de pôle* η'. *Il n'y a pas d'autres couronnes renfermées dans le couronoïde.*

En définissant le couronoïde par le moyen de sa flèche réflexe, on peut présenter encore la même construction comme suit :

Soit D l'arc de grand cercle relativement auquel la flèche fixe η_0 est réflexe d'une flèche η'' choisie à volonté dans le couronoïde. *Si on fait tourner cette dernière d'un angle quelconque autour d'un point* Γ *pris où l'on veut sur D, les* ∞^2 *positions qu'elle occupera se répartissent selon* ∞^1 *couronnes, et chacun des éléments de chacune de ces couronnes appartient au couronoïde*[1].

§ 6. — Le groupe des mouvements.

Nous avons déjà parlé plus haut du changement du système de repères ; c'est même, on s'en souvient, la théorie du mouvement qui nous a servi de point de départ pour établir la corrélation entre l'espace E_3'' et la Cinématique de la figure sphérique.

Je vais reprendre ici la même théorie en restant sur le terrain de la Géométrie des flèches et en adoptant surtout la méthode synthétique. Cette méthode explique en effet avec une grande netteté la propriété primordiale des substitutions orthogonales à 4 indéterminées ; le groupe des mouvements mis, par exemple, sous forme quaternionienne

$$\eta' = r\eta s$$

affecte une structure *binaire,* tout à fait caractéristique, avec ses deux facteurs droit et gauche dont les rôles ne peuvent être alternés.

La théorie géométrique rend compte, d'une manière parfaite, de cette conformation particulière qui constitue le caractère le plus saillant du mouvement dans l'espace E_3''.

Revenons aux flèches, et nommons *mouvement* — au sens large du terme — une opération qui associe à toute flèche f, une nouvelle flèche f', de telle manière que la distance (f', φ') de deux flèches quelconques après le mouvement reste la même que la distance (f, φ) qui séparait les mêmes flèches avant le mouvement.

En somme la définition précédente est conforme à celle du mouvement dans l'espace ponctuel : seulement, pour ce dernier

[1] Ce second énoncé est à préférer au premier parce qu'il a encore lieu pour le couronoïde plan.

espace, la définition est trop large, parce qu'elle comprend les *retournements* qui changent une figure en une figure égale quoique non congruente.

Pour exclure les retournements, il faut ajouter que l'ensemble de tous les mouvements doit former un groupe *continu* de transformations. Une pareille restriction est inutile pour les mouvements des systèmes de flèches.

En effet, si une figure ponctuelle correspond par retournement à une autre figure, il suffit de changer dans l'une de ces figures un seul des points en son diamétralement opposé pour obtenir deux figures congruentes. Or un tel changement n'en entraîne aucun dans le système de flèches corrélatif à la figure ponctuelle qui l'a subi ; pour les flèches il est donc superflu de compléter la définition de mouvement donnée plus haut.

Parmi les mouvements, au sens large, des systèmes de flèches, deux catégories s'imposent d'abord à l'attention, ce sont les *rotations* et les *antirotations* [1].

Faisons tourner la sphère autour d'un axe quelconque issu du centre ; cette *rotation*, au sens ordinaire du mot, est un mouvement au sens large. Ce n'est pas le seul, et pour bien distinguer, nous désignerons ce mouvement au sens étroit [2] sous le nom de *déplacement,* ou simplement de *rotation.*

La rotation s'opère autour d'un centre c, fixe sur la sphère, ou, ce qui revient au même, autour du centre c', diamétralement opposé à c ; le centre étant placé, il faut, pour achever de définir la rotation, donner son *amplitude,* c'est-à-dire, comme il a été convenu plus haut, la *moitié* de l'angle de rotation.

Il est clair que toutes les rotations forment un groupe de ∞^3 opérations ; car le centre de la rotation peut recevoir ∞^2 positions à la surface de la sphère, pendant que la grandeur de la rotation dépend d'un nouveau paramètre. La propriété de ces ∞^3 opérations de former un groupe résulte immédiatement de la composition des rotations qui nous permet de remplacer par une seule

[1] Le choix d'une bonne terminologie est une des difficultés du sujet. Je n'ose me flatter d'en avoir adopté une qui soit toujours claire et exclusive de toute confusion.

[2] La rotation, comme on sait, est le mouvement le plus général au sens étroit.

rotation la suite de deux autres. Je représenterai souvent une rotation quelconque par le symbole R.

Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer d'abord, les rotations R n'épuisent pas l'ensemble de tous les mouvements possibles *au sens large.*

A côté des rotations R, nous pouvons distinguer de nouvelles opérations qui ne modifient pas non plus la distance de deux flèches quelconques, et que j'appellerai les *antidéplacements,* ou les *antirotations* $\mathcal{R}$. Leur définition est la suivante[1].

Associons à toute flèche f une autre flèche f' qui lui soit invariablement liée, de manière qu'on obtienne f' en faisant tourner f, d'un angle déterminé, autour d'un centre Γ, dont la position relativement à la flèche f, soit donnée *a priori,* tandis que sa position sur la sphère fixe est variable avec celle de la flèche f.

Il est clair que l'antirotation n'est pas un mouvement au sens ordinaire du mot; dans ce dernier cas en effet, c'est par rapport à la sphère donnée que le centre de rotation est fixe, non par rapport aux diverses flèches de la sphère.

Je dis que l'antirotation définit au contraire *un mouvement au sens large.* Car supposons deux couples de flèches solidairement liées, le couple (f, f') d'une part, le couple (φ, φ') en second lieu, de telle sorte que la figure (f, f') soit la même que (φ, φ') à la position près. De là résulte que si une rotation R amène f en coïncidence avec φ, la même rotation appliquera f' sur φ', et ainsi la distance finale des deux flèches (f', φ'), qui ont subi une *antirotation* $\mathcal{R} = (f, f') = (\varphi, \varphi')$, est restée égale à la distance initiale (f, φ) qui séparait les mêmes flèches avant le mouvement.

La figure (3) suggère immédiatement une remarque essentielle. *Les deux opérations* R et $\mathcal{R}$, *exécutées l'une après l'autre, amènent une flèche quelconque* f *dans la même position, quel que soit leur ordre de succession : autrement dit, ces opérations sont permutables, et l'on a* $R\mathcal{R} = \mathcal{R}R$.

En effet, si on transforme f par R, cette flèche vient en φ, elle

[1] La *rotation* correspond à l'opération $\eta' = p\eta$, *l'antirotation* à l'opération $\eta' = \eta q$.

se transporte ensuite en φ' après l'opération $\mathcal{R}$. Si l'ordre des opérations est interverti, f s'applique d'abord sur f', puis sur φ' [1].

Il est clair que les antirotations forment, elles aussi, un groupe de ∞^3 transformations non permutables [2] : c'est un nouveau sous-groupe contenu dans le groupe général des mouvements au sens large. En combinant une série quelconque de *rotations* et *d'antirotations,* nous obtenons des mouvements que nous appellerons *rotations* ou *déplacements mixtes;* d'après les propriétés étudiées à l'instant, nous savons que toute rotation mixte s'obtiendra en composant une seule rotation R avec une seule antirotation $\mathcal{R}$.

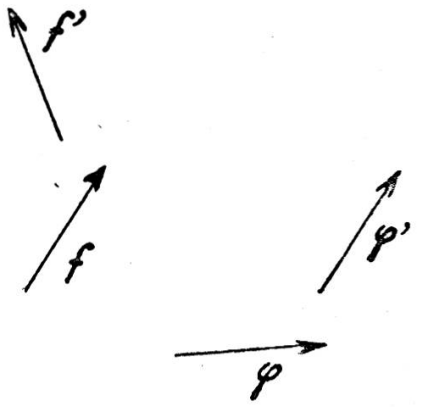

Fig. 3

L'ordre des facteurs est arbitraire, et la décomposition ne peut être effectuée que d'une seule manière. En effet une égalité comme

$$R\mathcal{R} = R'\mathcal{R}'$$

donnerait

$$R'^{-1}R = \mathcal{R}'\mathcal{R}^{-1},$$

ce qui est faux, le premier membre étant une rotation, le second une antirotation.

En résumé le groupe $G = R\mathcal{R}$ des rotations mixtes, est à six paramètres; nous allons montrer qu'un mouvement quelconque au sens large est contenu dans le groupe G, de sorte que l'en-

[1] Cette propriété est la même que celle des *translations euclidiennes* : c'est sur elles que se fondent les propriétés du *parallélogramme de Clifford,* analogues à celles du parallélogramme euclidien dont je parle plus loin.

[2] La succession de deux antirotations est équivalente à une certaine antirotation, la propriété s'établit immédiatement.

semble des rotations mixtes se confond avec celui des mouvements.

La démonstration que nous allons présenter pour établir cette propriété caractéristique de la Géométrie des flèches est sans doute un peu lente : inconvénient racheté par l'intérêt propre qu'offrent les diverses propositions qui lui servent de base.

§ 7 — Analyse du mouvement.

La définition des *couronnes* et des *couronoïdes* — observons-le d'abord — comporte un élément métrique ; elle repose tout entière sur la notion des flèches *conjuguées,* et deux flèches sont conjuguées quand leur distance est égale à 90°.

Par conséquent, *tout mouvement (au sens large) change un couronoïde en un autre couronoïde, et une couronne en une autre couronne.*

De plus, *deux couronnes qui sont conjuguées avant le mouvement le restent après le mouvement.*

Cela posé, remarquons que la position d'une flèche sur la sphère dépend de 3 paramètres et que, par suite, une flèche est déterminée à la surface de la sphère quand on donne ses distances à trois autres arbitrairement choisies[1].

Le théorème à démontrer affirme que tout mouvement, au sens large, est équivalent à une rotation mixte; pour l'établir, il suffit de faire voir qu'il existe toujours une rotation mixte transformant un triangle de flèches (f, f', f'') en un autre $(\varphi, \varphi', \varphi'')$, pourvu que ces triangles soient *congruents* entre eux, autrement dit, pourvu que les distances (ff'), $(f'f'')$, $(f''f)$ soient respectivement égales à leurs correspondantes $(\varphi\varphi')$, $(\varphi'\varphi'')$ et $(\varphi''\varphi)$[2].

[1] Pour donner au raisonnement toute la rigueur nécessaire, il est souvent utile de le projeter dans l'espace E_3'. Ici, par exemple, les trois flèches ne doivent pas appartenir à une même couronne, comme les trois points correspondants ne sauraient être choisis sur une même droite. De même, les 4 distances étant données, il leur correspond deux figures ponctuelles non congruentes; les figures corrélatives de flèches sont congruentes.

[2] Nous particulariserons plus loin, en supposant $(ff'') = (f'f'') = 90°$. Cela n'a pas de conséquence; on pourrait ajouter même l'hypothèse supplémentaire $(ff') = 90°$.

Soient deux flèches déterminées choisies à volonté dans deux couronnes, de rayons quelconques, mais de même centre. Quand on fait tourner ces flèches ensemble autour du centre commun, elles engendrent respectivement les deux couronnes sans que leur situation relative ait changé. Ainsi, étant donné une couronne C, il existe toujours une antirotation qui transforme cette couronne en une autre de forme quelconque[1]; il suffit que la seconde couronne soit concentrique à la première.

Cela posé, reprenons les flèches f, f', f'' et φ, φ', φ''; construisons les couronnes C et Γ unissant f, f' d'une part et φ, φ' d'autre part. Puis transformons Γ par le moyen d'une antirotation $\mathcal{R}$ qui la convertisse en une couronne γ identique à C, à la position près. Soient Φ et Φ' les positions dans γ des transformées des flèches φ et φ'.

En faisant glisser γ à la surface de la sphère par le moyen d'une rotation R, on peut l'appliquer sur C, cela de manière que les flèches f et Φ coïncident. Et alors, à cause de la relation

$$(ff') = (\varphi\varphi') = (\Phi\Phi')$$

f' et Φ' coïncideront aussi[2].

La construction précédente, qui ne nous renseigne pas sur la position définitive de la flèche φ'', est possible d'une infinité de manières. Montrons-le.

Prenons une couronne quelconque. Il est évident qu'une rotation r d'amplitude quelconque, exécutée autour de son centre la laisse invariante, ne fait qu'échanger les unes contre les autres les flèches de la couronne. D'autre part, comme les flèches de la couronne peuvent être associées deux à deux de manière que la situation relative des flèches de chaque couple soit constante d'un couple à l'autre, il existe une infinité d'antirotations ρ qui laissent invariante la même couronne tout en permutant entre eux les éléments qui la composent.

Admettons que r et ρ possèdent la même amplitude; il est

[1] Cela est possible d'une infinité de manières. Je vais y revenir.

[2] On peut toujours imaginer que les sens suivant lesquels f, f' et φ, φ' se succèdent sur leurs couronnes respectives sont identiques; il suffit d'échanger, si besoin est, le centre c d'une des couronnes contre le centre c' diamétralement opposé.

clair que dans ce cas la rotation mixte $r\rho^{-1}$ ou $\rho^{-1}r$ non seulement laissera la couronne invariante dans son ensemble, mais que chaque flèche appartenant à la couronne restera même inaltérée, sous l'effet de l'opération complexe $r\rho^{-1}$

Il existe donc, dans le groupe G, une infinité de mouvements qui ne modifient aucunement les flèches d'une couronne donnée[1].

Sous l'effet de l'opération $r\rho^{-1}$, la couronne conjuguée de C reste invariante, mais c'est seulement considérée en bloc; quant aux flèches qui constituent C', il est facile de voir que chacune subit autour du centre c un déplacement d'amplitude 2ω.

Cette dernière remarque suffit pour achever la démonstration que nous cherchons.

En effet supposons, ce qui est toujours possible, que f'' fasse partie de la couronne conjuguée à f et à f', de sorte que

$$(ff'') = (f'f'') = 90^\circ .$$

Alors, quand f et f' ont été mis en coïncidence avec φ et φ' par le moyen d'une rotation mixte, la flèche φ'' n'a pas encore reçu de position fixe; elle décrit, dans sa totalité, une couronne conjuguée à celle menée suivant f, f', couronne qui comprend aussi la flèche f''.

Et ainsi, *parmi les diverses rotations mixtes, qui amènent* f *sur* φ, *et* f' *sur* φ', *il en existe sûrement une amenant aussi* f'' *en coïncidence avec* φ''.

Cette propriété est équivalente à celle que nous avions en vue : *tout mouvement est identique à une certaine rotation mixte.*

Je dis qu'*il existe, pour un mouvement quelconque, un couple et un seul couple de couronnes, telles que, sous l'effet du mouvement, les flèches qui composent chacune de ces couronnes ne fassent que s'échanger entre elles.* Les deux couronnes invariantes sont d'ailleurs conjuguées entre elles; elles représentent par rapport

[1] Les mouvements $r\rho^{-1}$, d'amplitude arbitraire ω, sont, avec leurs inverses $r^{-1}\rho$, les seuls qui possèdent cette propriété en ce qui concerne la couronne C.

[2] Ce mouvement particulier $r\rho^{-1}$ correspond dans E_3' à une rotation autour d'un axe fixe. Les points de l'axe restent immobiles, l'axe conjugué glisse sur lui-même.

à la sphère l'image des axes conjugués caractérisant un mouvement de l'espace E_3''.

En effet tout mouvement des flèches résulte de la rotation mixte $R\mathcal{R}$. Soit c le centre de la rotation R sur la sphère fixe, c' le point diamétralement opposé. Soient encore γ, f la figure formée par le centre de l'antirotation $\mathcal{R}$ et par une flèche quelconque soumise à cette antirotation.

Les seules couronnes dont la *forme* reste inaltérée sous l'influence de la rotation mixte $R\mathcal{R}$ sont congruentes à celle qu'engendre f en tournant autour de γ. Pour que la *situation* de la couronne n'ait pas changé non plus, il faut que son centre se trouve en c ou en c'. Ces conditions qui sont nécessaires pour l'invariance sont aussi suffisantes.

Il existe donc précisément deux couronnes qui se reproduisent par le mouvement; elles sont centrées en c et c', et leur conformation est identique à celle de la figure (f, γ)[1].

Réciproquement, pour qu'un mouvement soit complètement déterminé, il ne suffit pas de se donner le couple de couronnes conjuguées C et C′ qui reste invariant sous l'effet du mouvement; il y faut ajouter les glissements 2ω, $2\omega'$ subis par chacune de ces couronnes. Les choses se présentent comme suit:

Prenons une rotation R et une antirotation $\mathcal{R}$, chacune d'amplitude ω' en sens contraire, qui laissent l'une et l'autre C′ inaltérée; prenons encore une rotation R′ et une antirotation $\mathcal{R}'$, d'amplitude ω, laissant la couronne C invariante dans son ensemble, non dans ses éléments. Les 4 opérations R, R′, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ exécutées simultanément définissent un mouvement qui ne change pas la position des couronnes C et C′ sur la sphère, tout en les déplaçant le long d'elles-mêmes de quantités respectives ω et ω'. Il n'existe évidemment pas d'autre mouvement produisant cet effet.

Nous avons ainsi obtenu une image concrète du mouvement le plus général dans l'espace E_3''; tout déplacement dans cet espace est complètement caractérisé à l'aide de deux droites conjuguées

[1] On sait que si un mouvement non euclidien laisse immobile un certain point de E_3'', le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe issu de ce point. Un semblable résultat est évident d'après ce qui précède. Si

invariantes dont chacune glisse le long d'elle-même d'une longueur déterminée[1].

§ 8. — Mouvements spéciaux.

Une description complète du mouvement exigerait des développements dans lesquels je ne puis entrer ici faute d'espace.

On connaît l'importance dans E_3^r des transformations orthogonales $r\eta\bar{r}$, et $s\eta\bar{s}$, associés à la transformation ponctuelle $r\eta s$.

Ces deux transformations sont celles des coordonnées plückériennes des droites de l'espace; d'avance il n'est pas douteux qu'elles n'interviennent encore dans la Géométrie des flèches. Ce sont elles qui définiront le mouvement des couronnes; quand on traite celles-ci comme des objets autonomes, elles se définissent par le moyen de coordonnées plückériennes, et celles-ci se décomposent en deux séries qui subissent respectivement les transformations orthogonales en question $r\eta\bar{r}$ et $s\eta\bar{s}$[2].

Je ne puis insister. Mais il est impossible, après avoir parlé du mouvement au point de vue le plus général, de ne pas nous arrêter un instant sur ces mouvements spéciaux, la *rotation* et l'*antirotation* que nous avons vus jouer le rôle de facteurs dans le mouvement général. Pris isolément ils présentent, dans l'ensemble des déplacements, un caractère distinctif très remarquable: c'est de laisser invariantes non plus deux couronnes seulement, mais une infinité.

Ce fait est étroitement lié avec le phénomène du *parallélisme*

une flèche f, après avoir subi une rotation mixte $R\mathcal{R}$ est revenue dans sa position primitive, les deux mouvements R et $\mathcal{R}$ ont lieu autour du même centre; ils sont opposés et d'intensité égale. Il existe alors nécessairement une couronne dont les flèches n'ont pas bougé, et cette couronne contient la flèche donnée.

[1] Le déplacement d'un point de l'espace E_3^r ne dépend, comme on sait, que de la situation du point par rapport aux droites invariantes, ω et ω' étant donnés. Au point de vue algébrique le cosinus du déplacement du point η est égal à la quantité scalaire $(r\eta s\bar{\eta})$.

[2] Formons les six déterminants qui constituent les seules combinaisons bilinéaires gauches où entrent les coordonnées de deux flèches choisies à volonté, ces six déterminants sont les *coordonnées plückériennes* de la couronne joignant ces flèches.

de Clifford dans l'espace E_3^r et en fournit une interprétation extrêmement claire.

1° Considérons toutes les couronnes, au nombre de ∞^2 ayant un centre donné c à la surface de la sphère; chacune reste inaltérée, quelle que soit la rotation qu'on fait subir à la sphère autour de c.

A moins de coïncider, deux pareilles couronnes ne se rencontrent jamais, ou n'ont aucune flèche commune : autrement dit, elles n'appartiennent pas à un même couronoïde.

Les ∞^2 couronnes dont il vient d'être question sont l'image, dans E_3^r, d'un faisceau de droites, qui sont parallèles entre elles, *à gauche.* L'analogie des deux espaces montre à l'instant que deux droites semblables, parallèles entre elles, ne sont pas contenues dans un même plan. Il existe un mouvement tel que si l'une d'entre elles glisse le long d'elle-même d'une longueur ω, toutes les autres en font autant. Et de même que par une flèche, on peut toujours mener une couronne et une seule, qui soit concentrique à une couronne donnée, de même par un point de E_3^r passe toujours une unique droite qui est parallèle à gauche à une droite donnée.

2° Considérons toutes les couronnes, au nombre de ∞^2, dont la forme est donnée *a priori,* tandis que leur situation à la surface de la sphère est arbitraire. Deux semblables couronnes, à moins de coïncider, ne font jamais partie d'un même couronoïde. Il est évident qu'il existe un ensemble de ∞^1 antirotations, d'amplitude quelconque, laissant invariante chacune de ces couronnes : ce sont celles dont le centre est placé, relativement à la flèche mobile, comme l'est le centre de notre couronne par rapport à la flèche qui la décrit.

Dans la Stéréométrie riemanienne, ces couronnes, congruentes entre elles, correspondent aux parallèles de Clifford *à droite.* Les propriétés relatives à cette seconde espèce du parallélisme sont identiques de tout point à celles dont jouit le parallélisme *à gauche.*

3° Nous savons que toute rotation est permutable avec toute antirotation. Par suite, dans E_3^r, si on exécute successivement deux translations, l'une à droite, l'autre à gauche, de manière

qu'un certain point A se transporte tantôt en A′, sous l'influence de la première, tantôt en A″ sous l'influence de la seconde, les points A″ et A′ viendront occuper tous deux la même position finale A‴, après qu'on les aura soumis aux deux translations respectives. Et la figure AA′A″A‴ a ses côtés opposés égaux et parallèles, l'une des paires à gauche, l'autre à droite. Cette différence de qualité dans le parallélisme, et le fait que la figure est gauche au lieu d'être plane sont les seuls traits qui en différencient les propriétés de celle du parallélogramme euclidien.

On voit avec quelle facilité la Géométrie de flèches sphériques rend compte du *parallélisme de Clifford,* cette notion qui reste sans emploi dans la Planimétrie mais joue, en revanche, un rôle si caractéristique dans la Stéréométrie riemannienne.

§ 9. — Relation Trigonométrique.

Le rapport entre la Trigonométrie de l'espace E_3^r, et la règle de la composition des rotations est des plus immédiats : je me borne sur ce sujet par lequel je termine à quelques brèves indications.

On a, tant pour les points d'une droite dans E_3^r, que pour les flèches formant une couronne sur la sphère, la représentation paramétrique suivante ; elle est à peu près évidente

$$H = \eta' \cos s + \eta'' \sin s \ . \tag{15}$$

En ce qui concerne la couronne par exemple, les quaternions η' et η'' représentent deux des flèches qui y sont contenues, distantes d'un quadrant, de sorte que $(\eta'\eta'') = 0$. La quantité s mesure la distance qui sépare la flèche η de la flèche initiale η'.

Si on prend une nouvelle couronne qui rencontre la précédente suivant la même flèche η', la représentation paramétrique correspondante sera

$$H' = \eta' \cos s' + \eta''' \sin s' \ , \tag{16}$$

et l'on a de même $(\eta'\eta''') = 0$.

Le cosinus de la distance S qui sépare les flèches H, H′ de chaque couronne est égal au produit scalaire (HH′) des quan-

tités (15) et (16); et ce dernier, en vertu de $(\eta'\eta'') = (\eta'\eta''') = 0$, est égal à

$$\cos S = \cos s \cos s' + (\eta''\eta''') \sin s \sin s' .$$

Pour deux droites de E_3' le produit $(\eta''\eta''')$ dépend uniquement de l'angle de ces droites. De même, dans le cas de deux couronnes concourantes, le produit en question dépend de ces couronnes seulement, non des flèches qui y sont contenues : on peut donc l'appeler aussi le cosinus de l'*angle* de ces couronnes et écrire en désignant par A cet angle

$$\cos S = \cos s \cos s' + \sin s \sin s' \cos A . \qquad (17)$$

Et ainsi ; *quand une flèche décrit dans deux couronnes qui se rencontrent sous l'angle A, des segments d'amplitude* s *et* s', *la distance S qui sépare les positions finales est donnée par la formule trigonométrique* (17).

Reste à trouver comment s'obtient géométriquement l'angle de deux couronnes concourantes. Soient, à cet effet; O_1 et O_2 les centres des couronnes; réduisons la lamelle η' à l'arc du grand cercle O_1O_2, et faisons la tourner successivement des angles $2s = 180°$, $2s' = 180°$, autour des points O_1 et O_2.

On voit immédiatement que $S = \overline{O_1O_2}$, tandis que la formule (17) donne $\cos S = \cos A$.

Ainsi l'*angle de deux couronnes qui se rencontrent est égal à celui des axes de ces couronnes.*

Ce résultat fondamental précise le sens du théorème (17), dont les conséquences sont fort nombreuses ; elles embrassent notamment la théorie de la perpendicularité entre couronnes et couronoïdes.

Mais l'examen détaillé de ces nouveaux problèmes nous ferait enfler démesurément cet article, sans nous donner autre chose que la preuve réitérée du parallélisme nécessaire qui relie la Géométrie riemannienne à la Cinématique des figures sphériques mobiles sur leur propre sphère.