Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 44 (1917)

Artikel: Sur quelques formules de la théorie de la relativité
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743232

SUR QUELQUES FORMULES

DE LA

THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

PAR

C. CAILLER

---

§ 1. La transformation de Lorentz qui, dans la théorie de la relativité, sert à effectuer le passage entre les coordonnées x, y, z, t d'un événement tel que l'aperçoit un certain observateur S, et les coordonnées x', y', z', t' du même événement vu par un autre observateur S′, se présente sous la forme générale

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,t + \alpha \\ y' &= a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24}\,t + \beta \\ z' &= a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34}\,t + \gamma \\ t' &= a_{41}\,x + a_{42}\,y + a_{43}\,z + a_{44}\,t + \delta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ces formules de transformation sont en pratique rarement employées à cause de leur structure complexe, à vingt paramètres. Malgré les théories vectorielles créées par Minkowski, Sommerfeld et d'autres ([1]), la plupart des auteurs continuent à présenter la théorie et à en développer les conséquences, en partant du système réduit

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,\ y' = y\,,\ z' = z\,,\quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\cdot \qquad (2)$$

Pour parvenir à cette forme des équations, il faut que les deux milieux S et S′, dont chacun s'est géométré euclidienne-

[1]) Elles se trouvent exposées d'une manière suffisamment détaillée, dans le traité bien connu de M. Laue, *das Relativitätsprinzip*, chap. IV.

ment et chronométré par la voie optique, soient rapportés à des systèmes d'axes choisis de manière très spéciale : on sait que les deux trièdres OXYZ et O'X'Y'Z' doivent posséder une même orientation, et que l'origine O' de l'un d'eux glisse avec une vitesse v le long de l'axe OX du premier trièdre.

S'il est vrai que le système réduit (2) suffise pour une représentation claire et précise de la doctrine, il est cependant regrettable que des difficultés mathématiques le fassent préférer au système (1), lequel conserve un avantage signalé au point de vue de la généralité et de la symétrie. Et l'on doit saluer comme un progrès toute méthode qui permettrait de manier ce système (1) avec facilité, sans complication superflue, ni théorie construite *ad hoc*, comme celle de Minkowski.

Tel est, si je ne me trompe, le bénéfice à retirer ici de l'emploi de l'algorithme bien connu des quaternions. L'emploi en est si aisé qu'il supprime complètement les méthodes vectorielles relatives à l'espace à 4 dimensions, ou plutôt qu'il confère à ces méthodes un caractère intuitif ; les formules viennent se classer sans effort dans l'esprit, à une place marquée d'avance en quelque sorte.

L'intervention des quaternions dans la théorie de la relativité s'explique d'ailleurs de la manière la plus naturelle ; elle provient de ce que l'invariant des formules de transformation (1), doit présenter la forme

$$c^2 (t_1 - t_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 - (y_1 - y_0)^2 - (z_1 - z_0)^2 ,$$

et celle-ci est identique à celle de l'invariant caractéristique de la Géométrie non-euclidienne de Lobatchewsky, à savoir :

$$\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 .$$

C'est encore le même invariant qui se rencontre dans la Géométrie des corps solides ; cette coïncidence des invariants dans les trois théories explique suffisamment l'intime parenté qui les unit. Les quaternions qui interviennent d'une manière si efficace dans deux d'entre elles ne sauraient manquer de jouer aussi un rôle important dans la dernière, la théorie de la relativité.

§ 2. Pour la symétrie des notations, nous désignerons les coordonnées rectangles mesurées par l'observateur S, x_1, x_2, x_3 au lieu de x, y, z; de même le temps indiqué par les horloges du milieu S sera noté x_0 au lieu de t. J'admets pour simplifier l'écriture que les unités spatiale et temporelle ont été choisies de manière à réduire à l'unité la vitesse de la lumière: nous avons, autrement dit, $c = 1$. En primant les lettres, nous écrivons x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 pour les coordonnées relatives au second observateur S'.

Suivant ces notations, et en posant par une simplification sans importance, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, les formules (1) s'écrivent sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x'_0 &= a_{00}\,x_0 + a_{01}\,x_1 + a_{02}\,x_2 + a_{03}\,x_3\,, \\ x'_1 &= a_{10}\,x_0 + a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3\,, \\ x'_2 &= a_{20}\,x_0 + a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3\,, \\ x'_3 &= a_{30}\,x_0 + a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Les coefficients de ce schéma doivent être choisis de manière que l'on ait

$$x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\ ;$$

il faut de plus que (3) fasse partie d'un groupe continu de transformation à 6 paramètres. Il en résulte, comme on sait, que le déterminant des formules (3), doit être égal à $+1$, non à -1. Le groupe auquel appartient (3) n'est autre que celui des mouvements dans l'espace de Lobatchewsky.

§ 3. Considérons un biquaternion quelconque,

$$A = (a_0 + b_0 i) + (b_1 + a_1 i)\,i_1 + (b_2 + a_2 i)\,i_2 + (b_3 + a_3 i)\,i_3\ ,$$

où les a et b sont des nombres réels, i l'unité imaginaire ordinaire, et les i_1, i_2, i_3 les unités de Hamilton douées des propriétés connues

$$\begin{aligned} i_1^2 = i_2^2 &= i_3^2 = -1 \\ i_1 = i_2\,i_3 &= -\,i_3\,i_2 \\ i_2 = i_3\,i_1 &= -\,i_1\,i_3 \\ i_3 = i_1\,i_2 &= -\,i_2\,i_1 \end{aligned}$$

Au biquaternion A s'associent trois autres biquaternions qu'on peut distinguer les uns des autres par des dénominations convenables.

Le quaternion *conjugué* $\overline{A}$, s'obtient, en changeant dans A, le signe des trois quantités i_1, i_2, i_3, sans toucher à i. De la sorte les parties scalaires de A et $\overline{A}$ sont identiques, tandis que les parties vectorielles diffèrent seulement par leur signe.

Le quaternion $\underline{A}$, *opposé* à A, s'obtient au contraire en changeant i en $-i$, i_1, i_2, i_3 restant inchangés. Ainsi les parties réelles de A et $\underline{A}$ sont les mêmes, tandis que les imaginaires sont égales et de signe contraire.

Le quaternion $\overline{\underline{A}}$ est le *contraire* du quaternion A quand on l'obtient en changeant à la fois le signe des 4 quantités i, i_1, i_2, i_3. Dans A et $\overline{\underline{A}}$ les parties paires ([1]) sont identiques, les parties impaires égales et de signe inverse. Ces parties sont données respectivement par les formules

$$\frac{A+\overline{\underline{A}}}{2} = a_0 + i(a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3) ,$$

$$\frac{A-\overline{\underline{A}}}{2} = b_0 i + b_1 i_1 + b_2 i_3 + b_3 i_3 \quad .$$

Il est clair que les relations entre un biquaternion A, son *conjugué*, son *opposé*, et son *contraire* sont réciproques. Rappelons ici les règles qui servent à déterminer le conjugué et le contraire d'un produit de quaternions. Avec trois facteurs, par exemple, ces règles prennent la forme

$$\overline{ABC} = \overline{C}\,\overline{B}\,\overline{A} \ , \ \text{et} \ \overline{\underline{ABC}} = \overline{\underline{C}}\,\overline{\underline{B}}\,\overline{\underline{A}} \ ,$$

l'ordre des facteurs ne pouvant être alterné, comme il est bien connu.

Avec le biquaternion A, considérons-en un autre, de même forme $U = U_0 + i_1 U_1 + i_2 U_2 + i_3 U_3$, dont le *module* soit l'unité. Il faut, autrement dit, qu'on ait

$$U\overline{U} = \overline{U}U = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 1 \ . \qquad (4)$$

Or, les quantités U_k sont complexes, du type $U_k = u_k + v_k i$; l'équation précédente (4) se subdivise donc en deux autres

[1]) Sont paires les quantités 1, ii_1, ii_2, ii_3, sont impaires i, i_1, i_2, i_3.

réelles, et de cette manière il existe un ensemble continu de biquaternions-unités U. Cet ensemble dépend de $2 \times 4 - 2$, ou 6, paramètres arbitraires réels, soit autant que doivent en contenir les formules (3).

Choisissons à volonté U dans l'ensemble en question, considérons A comme un biquaternion variable quelconque, et posons l'équation

$$A' = U\,A\,\underline{\overline{U}}\ . \tag{5}$$

Cette équation fait correspondre à tout A, un autre quaternion A′, transformé du premier par l'opérateur $U\ .\ \underline{\overline{U}}$. D'après les règles et opérations rappelées plus haut, il est clair que de (5) on tire

$$\underline{\overline{A'}} = U\,\underline{\overline{A}}\,\underline{\overline{U}}\ , \tag{6}$$

et par suite

$$\frac{A' \pm \underline{\overline{A'}}}{2} = U\,\frac{A \pm \underline{\overline{A}}}{2}\,\underline{\overline{U}}\ . \tag{7}$$

Autrement dit, *la parité du quaternion* A *n'est pas altérée par l'opérateur* $U\ .\ \overline{U}$ *auquel il est soumis.* Ou bien, *la partie paire de* A′ *provient uniquement de la partie paire de* A ; *les parties impaires se transforment de même l'une dans l'autre.*

De là résulte immédiatement que la transformation (5), laquelle, relativement aux composantes A_0, A_1, A_2, A_3 du quaternion A, est linéaire et du type (3), possède des *coefficients réels.*

En second lieu, reprenons l'équation (5) et calculons les conjuguées des deux membres ; il vient $\overline{A'} = \underline{U}\overline{A}\overline{U}$, par suite

$$A'\overline{A'} = UA\underline{\overline{U}}\,\underline{U}\overline{A}\overline{U} = U(A\overline{A})\overline{U} = A\overline{A}\,U\overline{U}\ .$$

Mais U est un quaternion-unité, donc enfin

$$A'\overline{A'} = A\overline{A}\ .$$

Ainsi, quel que soit le quaternion-unité U, *le module reste inaltéré par la transformation* (5), autrement dit, on a

$$\begin{aligned}&(a'_0 + b'_0 i)^2 + (b'_1 + a'_1 i)^2 + (b'_2 + a'_2 i)^2 + (b'_3 + a'_3 i)^2 \\ &= (a_0 + b_0 i)^2 + (b_1 + a_1 i)^2 + (b_2 + a_2 i)^2 + (b_3 + a_3 i)^2\ .\end{aligned}$$

Séparons le réel de l'imaginaire, nous trouvons les deux invariants

$$a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - (b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) \; ,$$
$$a_0\, b_0 + a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \; .$$

Mais nous savons d'autre part, d'après la propriété de parité, que les a' proviennent exclusivement des a, et les b' des b; les invariants sont donc au nombre de trois, ce sont

$$\begin{aligned} &a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \; , \\ &b_0^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2 \; , \\ &a_0\, b_0 + a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \; . \end{aligned}$$

Ce résultat comprend, comme cas particulier, celui que nous cherchons.

Prenons en effet tous les b nuls, remplaçons les a par de nouvelles variables x, et considérons un *tétravecteur* de composantes x_0, x_1, x_2, x_3, ou bien sous forme quaternionnienne

$$\mathrm{X} = x_0 + i(i_1\, x_1 + i_2\, x_2 + i_3\, x_3) \; . \tag{8}$$

Qu'on applique à ce tétravecteur l'opérateur $\mathrm{UX}\underline{\overline{\mathrm{U}}}$, il se transforme linéairement en un nouveau vecteur $\mathrm{X}'(x'_0\, x'_1\, x'_2\, x'_3)$, et l'on a

$$\mathrm{X}' = x_0' + i\,(i_1 x_1' + i_2 x_2' + i_3\, x_3') = \mathrm{UX}\underline{\overline{\mathrm{U}}} \; . \tag{9}$$

Cette formule (9) remplit toutes les conditions imposées à (3); comme cette dernière, elle a ses coefficients réels, elle possède l'invariant

$$x'^2_0 - x'^2_1 - x'^2_2 - x'^2_3 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad ,$$

enfin son déterminant est égal à $+1$, et non à -1, puisque (9) fait partie d'un ensemble continu de transformations différant les unes des autres par la valeur du quaternion variable U.

En un mot, toute transformation du type (9), résolue dans ses éléments réels, équivaut à une transformation de la forme (3) telle que celle qu'on considère dans la théorie de la relativité.

§ **4.** La réciproque est vraie, et tout système de la forme (3) peut prendre la forme (9), pourvu qu'il soit direct et laisse invariable la quantité $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Le fait paraît d'avance extrêmement vraisemblable, puisqu'il entre dans (3) et (9) le même nombre de paramètres arbitraires, six des deux côtés. Pour démontrer plus rigoureusement cette réciproque, il faudrait évidemment exprimer le quaternion U en fonction explicite des coefficient a_{ij} donnés a priori. Je ne m'attarderai pas à résoudre ici ce problème dont la solution, qui n'exige que l'extraction d'une racine carrée(1), se tirerait facilement des formules que je vais développer dans un instant à propos des *hexavecteurs*. Je me bornerai à indiquer, sans démonstration, la construction équivalente aux formules en question par laquelle peut se déterminer le quaternion U.

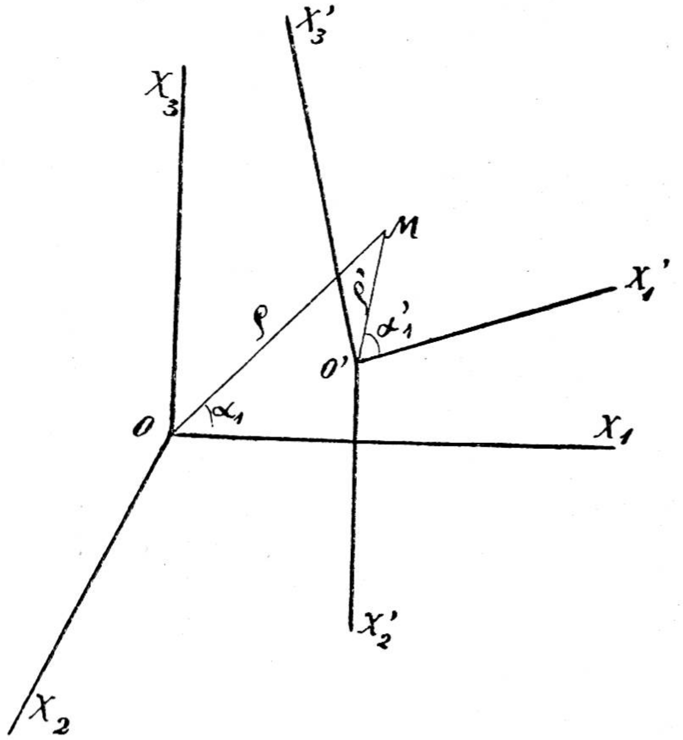

Fig. 1

Avec M. Variçak, considérons les x_0, x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point M de l'espace de Lobatchewsky rapporté à un trièdre $OX_1\,X_2\,X_3$, de sorte que

$$x_0 = \operatorname{ch}\varrho,\ x_1 = \operatorname{sh}\varrho\cos\alpha_1\ ,\ x_2 = \operatorname{sh}\varrho\cos\alpha_2\ ,\ x_3 = \operatorname{sh}\varrho\cos\alpha_3\ .$$

(1) Il est clair qu'on peut remplacer U par — U, dans la formule (9).

Dans cette interprétation, les formules (3) sont celles d'un changement d'axes, et les nouvelles coordonnées du même point, relatives au trièdre $O'X'_1X'_2X'_3$ sont

$$x'_0 = \operatorname{ch}\varrho', \; x_1' = \operatorname{sh}\varrho' \cos\alpha_1', \; x_2' = \operatorname{sh}\varrho' \cos\alpha_2', \; x_3' = \operatorname{sh}\varrho' \cos\alpha'_3 .$$

Cela posé, nommons λ l'axe du mouvement hélicoïdal qui amène le trièdre primitif en coincidence avec le second, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les composantes du dit axe suivant le premier des deux trièdres ; nommons encore w la *moitié* de l'amplitude du mouvement hélicoïdal, de manière que α étant l'angle de rotation, et β la grandeur du glissement, on ait

$$2w = \alpha + \beta i .$$

Nous aurons alors

$$U = \cos w - \sin w \,(i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + i_3\lambda_3) .$$

Par exemple, dans le cas des formules réduites (2), les deux

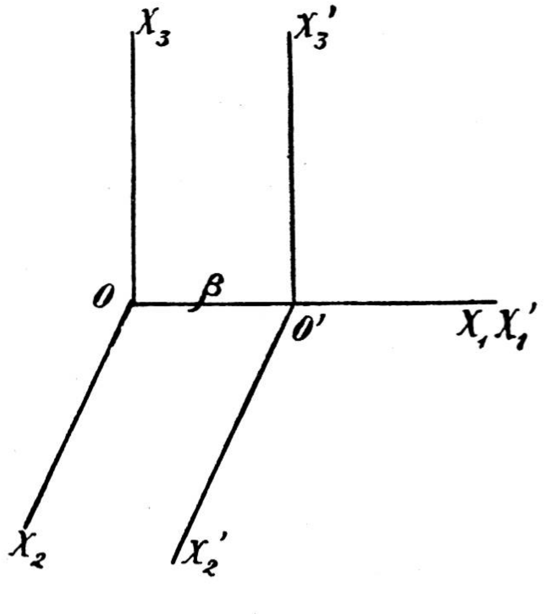

Fig. 2

systèmes d'axes sont dans la situation donnée par la figure 2 ; si on désigne par v la vitesse du milieu S′ relativement au milieu S, celle de la lumière étant toujours prise comme unité, la grandeur du glissement β est donnée par les relations

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \ , \ \operatorname{sh}\beta = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \ , \ \operatorname{th}\beta = v \ ,$$

et l'on a pour le quaternion U la valeur

$$U = \underline{\bar{U}} = \operatorname{ch}\frac{\beta}{2} - i i_1 \operatorname{sh}\frac{\beta}{2} \ .$$

En opérant suivant la formule

$$X' = U\,(x_0 + i i_1 x_1 + i i_2 x_2 + i i_3 x_3)\,U \ ,$$

il est très aisé de constater qu'on retombe sur les formules (2) d'Einstein données plus haut.

§ 5. La formule de transformation $U\,.\,\underline{\bar{U}}$ des *tétravecteurs*, n'est pas la seule qu'il y ait lieu de considérer. Prenons un quaternion de forme paire, tel que le suivant

$$\bar{Y} = y_0 - i\,(i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_3) \ ,$$

où les y doivent subir la transformation (3) quand on passe du point de vue de S à celui de S'. Un vecteur du type $\bar{Y}$ sera dit *tétravecteur de seconde espèce* il est clair que le conjugué de $\bar{Y}$, à savoir

$$Y = y_0 + i\,(i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_3) \ ,$$

est un tétravecteur de première espèce. De là résulte que si les tétravecteurs de première espèce subissent la transformation $U\,.\,\underline{\bar{U}}$, ceux de seconde espèce subissent la transformation conjuguée $\underline{U}\,.\,\bar{U}$. En un mot on change un tétravecteur d'espèce en changeant le signe des coordonnées-espace, sans changement de la coordonnée-temps, ou l'inverse.

Soient deux tétravecteurs, l'un X de première espèce, l'autre Y de seconde espèce. Le produit XY subit la transformation $U\,.\,\underline{\bar{U}}\,\underline{U}\,.\,\bar{U}$, ou réduction faite, $U\,.\,\bar{U}$; on a donc

$$X'Y' = UXY\bar{U} \ .$$

Mais il est clair que la transformation $U\,.\,\bar{U}$ est sans effet sur la partie scalaire du quaternion auquel elle est appliquée; si donc on a posé (¹)

$$X = x_0 + i(i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) \ , \text{ et } Y = y_0 + i(i_1 y_1 + i_2 y_2 + i_3 y_3) \ ,$$

et que X et Y soient d'espèce différente, le produit

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \ , \qquad (10)$$

est invariant.

Il est clair que la propriété précédente détermine le mode de variation des y, pourvu qu'on connaisse le mode de variation des x; la réciproque est donc exacte, et par suite, *si* (10) *est invariant et que* X *soit un tétravecteur de première espèce,* Y *sera de seconde espèce.*

Voici une application importante du théorème précédent. Soit f un scalaire, nous avons identiquement

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial f}{\partial x'_0} dx'_0 + \frac{\partial f}{\partial x'_1} dx'_1 + \frac{\partial f}{\partial x'_2} dx'_2 + \frac{\partial f}{\partial x'_3} dx'_3 \ .$$

Or dx_0, dx_1, dx_2, dx_3 est un tétravecteur de première espèce, donc le *vecteur symbolique, dont les composantes sont*

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \ , \ \frac{\partial}{\partial x_1} \ , \ \frac{\partial}{\partial x_2} \ , \ \frac{\partial}{\partial x_3} \ ,$$

est de seconde espèce. Cela signifie que le quaternion

$$\frac{\partial}{\partial x_0} - i\left(i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \ .$$

subit, par le passage de S à S', la transformation $U \ . \ \underline{\overline{U}}$, identique à celle des tétravecteurs ordinaires (²).

¹) Remarquer ici le changement des notations.

²) On pourrait aussi observer que les parties paires et impaires d'un biquaternion subissent, chacune pour son compte, la transformation $U \ . \ \underline{\overline{U}}$; or on changerait la parité en introduisant le facteur $-i$ dans la seconde des parties en question.

§ 6. Nous venons d'avoir affaire à la transformation $U \,.\, \overline{U}$; elle est visiblement de module unité, ne change donc pas le module du quaternion

$$K = \eta_0 + i_1\eta_1 + i_2\eta_2 + i_3\eta_3 \qquad (11)$$

auquel elle est appliquée. D'autre part, étant sans effet sur la partie scalaire de K, elle transforme en un vecteur le vecteur

$$H = i_1\eta_1 + i_2\eta_2 + i_3\eta_3 \;, \qquad (11 \text{ bis})$$

cela sans modification de la somme

$$\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \eta_3{}^2 \;.$$

Autrement dit, la transformation $U \,.\, \overline{U}$ est *orthogonale*, elle est de plus *directe* à cause de la valeur du déterminant, laquelle est évidemment égale à $+ 1$.

Cela posé, nous appellerons *hexavecteur* tout biquaternion H dépourvu de partie scalaire qui subit la transformation orthogonale

$$H' = UH\overline{U} \;, \qquad (12)$$

en même temps qu'un tétravecteur subit la transformation (9). Pour justifier la dénomination précédente, il importe de relever le fait que les trois composantes de H sont généralement complexes et se présentent sous la forme

$$\eta_1 = e_1 + h_1 i \;,\; \eta_2 = e_2 + h_2 i \;,\; \eta_3 = e_3 + h_3 i \;. \qquad (13)$$

Au lieu donc de définir l'hexavecteur par la formule (11 *bis*), on pourrait le faire à l'aide du tableau

$$\begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}$$

lequel contient six quantités réelles.

La conception des hexavecteurs, très importante dans la théorie de la relativité, se rencontre aussi en Géométrie non-euclidienne, où elle se rattache à la notion des coordonnées linéaires.

Soient

$$X = x_0 + i\,(i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3) \;,$$
$$Y = y_0 + i\,(i_1y_1 + i_2y_2 + i_3y_3) \;,$$

deux tétravecteurs (de première espèce) représentatifs de deux points. Nous savons que le quaternion $X\overline{Y}$, se transforme suivant la formule $U \,.\, \overline{U}$. Or, en opérant la multiplication, on trouve

$$H = \eta_0 + i_1 \eta_1 + i_2 \eta_2 + i_3 \eta_3 \ ,$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \ , \\
\eta_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 + i\,(x_1 y_0 - x_0 y_1) \ , \\
\eta_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 + i\,(x_2 y_0 - x_0 y_2) \ , \\
\eta_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 + i\,(x_3 y_0 - x_0 y_3) \ ,
\end{aligned}$$

Les quantités η_1, η_2, η_3 sont les *coordonnées linéaires* de la droite qui joint X à Y ; on voit par là que les composantes réelles

$$\begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix} , \quad \text{où} \quad e_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \ , \quad h_1 = x_1 y_0 - x_0 y_1 \ , \ \text{etc.}$$

qui définissent une droite dans l'espace, jouissent de la propriété caractéristique de l'hexavecteur contenue dans la formule (12).

La propriété des déterminants $x_2 y_3 - x_3 y_2$, $x_1 y_0 - x_0 y_1$, et de leurs analogues fournira souvent, de manière expéditive, les formules explicites de la transformation des hexavecteurs contenues implicitement dans la forme $U \,.\, \overline{U}$.

C'est ainsi que si les mesures des deux observateurs S et S' sont liées entre elles par les formules réduites d'Einstein (2), les hexavecteurs subiront également une transformation de forme réduite ; en calculant les dits déterminants, nous trouvons de suite le résultat

$$e_1 \ , \quad \frac{e_2 - \frac{v}{c} h_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ , \quad \frac{e_3 + \frac{v}{c} h_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ ,$$

$$h_1 \ , \quad \frac{h_2 + \frac{v}{c} e_3}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ , \quad \frac{h_3 - \frac{v}{c} e_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ .$$

§ 7. Soit désormais η l'hexavecteur (11^{bis}), privé de toute partie scalaire, ou

$$\eta = e + hi = \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix} .$$

Il est évident que

$$i\eta = -h + ei = \begin{Bmatrix} -h_1 & -h_2 & -h_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{Bmatrix},$$

se transforme aussi suivant la formule U . $\overline{\text{U}}$. C'est donc un hexavecteur, on le nomme le *dual* du premier ; on peut dire aussi qu'il lui est *orthogonal*.

Si $\eta = e + hi$, et $\eta' = e' + h'i$ sont deux hexavecteurs, leur produit vectoriel est aussi un hexavecteur admettant la transformation U . $\overline{\text{U}}$; ses composantes suivant les axes coordonnés sont

$$\eta_2\eta'_3 - \eta_3\eta'_2 \ , \ \eta_3\eta'_1 - \eta_1\eta'_3 \ , \ \eta_1\eta'_2 - \eta_2\eta'_1 \ ;$$

en décomposant ces quantités en leurs parties respectivement réelle et imaginaire, nous trouvons les six quantités du tableau

$$\begin{Bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{Bmatrix}$$

relatif au dit hexavecteur. Ce sont

$$\begin{aligned}
E_1 &= e_2 e'_3 - h_2 h'_3 - e_3 e'_2 + h_3 h'_2 \ , \\
E_2 &= e_3 e_{,1} - h_3 h'_1 - e_1 e'_3 + h_1 h'_3 \ , \\
E_3 &= e_1 e'_2 - h_1 h'_2 - e_2 e'_1 + h_2 h'_1 \ , \\
H_1 &= e_2 h'_3 + h_2 e'_3 - e_3 h'_2 - h_3 e'_2 \ , \\
H_2 &= e_3 h'_1 + h_3 e'_1 - e_1 h'_3 - h_1 e'_3 \ , \\
H_3 &= e_1 h'_2 + h_1 e'_2 - e_2 h'_1 - h_2 e'_1 \ .
\end{aligned}$$

Les deux propriétés précédentes sont évidentes ; je terminerai ces développements théoriques par une dernière proposition, moins immédiate, et dont les applications sont très importantes.

Désignons par η, comme ci-devant, un hexavecteur quelconque, par X un tétravecteur : je dis que le produit

$$i\eta \mathrm{X} \ ,$$

lequel est un biquaternion de forme générale, subit la transformation des tétravecteurs U . $\underline{\overline{\text{U}}}$.

En effet, au jugement de l'observateur S', les deux facteurs du produit deviennent respectivement $\mathrm{U}\, i\eta\, \overline{\mathrm{U}}$, $\mathrm{UX}\underline{\overline{\mathrm{U}}}$, et le produit lui-même se transforme en

$$\mathrm{U}\, i\eta\, \overline{\mathrm{U}}\mathrm{UX}\underline{\overline{\mathrm{U}}}, \text{ ou } \mathrm{U}\, i\eta \mathrm{X}\underline{\overline{\mathrm{U}}} \ .$$

Posons

$$\eta = i_1\eta_1 + i_2\eta_2 + i_3\eta_3 \quad ,$$
$$X = x_0 + i(i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3) \; ,$$
$$i\eta X = \xi_0 + i(i_1\xi_1 + i_2\xi_2 + i_3\xi_3) \; ;$$

en opérant les calculs, nous trouvons pour les quantités ξ, qui sont généralement complexes, les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 \; , \\ \xi_1 &= x_0\eta_1 + i(x_3\eta_2 - x_2\eta_3) \; , \\ \xi_2 &= x_0\eta_2 + i(x_1\eta_3 - x_3\eta_1) \; , \\ \xi_3 &= x_0\eta_3 + i(x_2\eta_1 - x_1\eta_3) \; . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Mais, puisque le biquaternion ξ, se transforme comme un tétravecteur, sa partie paire est un tétravecteur effectif. Remplaçons dans les formules ci-dessus $\eta = e + hi$, puis limitons-nous aux parties réelles, nous obtenons alors immédiatement le résultat que voici.

Si

$$\begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}$$

est un hexavecteur, x_0, x_1, x_2, x_3 *un tétravecteur, les quatre quantités suivantes*

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \; , \\ X_1 &= x_0 e_1 + x_2 h_3 - x_3 h_2 = x_0 e_1 + [xh]_1 \; , \\ X_2 &= x_0 e_2 + x_3 h_1 - x_1 h_3 = x_0 e_2 + [xh]_2 \; , \\ X_3 &= x_0 e_3 + x_1 h_2 - x_2 h_1 = x_0 e_3 + [xh]_3 \; , \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

représentent les composantes d'un nouveau tétravecteur.

La réciproque est vraie. Car la substitution linéaire subie par $\begin{Bmatrix} e \\ h \end{Bmatrix}$ est déterminée par les transformations opérées sur les x et X. *Si donc ces dernières sont les composantes de deux tétravecteurs, la quantité* $\eta = e + hi$ *représente forcément un hexavecteur.* Il existe évidemment un énoncé analogue touchant les formules (14) plus générales que (15).

§ 8. Je désire appliquer en finissant les notions générales qui précèdent à deux problèmes classiques de la théorie de la relativité. Le premier consiste à établir les conditions d'invariance des équations du mouvement de l'électron quand on passe du point de vue de l'observateur S à celui de l'observateur S′; le second problème est celui de l'invariance des équations du champ électro-magnétique dans les mêmes circonstances.

Une différence capitale existe, on le sait, au sujet de la notion de force entre la Dynamique classique, et la Mécanique relativiste. La première, avec Newton et Galilée, exige que la force soit un élément invariable estimé de la même manière par deux observateurs animés l'un par rapport à l'autre d'une translation rectiligne uniforme. D'après la seconde, les équations du mouvement doivent présenter une forme identique dans les deux milieux normaux S et S′, optiquement chronométrés. C'est l'application à la Mécanique du principe général de relativité ; il implique l'abandon d'une force invariante pour les deux observateurs.

En combinant le principe de relativité avec ce postulat que l'accélération initiale d'un électron doit obéir à la seconde loi de Newton, Einstein et Minkowski ont obtenu comme suit les équations du mouvement dans la nouvelle Mécanique.

Désignons par σ, le temps *propre,* défini par l'équation

$$d\sigma = \sqrt{dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2} = dx_0 \sqrt{1 - q^2} \quad ,$$

où q représente la vitesse du mobile. On sait, et on peut vérifier à l'instant, que la quantité σ possède une valeur indépendante du système de référence.

De là résulte que

$$\frac{dx_0}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \; , \; \frac{dx_1}{d\sigma} = \frac{q_1}{\sqrt{1-q^2}} \; , \; \frac{dx_2}{d\sigma} = \frac{q_2}{\sqrt{1-q^2}} \; , \; \frac{dx_3}{d\sigma} = \frac{q_3}{\sqrt{1-q^2}} \; ,$$

sont les composantes d'un tétravecteur, la *tétravitesse.*

Prenons pour équations du mouvement les suivantes

$$\mu \frac{d^2 x_0}{d\sigma^2} = \mathrm{M}_0 \; , \; \mu \frac{d^2 x_1}{d\sigma^2} = \mathrm{M}_1 \; , \; \mu \frac{d^2 x_2}{d\sigma^2} = \mathrm{M}_2 \; , \; \mu \frac{d^2 x_3}{d\sigma^2} = \mathrm{M}_3 \; , \quad (16)$$

μ étant une constante caractéristique du mobile.

Il est clair que les premiers membres de (16) représentent les composantes d'un tétravecteur ; pour que, conformément au principe de relativité, les équations se présentent de la même manière aux deux observateurs, il faut que les seconds membres

M_i soient aussi les composantes d'un second tétravecteur. C'est lui qu'on nomme la *tétraforce* (au sens de Minkowski).

Les *composantes-espace* de la tétraforce, M_1, M_2, M_3, sont aussi les composantes de la force de Minkowski ; de leur valeur supposée connue on tire la *composante-temps* M_0. En effet, comme on a identiquement

$$\left(\frac{dx_0}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx_1}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{dx_2}{d\sigma}\right)^2 = 1 ,$$

et par suite

$$\frac{dx_0}{d\sigma}\frac{d^2x_0}{d\sigma^2} - \frac{dx_1}{d\sigma}\frac{d^2x_1}{d\sigma^2} - \frac{dx_2}{d\sigma}\frac{d^2x_2}{d\sigma^2} - \frac{dx_3}{d\sigma}\frac{d^2x_3}{d\sigma^2} = 0 ,$$

les formules (16) donneront

$$M_0 = M_1\frac{dx_1}{dx_0} + M_2\frac{dx_2}{dx_0} + M_3\frac{dx_3}{dx_0} ,$$

ou

$$M_0 = M_1 q_1 + M_2 q_2 + M_3 q_3 .$$

D'où résulte que la composante M_0 est égale au travail élémentaire de la force par unité de temps. Et il est évident que cette décomposition de la tétraforce en *force* et *travail,* laquelle est invariante dans l'ancienne mécanique, prend dans la nouvelle un caractère strictement relatif : elle dépend de l'observateur qui examine le mouvement et n'est pas la même pour S et pour S'.

Adaptons ces généralités au mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique.

Soit ε la charge de l'électron, q sa vitesse, e le champ électrique, h le champ magnétique ; la force pondéromotrice agissant sur l'électron sera donnée, comme on sait, par la formule vectorielle

$$\varepsilon\frac{e + [qh]}{\sqrt{1-q^2}} ,$$

ou

$$\varrho\,(e + [qh]) ,$$

en posant $\rho\sqrt{1-q^2} = \varepsilon$ [1]. De là, immédiatement, les qua-

[1]) Il est aisé de voir d'après cela que ϱ est la *densité* de l'électron mobile, la charge restant invariable.

tre composantes de la force de Minkowski, appliquée à l'électron.

Posons, pour abréger,

$$\varrho_0 = \varrho \ , \ \varrho_1 = \varrho q_1 \ , \ \varrho_2 = \varrho q_2 \ , \ \varrho_3 = \varrho q_3 \ , \qquad (17)$$

ou

$$\varrho_0 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-q^2}}, \varrho_1 = \frac{\varepsilon q_1}{\sqrt{1-q^2}}, \varrho_2 = \frac{\varepsilon q_2}{\sqrt{1-q^2}}, \varrho_3 = \frac{\varepsilon q_3}{\sqrt{1-q^2}} \ ; \quad \binom{17}{\text{bis}}$$

nous trouvons pour les composantes de la tétraforce

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= e_1\varrho_1 + e_2\varrho_2 + e_3\varrho_3 \ , \\ M_1 &= e_1\varrho_0 + h_3\varrho_2 - h_2\varrho_3 \ , \\ M_2 &= e_2\varrho_0 + h_1\varrho_3 - h_3\varrho_1 \ , \\ M_3 &= e_3\varrho_0 + h_2\varrho_1 - h_1\varrho_2 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Comparons le système (18) au système (15); M, nous le savons, doit être un tétravecteur, et (17^{bis}) ou ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3, en donne un autre. Donc, pour que le mouvement de l'électron ait le caractère invariant qui nous est imposé, il faut, suivant esl conclusion du paragraphe précédent que le *vecteur*

$$\eta = e + hi = \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}$$

soit un hexavecteur.

§ 9. On est conduit à la même conséquence quand on étudie les conditions moyennant lesquelles le champ lui-même possède un caractère invariant quel que soit l'observateur, S ou S′, qui l'examine.

Les équations de Maxwell-Hetz sont les suivantes, sous forme vectorielle.

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} h = \dot{e} + \varrho q \ , && \operatorname{rot} e = -\dot{h} \ , \\ &\operatorname{div} e = \varrho \ , && \operatorname{div} h = 0 \ ; \end{aligned}$$

ici $\dot{e}$, par exemple, signifie $\frac{\partial e}{\partial t}$ ou $\frac{\partial e}{\partial x_0}$.

Employons pour le *tétracourant de convection* les notations de la formule (17) ; on constate à l'instant que les équations précédentes s'obtiennent en séparant le réel et l'imaginaire dans les deux que voici

$$\mathrm{div}\,(e + hi) = \varrho_0 \ ,$$

$$\frac{1}{i}\,\mathrm{rot}_k\,(e + hi) - \frac{\partial}{\partial x_0}\,(e_k + h_k i) = \varrho_k \ . \qquad (\mathrm{k} = 1.2.3)$$

Introduisons dans les trois dernières les facteurs ii_1, ii_2, ii_3, posons $\eta = e + hi = (e_1 + h_1 i)\, i_1 + \ldots$ et

$$\mathrm{R} = \varrho_0 + i\,(i_1 \varrho_1 + i_2 \varrho_2 + i_3 \varrho_3) \ ,$$

additionnons enfin les quatre formules, après avoir remplacé les facteurs symboliques *div* et *rot* par leurs valeurs développées, il vient

$$\mathrm{R} = \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\eta_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\eta_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\eta_3 \\ + \left[-\dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_0} + i\left(\dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial \eta_3}{\partial x_2}\right)\right] ii_1 \\ + \left[-\dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_0} + i\left(\dfrac{\partial \eta_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_3}\right)\right] ii_2 \\ + \left[-\dfrac{\partial \eta_3}{\partial x_0} + i\left(\dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x_1}\right)\right] ii_3 \end{array}\right\} . \qquad (19)$$

Telle est la forme quaternion des équations du champ. Il y figure deux *tétravecteurs* (de première espèce) ; l'un est le tétracourant de convection R, l'autre est le vecteur symbolique

$$-\frac{\partial}{\partial x_0}\,,\ \frac{\partial}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial}{\partial x_2}\,,\ \frac{\partial}{\partial x_3}\ .$$

Comparons la formule (19) aux formules (14) et rappelons le théorème qui termine le paragraphe (7). La conséquence suivante se dégage immédiatement ; *pour que les équations du champ se reproduisent sans changement quand on passe du point de vue de l'observateur* S *à celui de l'observateur* S', *il faut que le quaternion* $\eta = \mathrm{e} + \mathrm{hi}$ *soit un hexavecteur*. Cette condition est identique à celle tirée de la Dynamique de l'électron ; pour vérifier dans les deux théories le principe de relativité, il faut donc et il suffit que le champ électromagnétique η subisse la transformation caractéristique de l'hexavecteur.

J'ajoute que les notations quaternionniennes, employées exclusivement à toute autre, font ressortir au premier coup d'œil les invariances imposées par le principe de relativité.

Posons

$$\eta = e + hi = \eta_1 i_1 + \eta_2 i_2 + \eta_3 i_3$$

pour l'hexavecteur du champ,

$$X = x_0 + i\,(i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3),$$

pour le tétravecteur déterminant la position de l'électron,

$$\Delta = -\frac{\partial}{\partial x_0} + i\left(i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

pour le tétravecteur symbolique de différentiation,

$$R = \varrho_0 + i\,(i_1 \varrho_1 + i_2 \varrho_2 + i_3 \varrho_3)$$

pour le tétravecteur de convection ; la même notation a été employée ci-dessus pour la tétravitesse de l'électron mobile, mais il vaut mieux désigner celle-ci par

$$\varepsilon \frac{dX}{d\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-q^2}} \left\{ 1 + i_1 q_1 + i_2 q_2 + i_3 q_3 \right\} .$$

Suivant ces notations, nous avons, pour le mouvement de l'électron dans le champ η, la formule quaternion

$$\mu \frac{d^2X}{d\sigma^2} = \varepsilon \left[i\eta \frac{dX}{d\sigma} \right]_p , \qquad (20)$$

dans laquelle l'indice p désigne la partie paire du biquaternion entre crochets.

De leur côté les équations de Maxwell-Hertz s'écrivent simplement

$$R = i\eta\,\Delta , \qquad (21)$$

et l'invariance des équations (20 et (21) résulte immédiatement du fait que η se transforme suivant la formule $U\,.\,\bar{U}$, tandis que X, Δ et R subissent la transformation $U\,.\,\bar{\underline{U}}$ des tétravecteurs, et que les quantités μ, ε et σ restent sans changement.