Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 42 (1916)

Artikel: Géométrie des corps solides et géométrie imaginaire [suite]
Autor: Cailler, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-743285

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 31.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

GÉOMÉTRIE DES CORPS SOLIDES

ET

GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

PAR

C. CAILLER

(Suite [1])

IX. Notion de Symétrie

Partageons en deux parties égales le mouvement de torsion qui amène un corps A_0 sur un autre A_1, de telle manière que si, pendant la première moitié du mouvement, A_0 vient en A', dans la seconde moitié, A' vienne en A_1. Dans ces conditions, A' s'appelle le *corps médian* des deux autres ; à leur tour ces derniers sont dits *symétriques* l'un de l'autre, par rapport à A'. Il est clair que si on connaît un corps médian et l'un des deux symétriques, le second se déduit sans aucune ambiguité de ces données.

Au contraire, quand les positions seules des corps A_0 et A_1 sont déterminées, mais non pas le mouvement hélicoïdal particulier qui a transformé l'un dans l'autre, le corps médian possède deux positions possibles ; elles correspondent à la parité du nombre k employé dans la formule $u + k\pi$ qui représente la totalité de tous ces mouvements. Les deux corps médians obtenus en prenant k pair ou impair sont évidemment orthogonaux, une rotation de 180° autour de l'axe de la vrille A_0 A_1 amène l'un en coïncidence avec l'autre.

[1]) Voir *Archives,* t. XLII, p. 89.

La notion de symétrie s'étend immédiatement aux vrilles et aux vrilloïdes. Par exemple, ayant projeté le corps A_0 en A' sur le vrilloïde, le symétrique de A_0 relativement à A', soit A_1, sera aussi le *symétrique* du corps A_0 *par rapport au vrilloïde.*

Appliquons à ce cas la formule trigonométrique (2), en prenant un corps quelconque A du vrilloïde, les deux symétriques A_0 et A_1, et le médian A'. Nous avons ici $\Omega = 90°$: par suite

$$\pm \cos \overline{AA_0} = \cos \overline{A'A_0} \cos \overline{AA'} , \tag{3}$$

et, de la même manière,

$$\pm \cos AA_1 = \cos \overline{A'A_1} \cos \overline{AA'} = \cos \overline{A'A_0} \cos \overline{AA'} . \tag{4}$$

Ainsi, *les distances d'un corps quelconque appartenant au vrilloïde à deux corps symétriquement placés par rapport à ce vrilloïde sont égales entre elles.*

Réciproquement, *le lieu des corps également distants de deux corps quelconques A_0 et A_1 est un vrilloïde mené par le corps médian A' perpendiculairement à la vrille A_0 A_1.* Comme il y a deux corps médians, il existe en réalité deux vrilloïdes semblables.

En résumé, la symétrie possède les mêmes propriétés par rapport à un plan réel, et par rapport au plan imaginaire qu'est le vrilloïde. On doit toutefois remarquer que si on continue d'appeler *distance* d'un corps à un vrilloïde l'intervalle qui sépare le corps de sa projection, cette distance ne possède aucune propriété de minimum, contrairement à ce qui a lieu dans le réel.

La différence provient du fait que, dans la formule (3), la variable $\overline{AA'}$ est complexe. Il est clair qu'on peut toujours la déterminer de manière que le premier membre de la formule ait une valeur quelconque. Et ainsi, il existera toujours dans le vrilloïde (ou dans une vrille quelconque) un corps dont l'intervalle avec A_0 soit arbitraire, par exemple un corps tel que l'invariant $\cos \overline{AA_0}$ prenne la valeur ± 1.

Cette valeur singulière ne signifie pas du tout que A coïncide avec A_0 ; ce serait contradictoire, puisque nous savons que A_0 est, généralement parlant, extérieur au vrilloïde. Elle veut dire que les corps A et A_0 sont symétriques d'un même corps par rapport à deux droites parallèles ; quel que soit A_0, le vrilloïde contient toujours des corps A qui participent à ce caractère excep-

tionnel, ils sont tous à une distance constante de la projection de A_0 sur le vrilloïde [1].

A l'égard du système composé de deux vrilles quelconques, U et U′, nous savons qu'il détermine deux autres vrilles, conjuguées l'une de l'autre, qui sont les normales communes du système primitif. Si C et C′ désignent les extrémités sur U et U′ de l'une des normales, D et D′ les extrémités de l'autre, les deux intervalles $\overline{CC'}$ et $\overline{DD'}$, qui séparent dans chaque couple les corps extrêmes, définissent ce qu'on peut appeler les *distances conjuguées* des deux vrilles données. Ces distances conjuguées caractérisent, en quelque manière, la situation relative des deux vrilles ; ce sont les analogues de la *distance* et de *l'angle* de deux droites en Géométrie réglée.

Sitôt connues les distances conjuguées, il suffit de donner l'amplitude de deux mouvements qui conduisent C ou C′ sur deux corps A ou A′ appartenant respectivement à chaque vrille, pour que la distance de ces derniers soit elle-même déterminée ; on verra plus loin quelle est la loi de variation de cette distance $\overline{AA'}$ quand les corps A et A′ décrivent chacun leur vrille particulière.

Les distances conjuguées d'un couple de vrilles peuvent être égales à deux quantités complexes quelconques. Pour s'en convaincre il suffirait de se reporter à la figure 8 expliquée ci-dessus à la page (109).

Mais la construction la plus simple résulte des formules (42) et (43) que j'aurai à développer plus tard. Il s'ensuit, comme on verra, que si, dans la figure 7, la distance des droites U et U′ est égale à la quantité $\overline{CC'} - \overline{DD'}$, tandis que celle de l'autre couple u, u' est égale à la quantité $\overline{CC'} + DD'$, les vrilles (U) et (U′) engendrées par le corps mobile ont précisément les valeurs $\overline{CC'}$ et $\overline{DD'}$ pour distances conjuguées.

L'une des vrilles (U) ou (U′) peut être donnée à volonté, l'autre admet alors ∞^4 déterminations possibles. C'est le double

[1]) En Géométrie euclidienne, les propriétés de minimum se conservent partiellement. On voit aisément que la rotation nécessaire pour orienter A_0 parallèlement à sa projection est plus petite que la rotation qui rendrait le même corps parallèle à un autre corps quelconque du vrilloïde.

des positions possibles d'une droite, quand sa distance à une autre droite possède une valeur donnée ; on retrouve ici la duplication caractéristique du passage du réel à l'imaginaire.

X. Représentations analytiques : solides, vrilloïdes et vrilles

Il s'agit de représenter ces trois objets à l'aide de coordonnées qui en définissent la position relativement à un système de référence déterminé. Un vrilloïde pouvant toujours être défini par son pôle, nous n'avons en fait à résoudre que deux questions essentiellement différentes.

Prenons le cas du corps solide, et supposons d'abord que le corps qu'on veut repérer fasse partie d'une seule et même vrille dont l'axe v est *dirigé* à la manière d'un vecteur. Soit A_0 un corps de la ville, faisant fonction d'origine.

Si u est l'amplitude du mouvement hélicoïdal qui amène A_0 en coïncidence avec un corps A_1 appartenant à notre vrille, les *coordonnées complexes* de A_1 seront les deux suivantes

$$x_0 = \cos u \ , \qquad x_1 = \sin u \ .$$

Elles changeraient de signe, si u augmentant d'un demi-tour, on revenait au même corps après une rotation d'un tour entier. Sauf le changement simultané de signes, les coordonnées d'un corps de la vrille sont complètement déterminées ; d'ailleurs deux quantités quelconques x_0 et x_1 déterminent toujours un corps et un seul, faisant partie de la vrille, pourvu qu'elles vérifient la condition

$$x_0^2 + x_1^2 = 1 \ .$$

Pour définir les coordonnées dans des cas moins particuliers, nous n'avons qu'à nous laisser guider par l'analogie. En Géométrie riemannienne plane, le système de référence est un triangle dont les sommets sont conjugués deux à deux. En Stéréométrie, c'est un tétraèdre à sommets conjugués. En

Géométrie réglée enfin, c'est un trièdre trirectangle, aux arêtes deux à deux orthogonales.

Plaçons-nous tout de suite dans le cas de l'espace. L'analogue du tétraèdre à sommets conjugués est évidemment formé par un système de quatre corps deux à deux orthogonaux; j'appelle *tétraèdre fondamental* un semblable système.

Il existe ∞^{12} tétraèdres fondamentaux. Le premier corps P_0 du tétraèdre est arbitraire, c'est-à-dire qu'il possède ∞^6 positions. Le second corps P_1, devant être orthogonal au premier, est situé dans le vrilloïde dont P_0 occupe le pôle; P_1 admet donc ∞^4 positions. Le troisième et le quatrième sommet appartiennent tous deux à la vrille conjuguée de celle qui joint P_0 à P_1; P_2 dépend ainsi de deux constantes. Enfin, dès que P_0, P_1, P_2 sont placés dans l'espace, P_3, qui est leur orthogonal commun, est complétement déterminé. Le nombre total des paramètres dont dépend la construction du tétraèdre fondamental est $6 + 4 + 2 = 12$.

Les quatre sommets du tétraèdre jouent le même rôle relativement au tétraèdre. Toutefois, pour des motifs de précision, nous emploierons un autre mode de construction du système de référence, d'apparence dissymétrique, dans lequel le sommet P_0 est distingué parmi ses congénères.

Le théorème fondamental du paragraphe VIII nous apprend que quand on fait chavirer P_0 pour l'appliquer sur un des trois autres sommets, les trois axes de ces renversements sont orthogonaux deux à deux, ou forment un trièdre trirectangle.

Au lieu d'un tétraèdre fondamental, nous pouvons donc toujours adopter un système de référence formé des deux objets suivants : 1° un corps solide P_0, que j'appellerai souvent le *corps initial,* 2° un trièdre trirectangle direct OX_1, OX_2, OX_3 (fig. 13).

Répétons qu'en renversant P_0, successivement, autour des trois axes coordonnés, dans le sens direct, on retrouverait le tétraèdre fondamental. Il est clair que le système de repère, sous sa forme dissymétrique, possède également ∞^{12} déterminations possibles, ∞^6 relatives au déplacement de P_0, ∞^6 à celui du trièdre, indépendant du premier.

Soient maintenant x un corps quelconque, D l'axe de la vrille joignant ce corps au solide initial P_0, u la grandeur de la torsion qui amène P_0 en coïncidence avec x dans la vrille D. Désignons par L_1, L_2, L_3 les coordonnées du vecteur D, relatives au trièdre T des axes fixes [1]. Alors, par rapport au système

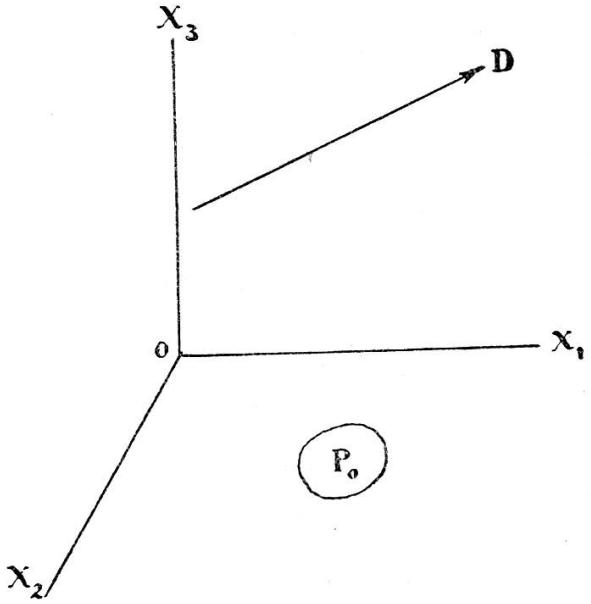

Fig. 15

de référence défini ci-dessus, les coordonnées du solide x seront données par les relations suivantes, de forme complexe,

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \cos u \quad , & x_1 &= L_1 \sin u \ , \\ x_2 &= L_2 \sin u \ , & x_3 &= L_3 \sin u \ ; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

elles entraînent l'identité

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ . \qquad (6)$$

Par la comparaison des formules (5) et (6), il est clair réciproquement qu'à tout système de quatre nombres x_k, vérifiant la relation (6), correspond un corps, et un seul, de l'espace. D'ailleurs, suivant le choix particulier de la quantité u, chaque corps solide possède un double système de coordonnées $\pm x_k$; on

[1]) Si le sens de D changeait, L_k changerait de signe, u pareillement, et ainsi les coordonnées x_k resteraient les mêmes.

prendra l'un des deux arbitrairement, ils sont équivalents. Il y a ici une différence avec les coordonnées d'un vecteur qui, elles, sont entièrement définies, même en ce qui concerne le signe, quand le vecteur et le trièdre de référence le sont eux-mêmes.

Remarquons encore que si x_3 est constamment nulle, le vecteur D appartient à la recticongruence dont l'axe est OX_3 ; l'ensemble des positions décrites par le corps mobile x forme alors un vrilloïde. Ce vrilloïde passe évidemment par les trois corps P_0, P_1, P_2, lesquels constituent un triangle arbitraire de corps deux à deux orthogonaux. Rapportés à un semblable système de référence, les corps d'un même vrilloïde possèdent donc trois coordonnées complexes x_0, x_1, x_2, entre lesquelles existe la relation identique

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 \ . \tag{7}$$

Ainsi, on descend de l'espace au vrilloïde par le moyen même qui, dans la Géométrie analytique ordinaire, fait passer de la Stéréométrie à la Planimétrie.

Distance de deux solides. Soient x, y deux solides, x_k et y_k, leurs coordonnées complexes rapportées au système de référence (P_0, T) ; je dis que la distance xy de ces corps est donnée par la formule

$$\cos xy = x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \ (^1) \ . \tag{8}$$

En effet, puisque

$$x_0 = \cos u \ , \qquad x_k = L_k \sin u \ , \qquad (k = 1, 2, 3)$$

et, avec des significations analogues,

$$y_0 = \cos v \ , \qquad y_k = M_k \sin v \ , \qquad (k = 1, 2, 3)$$

la formule ci-dessus se transforme en

$$\cos xy = \cos u \cos v + (L_1M_1 + L_2M_2 + L_3M_3) \sin u \sin v \ ;$$

c'est la même que (1), puisque, suivant les préceptes de la Géométrie réglée,

$$\cos \Omega = L_1M_1 + L_2M_2 + L_3M_3 \ .$$

[1]) Cette formule comporte, comme toujours, une incertitude dans le *signe* du résultat.

A titre de corollaire, on peut remarquer que les quatre coordonnées du solide x ont des significations semblables au regard des quatre sommets du tétraèdre fondamental. Si, en effet, on fait coïncider y avec P_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, toutes les coordonnées y sont nulles, sauf y_k qui vaut 1 ; et alors, d'après la formule (8)

$$x_k = \cos(xP_k) \text{ (1)} .$$

Equations du vrilloïde et de la vrille. Ces équations dérivent, comme une seconde conséquence, de la formule (8) ; elles s'en tirent de la même manière que l'équation du plan de la formule analogue en Géométrie ponctuelle.

Désignons par a le corps polaire du vrilloïde et écrivons qu'un solide mobile x est constamment orthogonal à a. C'est la première définition du vrilloïde, elle donne pour ce dernier l'équation linéaire

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 .$$

Faisons rencontrer deux vrilloïdes (a) et (b), nous auron , pour les équations de la vrille qui est leur intersection,

$$\left.\begin{aligned} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 , \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0 . \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

Mais à la place de celles-ci, on emploiera le plus souvent la *représentation paramétrique,* identique à celle de la droite.

Soient sur la vrille, x et y deux corps orthogonaux l'un à l'autre, lesquels, par suite, donnent lieu aux identités

$$\sum x_k^2 = 1 , \qquad \sum y_k^2 = 1 , \qquad \sum x_k y_k = 0 .$$

Si X est un corps mobile dans la vrille, s la distance qui le sépare du premier des deux corps précédents, nous aurons

$$X_k = x_k \cos s + y_k \sin s . \qquad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (9)$$

[1]) On pourrait prendre cette formule pour la définition des x_k . Mais ce moyen laisse subsister une ambiguité gênante provenant de l'indétermination des signes des cosinus. C'est l'intervention du système de référence, sous la forme dissymétrique, qui a permis d'éviter cette ambiguité; en fait d'indétermination, il n'en reste qu'une seule, insignifiante, qui résulte de la possibilité d'un changement simultané dans le signe des quatre coordonnées

En effet, les quatre coordonnées X vérifient évidemment deux équations linéaires indépendantes de s et analogues à (8′) ; en outre, les égalités

$$\cos s = \sum x_k X_k \,, \qquad \sin s = \sum y_k X_k \,,$$

font ressortir la signification de s, conforme à celle indiquée à l'instant.

Coordonnées plückériennes. Toutefois la représentation la plus employée pour les vrilles est celle que fournissent les coordonnées plückériennes ; elles ne diffèrent des coordonnées plückériennes de la droite que parce qu'elles sont *complexes* et non *réelles*.

Désignons par x, y deux corps quelconques, qui ne sont pas en général orthogonaux ; soient x_k, y_k leurs coordonnées. Définissons six quantités complexes [1],

$$\left.\begin{aligned} l \sin(xy) &= x_0 y_1 - x_1 y_0 \,, & p \sin(xy) &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \,, \\ m \sin(xy) &= x_0 y_2 - x_2 y_0 \,, & q \sin(xy) &= x_3 y_1 - x_1 y_3 \,, \\ n \sin(xy) &= x_0 y_3 - x_3 y_0 \,, & r \sin(xy) &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \,. \end{aligned}\right\} \quad (9')$$

Les six quantités, complètement connues sauf un signe commun qui reste arbitraire, ne changent pas si x et y se déplacent dans la vrille ; elles en sont les coordonnées plückériennes. Entre elles existent les deux identités fondamentales

$$l^2 + m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + r^2 = 1 \,, \qquad (10)$$

$$lp + mq + nr = 0 \,. \qquad (11)$$

Enfin tout corps x, appartenant à la vrille $(l \ldots r)$, satisfait les conditions

$$\left.\begin{aligned} p x_0 = n x_2 - m x_3 \,, \qquad q x_0 = l x_3 - n x_1 \,, \\ r x_0 = m x_2 - l x_3 \,, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

lesquelles sont compatibles entre elles en vertu de la formule (11).

[1]) Les notations les plus symétriques seraient l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12}. J'écris l, m, n, p, q, r pour éviter les doubles indices.

Prenons les équations paramétriques de deux vrilles conjuguées, sous la forme

$$X_k = x_k \cos s + y_k \sin s \ , \qquad Z_k = z_k \cos t + t_k \sin t \ .$$

Chacun des quatre corps x, y, z, t est orthogonal aux trois autres, on a donc

$$\sum x_k^2 = \sum y_k^2 = \sum z_k^2 = \sum t_k^2 = 1 \ ,$$

$$\sum x_k y_k = \sum x_k z_k = \sum y_k z_k = \sum z_k t_k = \sum x_k t_k = \sum y_k t_k = 0 \ ;$$

et ainsi le déterminant $| \, xyzt \, |$ est *orthogonal*. Les relations connues entre les mineurs complémentaires d'un semblable déterminant, à savoir

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = \pm (z_2 t_3 - t_2 z_3) \ \ldots \ ,$$

rapprochées des formules évidentes $\sin (xy) = \sin (zt) = \pm 1$, nous fournissent immédiatement les relations entre les coordonnées plückériennes de deux vrilles conjuguées $V(l, \ldots r)$ et $V'(l', \ldots r')$.

Appliquées aux deux vrilles V et V', les définitions (9') nous donnent

$$\left.\begin{array}{lll} l = \pm p' \ , & m = \pm q' \ , & n = \pm r' \ , \\ p = \pm l' \ , & q = \pm m' \ , & r = \pm n' \ . \end{array}\right\} \quad (13)$$

Dans ces formules le double signe $\pm$ peut, sans inconvénient, être supprimé partout.

Soient encore

$$\left.\begin{array}{l} u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \ , \\ v_0 x_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0 \ , \end{array}\right\} \quad (14)$$

les équations d'une vrille V. Quand le corps x se déplace dans la vrille, les corps fixes u et v lui restent constamment orthogonaux. Si donc on forme une vrille avec les solides u et v, celle-ci sera la conjuguée de la vrille V.

Reprenons les formules (9'), et la règle d'alternance ci-dessus pour les vrilles conjuguées ; nous en déduisons immédiate-

ment les coordonnées plückériennes de la vrille V, dont les deux équations figurent au n° (14) ; ce sont

$$l \sin(uv) = u_2v_3 - u_3v_2 , \qquad p \sin(uv) = u_0v_1 - u_1v_0 .$$
$$m \sin(uv) = u_3v_1 - u_1v_3 , \qquad q \sin(uv) = u_0v_2 - u_2v_0 ,$$
$$n \sin(uv) = u_1v_2 - u_2v_1 , \qquad r \sin(uv) = u_0v_3 - u_3v_0 .$$

Nous n'avons pu éviter de répéter ici, dans le domaine complexe de la Géométrie des vrilles, des théorèmes qui sont très connus dans le domaine réel de la Géométrie réglée. Je veux terminer cette énumération par un nouveau théorème, sans analogue dans la Géométrie réelle, et dont on trouvera la démonstration un peu plus loin. Je tiens à signaler à cette place ce résultat tout à fait essentiel.

Nous savons comment une vrille est définie au point de vue géométrique : on marque par deux vecteurs correspondants les positions de l'axe de la vrille, dans l'espace en v, et dans le corps en u (fig. 6). Supposons le système de référence bien déterminé. Le second des axes précédents sera donc l'homologue, dans le corps initial P_0, de l'axe de la vrille décrite autour de v. Le théorème en question est alors le suivant.

Les coordonnées complexes des vecteurs v *et* u, *relativement au trièdre de référence* T, *sont respectivement égales aux quantités,*

$$L = l + p , \qquad M = m + q , \qquad N = n + r , \tag{15}$$
$$P = l - p , \qquad M = m - q , \qquad N = n - r . \tag{15'}$$

Par exemple, en Géométrie euclidienne, si L′ est la projection sur OX_1 d'un vecteur-unité porté sur v, et L″ le moment de ce même vecteur autour de OX_1, nous aurons $l + p = L' + iL''$, et ainsi des autres grandeurs.

Il est clair que les six quantités complexes L,... R peuvent servir de coordonnées plückériennes à la place des quantités primitives $l, \ldots r$. L'emploi de cette seconde forme se recommande souvent; entre ces nouvelles coordonnées de la vrille, nous avons les relations

$$L^2 + M^2 + N^2 = 1 , \tag{16}$$
$$P^2 + Q^2 + R^2 = 1 , \tag{16'}$$

qui remplacent les identités (10) et (11), soit $\sum (l^2 + p^2) = 1$, $\sum lp = 0$, et sont remarquables par leur forme symétrique.

Et il va sans dire que tous les problèmes résolus dans ce paragraphe en fonction des $l, \ldots r$, pourraient l'être en fonction des L, ... R. Par exemple, nous aurons à exprimer plus loin la condition pour qu'un corps x soit contenu dans une vrille V.

Au lieu d'employer à cet effet les formules (12) qui résolvent le problème, nous les écrirons sous la forme nouvelle

$$\left.\begin{aligned} Lx_0 + Mx_3 - Nx_2 &= Px_0 - Qx_3 + Rx_2 , \\ -Lx_3 + Mx_0 + Nx_1 &= Px_3 + Qx_0 - Rx_1 , \\ Lx_2 - Mx_1 + Nx_0 &= -Px_2 + Qx_1 + Rx_0 , \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

lesquelles, résolues par rapport aux quantités P, Q, R, reproduisent le type bien connu des formules de Rodrigues

$$\left.\begin{aligned} P &= L(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2M(x_1x_2 + x_0x_3) + 2N(x_1x_3 - x_0x_2) , \\ Q &= 2L(x_1x_2 - x_0x_3) + M(x_0^2 + x_2^2 - x_1^2 - x_3^2) + 2N(x_2x_3 + x_0x_1) , \\ R &= 2L(x_1x_3 + x_0x_2) + 2M(x_2x_3 - x_0x_1) + N(x_0^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) . \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

XI. Changement du Système de Repère

Le tétraèdre de référence P_k est formé de quatre corps orthogonaux choisis à volonté. Qu'arrive-t-il, à l'égard des coordonnées d'un corps fixe de l'espace, si on substitue un autre tétraèdre fondamental à la place du premier ?

Il existe en tout ∞^{12} tétraèdres fondamentaux. Chacun peut se présenter sous l'apparence dissymétrique d'un corps initial P_0 associé à un trièdre d'axes coordonnés T. Les ∞^{12} systèmes se déduisent de l'un d'eux en déplaçant dans l'espace, indépendamment l'un de l'autre, le corps initial P_0 et le trièdre T. Parmi les mouvements ainsi considérés ceux qui conservent la situation relative du trièdre et du solide initial sont l'exception ; leur nombre est seulement ∞^6, les tétraèdres correspondants diffèrent entre eux par la position, mais non dans leur configuration intrinsèque. Nous aurons bientôt à considérer ce cas particulier.

Prenons la question dans toute sa généralité. Soient donc, relativement au premier système (P_0, T), x_k et y_k les coordonnées de deux corps x, y ; soient encore x_k', y_k' les coordonnées des mêmes corps rapportés à un second système de référence (P_0', T').

La distance des deux corps ne dépend pas des repères, il faut donc que

$$\sum x_k y_k = \pm \sum x_k' y_k' ;$$

l'ambiguité du signe s'explique comme toujours. Mais si on convient que les coordonnées d'un corps doivent varier de manière continue quand le système de référence se déplace lui-même d'une manière continue, le signe ambigu $\pm$ ne peut pas changer brusquement, il restera donc constamment égal à sa valeur initiale soit $+$ [1].

Ayant ainsi

$$\sum x_k y_k = \sum x_k' y_k' ,$$

et par suite

$$\sum x_k^2 = \sum x_k'^2 ,$$

on voit que la relation cherchée entre les anciennes et les nouvelles coordonnées est de la forme linéaire

$$x_k' = a_{k0} x_0 + a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3 . \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (19)$$

Cette transformation est orthogonale ; à cause des propriétés de continuité, elle doit être *directe,* par suite $| a_{hk} | = 1$. De plus, si on considère les a_{kh} $(h = 0, 1, 2, 3)$ comme les coordonnées d'un corps fixe, par rapport à l'ancien système de repère, ce corps est P_k', et l'on a $a_{kh} = \cos (P_h P_k')$.

[1] Il est clair que si le système (P_0, T) exécute un mouvement cyclique en reprenant à la fin la position qu'il avait au départ, rien n'empêche que les coordonnées x_k n'aient changé de signe. Il en sera alors de même pour les coordonnées y_k d'un autre corps quelconque. Cette remarque permet de classer les mouvements cycliques du système (P_0, T) sous deux espèces.

Les considérations ci-dessus se rapportent à ce que j'ai appelé le *signe* ou le *sens* d'un corps. *Arch.*, t. XV, p. 385.

En un mot, la seule chose qui différencie notre transformation (19) de celle qui détermine le mouvement non-euclidien dans l'espace sphérique, c'est que, dans le dernier cas, les coefficients de la formule (19) sont des quantités *réelles* au lieu qu'ils sont généralement *complexes* dans la théorie actuelle. De là vient que le nombre des paramètres dont dépendent maintenant les a_{hk} est double de ce qu'il est en Géométrie ponctuelle, 12 au lieu de 6.

Le mouvement à 12 degrés de liberté du système de repère peut évidemment se décomposer en deux mouvements distincts, chacun à six degrés de liberté.

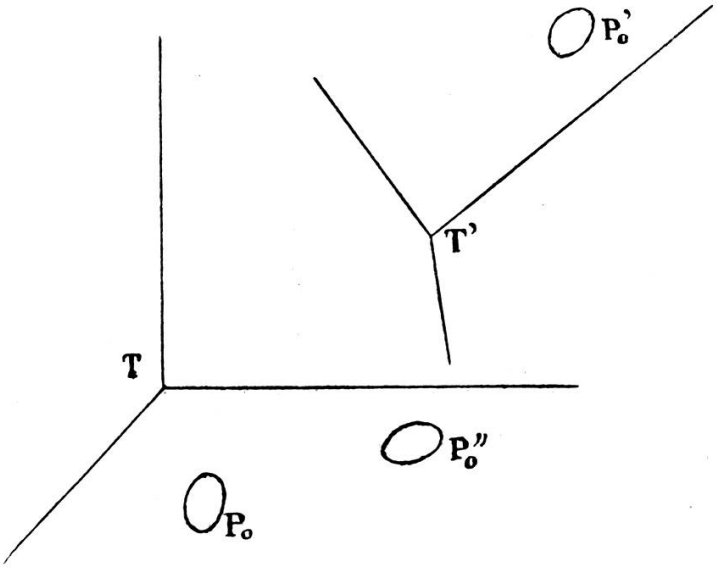

Fig. 14

En effet, soit (P_0, T) le premier système de référence, (P_0', T') le second. Marquons en P_0'' le corps qui occupe dans le trièdre T la même position que P_0' relativement au trièdre T' (fig. 14).

1° Déplaçons d'abord P_0 en P_0'' en maintenant fixe le trièdre T.

2° Déplaçons ensuite le système nouveau, c'est-à-dire l'ensemble des deux corps (P_0'', T), mais sans changer leur situation relative, jusqu'à ce que T vienne s'appliquer sur T', ce qui fait aussi coïncider P_0'' avec P_0'.

Existe-t-il une vrille *invariante,* qui se présente de la même manière relativement au nouveau et à l'ancien système de référence? Impossible d'en douter d'après l'ensemble des analogies entre les droites et les vrilles. L'existence des vrilles invariantes ressort même, de façon lumineuse, de la décomposition du mouvement dans les deux parties dont il vient d'être question.

En effet, chacune des composantes est une torsion; pour qu'une vrille soit invariante, il faut que ses axes, dans le corps et dans l'espace, coïncident respectivement avec les axes des torsions dont il s'agit. Cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante. On obtient de la sorte deux vrilles invariantes, elles sont conjuguées l'une de l'autre. Pour les construire, il faut transporter l'axe de la vrille $P_0 P_0''$, solidaire du corps, sur l'axe commun aux deux trièdres T et T', en superposant alternativement les deux extrémités de ces deux axes.

Ici, comme dans la stéréométrie riemannienne, les objets invariants sont réels l'un et l'autre, tandis qu'en Géométrie ponctuelle hyperbolique, l'une des droites invariantes seule est réelle, l'autre est idéale. Comme toujours l'analogie s'établit entre la Géométrie des corps solides et la Géométrie ponctuelle de Riemann.

Revenons aux deux mouvements décrits plus haut et rappelons que si quatre variables x_k subissent une transformation orthogonale, les six déterminants de Plücker associés à ces variables, à savoir l, m, n, p, q, r, se transforment de leur côté de telle manière que chacune des deux lignes

$$\begin{array}{lll} L = l + p\,, & M = m + q\,, & N = n + r\,, \\ P = l - p\,, & Q = m - q\,, & R = n - r\,. \end{array}$$

subisse également une substitution orthogonale ternaire [1].

On peut présumer que ces deux substitutions correspondent aux torsions composantes décrites tout à l'heure. Pour le faire voir, j'introduirai dès maintenant les notations quaternionniennes; il serait facile d'ailleurs, mais trop long, de justifier à

[1]) Voir, par exemple, mon mémoire *Soc. de Phys. et d'histoire naturelle,* Genève, t. 37, p. 74 et suivantes.

cette place l'intervention dans la Géométrie des corps solides de cet instrument analytique à peu près indispensable [1].

Rappelons donc que, le trièdre T étant bien déterminé, toute torsion t, d'amplitude u, autour d'un axe dont les coordonnées sont t_1, t_2, t_3, a pour représentant le quaternion

$$t = \cos u + (i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3) \sin u \ .$$

De même, si le système de référence est complété par l'adjonction au trièdre T d'un corps initial P_0, une torsion convenable conduit ce corps initial sur n'importe quel autre corps (x) de l'espace. Ainsi, les repères étant donnés, le corps (x) sera déterminé de position par le moyen d'un quaternion

$$x = x_0 + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 \ , \tag{20}$$

dont les composantes sont justement égales aux coordonnées définies ci-dessus (5).

Je rappelle en outre que si on exécute dans l'ordre t, s deux torsions quelconques, la torsion résultante, toujours rapportée au trièdre T, admet pour quaternion représentatif le produit st.

Cela posé, cherchons d'abord comment se présente le problème de la transformation des repères quand on décompose le mouvement subi par ces repères de la manière indiquée plus haut.

Le trièdre T servant toujours de système de référence, désignons par s le quaternion représentatif de la torsion par laquelle T vient s'appliquer sur T′ ; soit de même t le quaternion équivalent au mouvement de P_0 en P_0''. Le mouvement hélicoïdal par le moyen duquel P_0 se transporte sur P_0' est figuré par un troisième quaternion égal à st.

Si (x) désigne le corps fixe de l'espace qu'on prétend rapporter tantôt au premier, tantôt au second système de repère, les anciennes coordonnées représentent le mouvement de P_0 en (x),

[1]) Dans ma *Note*, la définition du système de référence est insuffisante. De là, en plusieurs points de ce travail, des obscurités et des résultats incomplets, ainsi pp. 382-385 et pp. 457-459. On me pardonnera donc de revenir en quelques mots sur le sujet.

estimé à l'aide du trièdre T, les nouvelles représentent le mouvement de P_0' en (x), estimé par le second trièdre.

Mais le dernier mouvement, estimé à l'aide du trièdre primitif, correspond au quaternion $x\bar{t}\bar{s}$[1]; par rapport au trièdre T', ce quaternion devient

$$\bar{s}(x\bar{t}\bar{s})s \qquad \text{ou} \qquad \bar{s}x\bar{t} \ .$$

On a donc en définitive entre les anciennes et nouvelles coordonnées, la relation quaternionnienne

$$x' = \bar{s}x\bar{t} \ ; \tag{21}$$

elle remplace les formules (19), dont elle donne l'expression la plus condensée.

Revenons maintenant aux coordonnées plückériennes $(l, \ldots r)$ de la vrille qui joint les deux corps (x) et (y), telles qu'elles sont contenues dans les définitions (9').

Le calcul direct montre que, sauf le facteur de proportionalité sin (xy) qui y est contenu, les quantités

$$L = l + p \ , \qquad M = m + q \ , \qquad N = n + r \ ,$$

sont respectivement égales aux coefficients de i_1, i_2, ou i_3, dans le produit $y\bar{x}$. De même les quantités

$$P = l - p \ , \qquad Q = m - q \ , \qquad R = n - r \ ,$$

sont les facteurs des mêmes lettres i_k dans le produit $\bar{x}y$.

Or, dans la substitution du nouveau système de référence à la place de l'ancien, les produits précédents se transforment, le premier suivant la formule $\bar{s}(y\bar{x})s$, le second suivant la formule $t(\bar{x}y)\bar{t}$, elles-mêmes contenues dans la transformation générale (21) à titre de cas particuliers. Voici les conséquences de ce double fait.

A l'égard du vecteur L, M, N, la modification qu'il subit dépend uniquement de s, c'est-à-dire du déplacement du trièdre T, et point du tout du mouvement du corps initial P_0. C'est donc un vecteur fixe de l'espace absolu.

[1]) La barre qui surmonte un quaternion signifie qu'on en prend le conjugué en changeant i_1 en $-i_1$, etc., sans toucher au scalaire i.

Pour reconnaître que le dit vecteur coïncide avec l'axe de la vrille qui joint les corps (x) et (y), il suffit de prendre cet axe pour celui des x_1 dans le trièdre T, le corps initial P_0 étant choisi à volonté parmi ceux qui forment la dite vrille. Les définitions (9') pour les coordonnées plückériennes donnent alors immédiatement

$$L = l + p = 1 , \qquad M = 0 , \qquad N = 0 ,$$

ce sont justement les coordonnées de l'axe OX_1.

Passons au second vecteur, ou P, Q, R. La loi de sa transformation ne dépend que du quaternion t. Si donc, prenant $t = 1$, on imprime aux deux repères primitifs (P_0, T) un mouvement commun quelconque qui n'en change pas la situation relative, le vecteur demeure inaltéré. Qu'on amène donc, par un semblable déplacement, le corps initial P_0 en coïncidence avec un des corps de la vrille, on aura dans ce cas, comme on voit tout de suite, $p = q = r = 0$, soit encore

$$P = L , \qquad Q = M , \qquad R = N .$$

Donc le vecteur P, Q, R représente toujours, relativement au trièdre T, l'axe homologue, par rapport au corps P_0, de celui de la vrille engendrée par le solide mobile.

En résumé, ce qui précède contient la démonstration de la propriété énoncée à la fin du paragraphe X, et justifie l'interprétation qui y est donnée pour les coordonnées plückériennes (L,...R) d'une vrille quelconque.

Je termine ce paragraphe par une remarque générale touchant la notion du mouvement.

Il est clair qu'au lieu de maintenir en place le corps (x), et de mouvoir librement le système des repères, en employant pour le tétraèdre fondamental un ensemble variable de corps concourants, on aurait pu tout aussi bien laisser les repères immobiles et déplacer le corps. Les formules de transformation (19) ou (21), font alors correspondre à tout corps (x) de l'espace un autre corps (x') du même espace. La loi de cette correspondance est manifeste.

Soient deux tétraèdres fondamentaux S et S', lesquels, en

général, ne sont pas superposables; soit C un corps quelconque. Associons à ce corps un nouveau corps C′, tel que ses distances aux quatre sommets de S, soient respectivement égales aux distances qui séparent C des quatre sommets de S′.

L'opération qui transforme C en C′ définit, au sens propre du terme, un *mouvement complexe* de l'espace ; on aura le *groupe des mouvements,* en donnant au tétraèdre S′ toutes les situations possibles, dont le nombre est ∞^{12}.

A maintes reprises nous avons déjà signalé ces *mouvements complexes,* en relevant par exemple le fait, désormais évident, que la vrille ne possède pas de propriété invariante au regard des ∞^{12} mouvements complexes possibles. Elle ne peut avoir de semblable propriété que relativement à certains sous-groupes du groupe général des mouvements; l'un de ces sous-groupes est celui des mouvements *réels,* dont nous dirons deux mots plus bas.

XII. Cas particuliers

D'après l'ensemble des considérations qui précèdent, il est clair que la Géométrie des corps solides est un système maximal qui contient en soi, à titre de simples cas particuliers, d'un côté, la Géométrie réglée, de l'autre, la Géométrie ordinaire, ponctuelle ou tangentielle. Envisagées de ce point de vue général, les différences qui séparent les diverses Géométries euclidiennes et non-euclidiennes cessent d'être fondamentales : toute Géométrie, quelle qu'en soit l'espèce, rentre dans le cadre de la Géométrie riemannienne des corps solides.

1er Cas (Espace réglé). Prenons d'abord les corps solides appartenant à un seul et unique vrilloïde. La Géométrie réglée sera l'histoire de leurs relations mutuelles. Nous savons en effet associer une droite déterminée à tout corps du vrilloïde, et cette correspondance est *congruente,* c'est-à-dire qu'elle conserve les distances.

Si le pôle du vrilloïde sert de corps initial P_0 pour le système de référence, $x_0 = 0$ sera l'équation du vrilloïde, et pour qu'un

mouvement complexe transforme le vrilloïde en lui-même, il faut qu'il laisse inaltérée cette équation. Les formules générales de la transformation (19) se réduisent alors au type

$$x_k' = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 \ . \qquad (k = 1, 2, 3) \quad (22)$$

Cette transformation ternaire est orthogonale, mais les coefficients en sont généralement complexes. Géométriquement parlant, la transformation s'exécutera en laissant fixe le corps initial P_0, au pôle du vrilloïde, et en déplaçant à volonté le trièdre T dans l'espace. Les six paramètres que contiennent les formules (22) correspondent aux six degrés de liberté d'un pareil mouvement.

Sous réserve du fait que les éléments de la Géométrie réglée sont complexes et que les mouvements qu'exécutent ces éléments sont aussi complexes, la Géométrie réglée se réduit à la Planimétrie riemannienne. Ainsi, la droite imaginaire du plan elliptique s'extériorise dans le réel sous une double forme : elle apparaît à volonté sous l'aspect d'une vrille contenue dans un vrilloïde déterminé ; ou encore sous celui d'une recticongruence contenant toutes les normales à l'axe de la vrille précédente.

2me Cas (Espace ponctuel). Prenons toujours comme système de référence un tétraèdre fondamental P_k ($k = 0, 1, 2, 3$), ou, sous la forme dissymétrique, un corps initial P_0 et un trièdre T.

Si, par rapport à ces repères, un corps solide C possède 4 coordonnées *réelles,* c'est que ses distances aux quatre corps P_k sont également réelles. Dans ces conditions, le corps C *rencontre* [1] les 4 sommets du tétraèdre ; c'est donc l'un des ∞^3 corps obtenus en faisant pirouetter P_0 autour de l'origine du trièdre T. L'ensemble de ces ∞^3 corps définit donc une *stéréocouronne* [2] *à centre fixe;* l'espace ponctuel riemannien n'est que l'image d'une semblable stéréocouronne de corps solides.

[1]) En Géométrie hyperbolique deux corps sont *concourants* quand la torsion qui amène l'un sur l'autre se réduit soit à une simple rotation, soit à un simple glissement. Il est aisé de montrer que si C rencontre les 4 corps C_k, les 4 torsions correspondantes sont nécessairement des rotations.

[2]) Voir ma Note, *Archives*, t. XLI, p. 93 et suivantes.

Tout changement des repères revient à échanger le tétraèdre P_k contre un autre P'_k. Pour qu'un corps solide, réel au regard du premier tétraèdre, le reste pour le second, il faut que les 4 sommets P'_k appartiennent, eux aussi, à la stéréocouronne.

On voit que le mouvement de l'espace ordinaire, à six degrés de liberté, s'obtient par le moyen d'une double opération ; elle consiste à faire tourner, indépendamment l'un de l'autre, le corps initial P_0 et le trièdre T autour du centre de la stéréocouronne. Chacune de ces rotations est équivalente à une certaine transformation orthogonale réelle ; ce sont les deux transformations ainsi déterminées que l'on rencontre, qnand on cherche, comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du problème des vrilles, à définir l'influence du mouvement sur les coordonnées plückériennes de la droite. La décomposition en deux transformations orthogonales distinctes du sous-groupe adjoint au groupe du mouvement reçoit ici une interprétation très claire.

Les corps contenus dans une stéréocouronne déterminée sont imaginaires par rapport à une autre stéréocouronne. Malgré cela, il est clair que toute stéréocouronne à centre peut servir de représentant à l'espace ponctuel elliptique ; il existe autant de ces images différentes qu'il y a de stéréocouronnes à centre, à savoir ∞^6.

Chacune de ces représentations est *congruente,* en ce sens que la distance de deux corps de la stéréocouronne, soit la moitié de l'angle que l'un des corps doit décrire pour venir s'appliquer sur l'autre, est égale à la distance des points auxquels les corps servent d'images. De là les conséquences suivantes.

Prenons deux corps de la stéréocouronne ; les éléments réels de la vrille qui les joint forment une *couronne;* c'est donc la couronne qui correspond à la droite joignant dans l'espace ponctuel les points figuratifs de ces deux corps. De même, les éléments réels du vrilloïde qui passe par trois corps donnés de la stéréocouronne dessinent, dans l'espace ponctuel, la figure connue sous le nom de *couronoïde.* C'est donc le couronoïde qui est l'image, dans la Géométrie des corps solides, du plan de la Géométrie ponctuelle. Et voilà mise en évidence la cause qui fait que les relations entre solides, couronnes et couronoïdes,

sont exactement les mêmes que celles qui existent dans l'espace ponctuel entre les points, les droites et les plans.

Le couronoïde s'obtient en renversant un corps fixe autour de tous les axes issus d'un certain centre O ; c'est l'ensemble des corps communs au vrilloïde (P_0), qui admet pour son pôle le corps initial, et à une stéréocouronne de centre O. Voilà pourquoi la planimétrie, contenue comme cas particulier dans la stéréométrie, peut être envisagée à volonté comme la Géométrie des corps d'un même couronoïde, ou sous l'aspect de la Géométrie des rayons issus d'un même centre fixe.

3me *Cas* (Espace hyperbolique). Les diverses Géométries qui viennent d'être examinées ont toutes le caractère riemannien. Mais, sans sortir du domaine de la Géométrie des corps solides, il est aisé d'y découvrir une interprétation concrète des propriétés de la Géométrie non-euclidienne hyperbolique. Il suffit de considérer, pour les étudier à part dans leurs relations mutuelles, les ∞^3 corps d'une *stéréocouronne à plan fixe.*

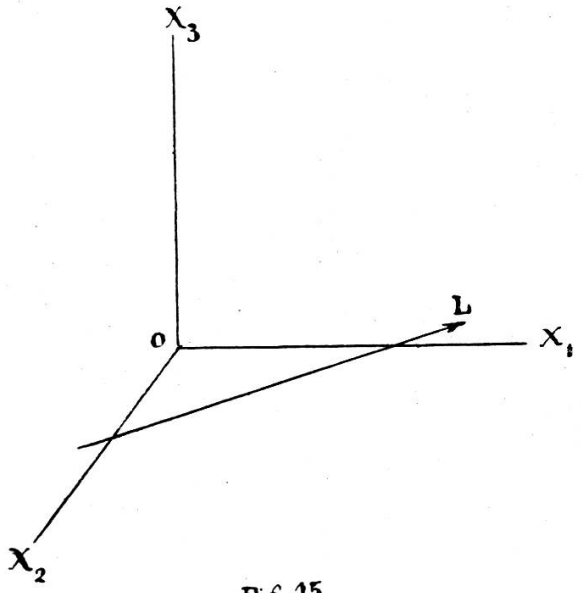

Fig. 15

Choisissons pour ce plan celui des x_1 x_2, et engendrons la stéréocouronne en faisant tourner le corps initial P_0 autour de tous les axes qui sont contenus dans le plan. (Fig. 15.)

Si L désigne l'un d'entre eux, et u l'amplitude de la rotation,

les composantes L_1 et L_2 sont réelles, tandis que $L_3 = i\,L''_3$ est purement imaginaire. Après la rotation, les coordonnées du corps P_0 sont devenues

$$x_0 = \xi_0 = \cos u \quad , \qquad x_1 = \xi_1 = L_1' \sin u \quad ,$$
$$x_2 = \xi_2 = L_2' \sin u \ , \qquad x_3 = i\xi_3 = iL_3'' \sin u \ ;$$

les trois premières sont réelles, la quatrième est purement imaginaire. Entre les composantes réelles de ces diverses quantités existe la relation

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 1 \ ,$$

qui caractérise un plan dans l'espace hyperbolique. Donc, *à chaque corps de la stéréocouronne à plan fixe correspond, d'une manière déterminée, un plan de l'espace de Lobatchewsky.*

D'après sa construction, il est clair que la dite correspondance implique conservation des relations métriques, de sorte que *la distance de deux corps de la stéréocouronne est égale à l'angle des deux plans qui représentent l'un et l'autre corps.*

Il est clair que la stéréocouronne étant donnée, le système de référence admet ∞^6 positions. En effet, ∞^3 est le nombre de positions du corps initial dans la stéréocouronne; une fois fixée la situation de P_0, le plan OX_1, OX_2 est défini; c'est celui de la stéréocouronne, mais le système d'axes peut être encore choisi, dans le dit plan, de ∞^3 manières distinctes. Toutes ces variantes dans la détermination du système de référence correspondent aux mouvements de l'espace hyperbolique, qui sont aussi sextuplement infinis.

En Géométrie euclidienne les seuls systèmes de ∞^3 corps deux à deux concourants sont les deux stéréocouronnes. Mais dans la Géométrie hyperbolique, il s'en rencontre de différentes espèces. Par exemple, un de ces nouveaux systèmes est celui qui correspond par dualité à la stéréocouronne à plan fixe. Il est formé de tous les corps obtenus en faisant glisser un solide déterminé, de toutes les manières possibles, le long des droites d'une même gerbe. On reconnaîtra facilement que ce sont les corps appartenant à une semblable stéréocouronne qui correspondent aux points de l'espace hyperbolique et peuvent leur servir d'images.

Et il ne serait pas plus difficile de définir de nouvelles espèces de stéréocouronnes pouvant servir à représenter les points d'un espace non-euclidien, où la forme fondamentale serait, par exemple, la suivante :

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 .$$

Je termine en rappelant que les résultats précédents ne seraient pas sensiblement modifiés si l'espace feuilleté qui sert de lieu à nos corps solides était du type euclidien, et non pas hyperbolique. En adoptant cette hypothèse, toute naturelle, on trouverait, et de différentes manières, dans la Géométrie euclidienne des corps solides, un mode d'interprétation concrète pour les diverses géométries non-euclidiennes.

Mais j'arrêterai ici ces quelques observations sur une théorie qui appellerait de longs développements et sur laquelle j'aurai peut-être à revenir quelque jour en raison de son intérêt.

(A suivre).