

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 41 (1916)

Artikel: Sur le frottement intérieur des fils de quartz aux basses températures
Autor: Guye, C.-E. / Einhorn-Bodzechowski, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742637>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE

FROTTEMENT INTÉRIEUR DES FILS DE QUARTZ

AUX BASSES TEMPÉRATURES

PAR

C.-E. GUYE et M. EINHORN-BODZIECHOWSKI

I. APERÇU HISTORIQUE

Depuis longtemps déjà les physiciens n'admettent guère l'existence de limites nettement tranchées entre les états solide, liquide et gazeux, de la matière, car on découvre, presque chez tous les corps qui se trouvent dans l'un de ces états, des propriétés appartenant par définition à un autre état. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que l'on ait cherché à expliquer certains phénomènes qu'on rencontre dans l'étude de l'élasticité des corps solides par le frottement intérieur ou viscosité qui est une propriété importante des liquides.

Ainsi, lorsqu'on tord un fil et qu'on l'abandonne à lui-même, le fil effectue, comme on sait, une série d'oscillations qui sont toujours amorties, même si l'on prend soin d'éviter autant que possible toute cause de dissipation extérieure d'énergie (résistance de l'air, transmission d'énergie au support, etc.). Dès l'origine l'on a donné une interprétation de ce phénomène en supposant l'intervention d'un frottement intérieur, dû au glissement des différentes couches du corps solide qui se déplacent les unes par rapport aux autres ; comme cela se produirait dans un liquide.

Mais à côté du frottement intérieur proprement dit, on fait souvent intervenir une autre propriété particulière aux corps solides : la réactivité élastique ou élasticité retardée.

Sous ce nom on comprend certains phénomènes qui inter-

viennent probablement dans toutes les expériences où l'on déforme un corps solide, à savoir :

1° Que la durée de l'action déformante exerce une influence sur la grandeur de la déformation ;

2° Que le changement de forme du corps persiste partiellement pendant un certain temps après que la force déformante a cessé d'agir ;

3° Que l'effet produit par une nouvelle force déformante dépend des forces antérieures auxquelles le corps avait été soumis, ainsi que du temps écoulé depuis le moment où ces forces ont cessé d'agir.

Parmi les expériences qui se prêtent particulièrement bien à ce genre d'étude, on doit mentionner l'observation de l'amortissement des oscillations produites par la torsion et par la flexion. De bonne heure déjà ce problème a attiré l'attention des expérimentateurs et des théoriciens⁽¹⁾ ; il intervient accessoirement d'ailleurs dans un très grand nombre d'expériences, aussi a-t-il fait l'objet de nombreuses études.

Envisageons d'abord le frottement tel qu'on le connaît dans les liquides. Il n'y a pas à ce propos de divergence essentielle sur le caractère de ce frottement. La force du frottement est considérée comme une fonction de la vitesse, conformément à l'hypothèse émise déjà par Newton⁽²⁾ et quelque temps plus tard par D. Bernoulli⁽³⁾.

Si la vitesse est petite la force de frottement f qui s'exerce entre deux couches voisines est comme on sait proportionnelle à la vitesse relative et à la surface de contact ; elle est indépendante de la pression. On peut exprimer cette loi par la formule :

$$f = \eta s \frac{dv}{dx} ,$$

¹⁾ L'équation différentielle des oscillations amorties était connue de Coulomb (1784) qui chercha à l'intégrer en faisant des suppositions simplificatrices. Poisson (*Mécanique*, 1811, t. I, p. 405) donne l'intégrale pour le cas où la force résistante est proportionnelle au carré de la vitesse. La solution du problème, pour le cas où la résistance est proportionnelle à la vitesse, a été donnée par Gauss. (Resultate der Beob. des magnet. Vereins, 1837, Œuvres, t. V.)

²⁾ Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687, Lib. II sect. IX.

³⁾ Bernoulli, Mémoires de Petersbourg, t. IV et V.

dv/dx étant la dérivée de la vitesse suivant la normale à la surface de contact, s la grandeur de cette surface et η un coefficient qui dépend de la nature et de la température du liquide ; c'est le coefficient de viscosité du liquide.

En appliquant cette formule au problème d'un disque cylindrique de rayon r tournant autour de son axe à l'intérieur d'un liquide indéfini on en déduit pour le moment du couple produit par les forces de frottement l'expression théorique

$$C = \eta \frac{r^4}{4} \frac{d\omega}{dx},$$

ω étant la vitesse angulaire communiquée à l'une des couches du liquide.

On a souvent eu recours à cette expérience pour déterminer le coefficient de viscosité. Cependant, si on traite le problème d'une façon rigoureuse, en partant des équations de l'hydrodynamique et en y introduisant les conditions limites, on arrive à des considérations assez compliquées par le fait que ni le disque, ni les couches liquides ne peuvent être considérés comme infiniment étendus ; les résultats sont alors peu précis.

Le problème du frottement intérieur des corps solides a été abordé par Coulomb ⁽¹⁾ en 1784. En construisant sa balance de torsion destinée à la mesure des très petites forces, ce grand initiateur se vit amené à étudier la « petite quantité due à l'imperfection de l'élasticité », et il en tient compte dans ses études théoriques et expérimentales sur la force de torsion et sur l'élasticité des fils métalliques, en supposant la réaction « proportionnelle à l'angle de torsion ou altérée par un terme très petit. »

Comme résultat de ses recherches, Coulomb indique que pour des amplitudes initiales inférieures à 45° « les altérations sont à peu près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion », au-dessus de 45° par contre les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand ⁽²⁾.

¹⁾ Coulomb, Collection de Mémoires relatifs à la physique, publiés par la Société française de physique. Tome I. Mémoires de Coulomb, Paris. 1884.

²⁾ *Loc. cit.*, p.92.

Plus tard Coulomb fit des expériences destinées à déterminer la cohérence des fluides et les lois de leur résistance aux mouvements très lents. Il étudia dans ce but les oscillations d'un disque suspendu à un fil métallique très fin à l'intérieur d'un liquide. A cette occasion Coulomb prend en considération le frottement intérieur du fil de suspension. « Mais, dit-il, avant d'employer les expériences qui précèdent à déterminer le coefficient de la vitesse, dans la formule qui représente la partie de la résistance du fluide proportionnelle à la simple vitesse, il y a, comme je l'ai dit plus haut, une petite quantité dépendante de l'imperfection de l'élasticité du fil de suspension, qui, dans les différentes amplitudes des oscillations les altère proportionnellement à leur amplitude (voir plus loin chap. II) ou, ce qui revient au même d'après la théorie que nous venons d'exposer, proportionnellement à la vitesse » ⁽¹⁾.

En ce qui concerne le frottement intérieur des liquides, Coulomb trouva, que la viscosité produit une diminution de l'amplitude des oscillations telles que les amplitudes consécutives forment une progression géométrique. La différence des logarithmes de deux amplitudes consécutives est proportionnelle à la quatrième puissance du rayon du disque.

La théorie des expériences de Coulomb sur le frottement intérieur des liquides a été donnée par O. E. Meyer ⁽²⁾ en 1857. Elle formait le sujet d'un prix offert aux étudiants par l'Université de Königsberg. A cette occasion Meyer, à qui le prix fut décerné, se vit amené à répéter les expériences de Coulomb (il n'a remplacé que plus tard la suspension unifilaire par un bifilaire) et dû s'occuper, de même que Coulomb, du frottement intérieur du fil. Pour évaluer l'influence de ce phénomène, Meyer ⁽³⁾ se sert soit de l'une, soit de l'autre des deux représentations suivantes :

1° La résistance interne du fil est proportionnelle à la vitesse

¹⁾ *Loc. cit.*, p. 342.

²⁾ O. E. Meyer, « Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. A. L. Crelle, 1861, **59**, p. 229-303. *Ibid.*, 1863, **62**, p. 201-214.

³⁾ O. E. Meyer, « Über die Reibung der Flüssigkeiten. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1861, **113**, p. 55-86, 193-238, 383-424.

angulaire de l'appareil et entre en ligne de compte sous forme d'un terme de correction — $F (d\alpha/dt)$; ⁽¹⁾

2° Le frottement intérieur du fil obéit aux mêmes lois que celui des liquides de sorte qu'il faut ajouter à chaque composante de la déformation une longueur proportionnelle à la composante de la vitesse suivant la même direction.

Il trouve alors (en désignant par r le rayon et par l la longueur du fil pour le coefficient de la résistance résultant du frottement l'expression :

$$F = \frac{\pi H r^4}{2l} ,$$

où :

$$H = \mu G ;$$

G est le second module d'élasticité et H le « coefficient de frottement » du corps, μ est une constante qui dépend de la nature du fil. L'expression de coefficient de résistance F est mise comme l'on voit sous la forme d'un moment de torsion.

Les résultats des observations indiqués par Meyer sont (en utilisant comme unités le cm. et la sec.) :

$$\begin{array}{ll} \text{Pour l'eau à } 15^{\circ},5 & \eta = 0,0131 \quad , \\ \text{Pour l'air à } 18^{\circ} & \eta = 0,000360 \quad . \end{array}$$

Quant au coefficient de frottement défini plus haut, il a pour un fil de laiton la valeur :

$$H = 3.10^8 .$$

Aux opinions de Coulomb et de O. E. Meyer on peut opposer celles de Gauss et de Weber, reprises plus tard par L. Boltzmann, suivant lesquelles l'amortissement des oscillations est un effet de réactivité.

Gauss paraît avoir été le premier à remarquer que l'allongement élastique dû à la traction est influencé par la durée de la charge. Il communique ses observations à Weber ⁽²⁾ en ces termes :

« La loi consiste en ceci que l'allongement ou le raccourcis-

¹⁾ Nous désignons par F le coefficient de résistance, conformément au symbole, utilisé plus loin, Chap. II.

²⁾ W. Weber, « Über die Elastizität der Seidenfäden. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1835, **34**, p. 247-257.

sement résiduel auquel on peut encore s'attendre à partir d'un instant donné est inversement proportionnel à la durée écoulée jusqu'à cet instant à partir d'un moment déterminé. »

Des recherches postérieures de Weber ⁽¹⁾ et de Kohlrausch ⁽²⁾ ont eu pour but d'étudier la réactivité élastique et d'établir une théorie générale du phénomène, basée sur des considérations relatives à la constitution moléculaire des corps. Ces tentatives n'ont cependant pas abouti à une solution tout à fait générale du problème.

C'est pour cette raison que O. E. Meyer ⁽³⁾ et un peu plus tard L. Boltzmann ⁽⁴⁾ abordent le même sujet. Boltzmann se pose la question suivante : Quelle est la grandeur de la réactivité élastique dans le cas d'une déformation antérieure qui est une fonction quelconque du temps ?

En partant des équations générales du problème, Boltzmann conduit le calcul jusqu'à l'établissement de formules qui peuvent être immédiatement et sans aucune difficulté soumises au contrôle expérimental. Weber et Kohlrausch avaient observé qu'on obtient des déformations permanentes si on n'a pas soin de soumettre le fil d'abord à plusieurs torsions alternatives, et Streintz ⁽⁵⁾ avait trouvé une influence des déformations antérieures sur la valeur du décrement logarithmique ; Boltzmann en tire la conclusion, que ses formules, pour être tout à fait d'accord avec l'observation, exigent encore une certaine correction.

Le point de départ de la théorie de Boltzmann est l'idée sui-

¹⁾ W. Weber, « Über die Elastizität fester Körper. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1841, **54**, p. 1-18.

²⁾ F. Kohlrausch, « Über die elastische Nachwirkung bei der Torsion. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1863, **119**, p. 337-368. *Id.*, « Beiträge zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung. » *Ibid.*, 1866, **128**, p. 1-20, 207-227, 339-419.

³⁾ O. E. Meyer, « Theorie der elastischen Nachwirkung. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1874, **151**, p. 108-119.

⁴⁾ L. Boltzmann, « Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1876, Ergänzungsband **7**, p. 624-654. *Berichte der Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien*, 1874, **70**, p. 271-306.

⁵⁾ H. Streintz, « Über die Dämpfung der Torsionsschwingungen von Drähten. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1874, **153**, p. 387-410. *Berichte der Kais.-Akad. d. Wiss. zu Wien*, 1874, **69**, p. 337-378.

vante: « Les forces qui agissent à un moment donné sur les faces d'un parallélépipède ne dépendent pas seulement des allongements que subit le parallélépipède au moment considéré, mais aussi des allongements antérieurs, l'influence de chacun de ces allongements étant d'ailleurs d'autant plus faible qu'il a eu lieu à un instant plus éloigné; la force nécessaire pour produire un allongement déterminé est du reste plus faible si une déformation de même sens a déjà eu lieu auparavant. »

Boltzmann ajoute donc aux composantes des pressions élastiques des termes représentant « l'affaiblissement de la force » dû aux déformations antérieures. L'affaiblissement de la force est proportionnel à la durée (infinitement petite) de la déformation considérée, à la grandeur de la déformation, et à une certaine fonction du temps écoulé depuis le moment où a eu lieu la déformation. De plus, tant que les déformations ne sont pas trop grandes, il admet « qu'il y a superposition de l'influence des déformations produites à des époques différentes, c'est-à-dire que l'affaiblissement de la force, dû à un allongement antérieur, est indépendant des états intermédiaires par lesquels le corps a passé. »

Ces suppositions suffisent pour établir les équations du mouvement d'un corps isotrope, affecté de réactivité élastique, à deux fonctions du temps près $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ qui indiquent de quelle façon l'action affaiblissante des déformations antérieures varie avec le temps.

Boltzmann indique les formules nécessaires pour déterminer φ et ψ par différentes expériences faites sur la torsion des fils, et calcule la fonction ψ d'après les expériences de Kohlrausch ⁽¹⁾, de Neesen ⁽²⁾ et de Streintz ⁽³⁾.

En ce qui concerne le problème des oscillations torsionnelles, Boltzmann établit « que le décrétement logarithmique ne dépend que de la matière qui constitue le fil et naturellement aussi de son état, par exemple de la trempe et de la température, mais

¹⁾ *Loc. cit.*

²⁾ Neesen, « Beitrag zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung bei Torsion. » *Monatsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissenschaften*, février 1874.

³⁾ *Loc. cit.*

qu'il est indépendant de toute autre condition, loi qui a été trouvée expérimentalement par Streintz » et qui est exprimée par la formule théorique ⁽¹⁾ :

$$\lambda = \frac{\pi^2}{2} \frac{B}{A},$$

où B et A sont deux constantes dépendant de la matière du fil seulement.

Quelques expériences que Boltzmann a faites avec un fil de verre, conduisent à la valeur du décrement logarithmique $\lambda = 0,0161$, tandis que le calcul fournit la valeur 0,013, mais l'auteur fait remarquer qu'on ne pouvait s'attendre à un accord quantitatif, parce que les observations n'ont pas été effectuées avec le soin nécessaire, et en particulier parce que l'appareil n'a pas été protégé contre les courants d'air.

A une époque plus récente, M. W. Voigt ⁽²⁾ a repris l'hypothèse plus ancienne suivant laquelle l'amortissement des oscillations doit être attribué au frottement intérieur des corps solides. M. Voigt comprend sous le nom de frottement intérieur « seulement cette force, agissant entre les différentes parties d'un même corps, qui, à la façon de la viscosité des liquides, se produit par suite des différences de vitesse à l'intérieur du corps et qui, par conséquent, cesse d'agir lorsque la vitesse tend vers zéro. »

De même que Boltzmann, M. Voigt cherche à établir une relation entre les résultats des observations sur le frottement intérieur et les constantes individuelles de l'éprouvette étudiée ⁽³⁾. Pour établir l'équation du mouvement M. Voigt ajoute, aux composantes de pression de la théorie d'élasticité, des termes, fonction linéaire des dérivées par rapport au temps, des six composantes de la déformation. Dans le cas d'une tige cylin-

¹⁾ Boltzmann désigne le décrement par L, au lieu de λ .

²⁾ W. Voigt, « Über die innere Reibung der festen Körper insbesondere der Kristalle. » *Abhandlungen d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen*, 1890, 36.

³⁾ Ces recherches ne se rapportent qu'à des corps homogènes isotropes ou anisotropes et, selon les idées de M. Voigt, l'application des résultats au cas des tiges étirées n'est pas admissible d'une manière générale.

drique on trouve ainsi, pour des petites vitesses de déformation, l'expression :

$$d = \frac{\lambda T}{2\pi^2},$$

d étant le rapport entre le module du frottement et le module d'élasticité.

Il en résulte que le produit du décrement logarithmique λ et de la période des oscillations T doit présenter une valeur constante pour une substance donnée.

Les résultats de la théorie de Voigt sont donc en contradiction avec la théorie de Boltzmann, car *tandis que, selon Boltzmann, le décrement logarithmique λ est indépendant de la période T , il est inversement proportionnel à celle-ci, d'après la théorie de Voigt.*

M. Voigt a soumis sa théorie à un examen expérimental ⁽¹⁾ approfondi en effectuant un très grand nombre d'observations extrêmement soignées et remarquables, portant sur des éprouvettes métalliques qui ont été taillées dans des blocs de métal fondus avec le plus grand soin. Plus récemment des observations sur des cristaux ont été effectuées également à l'instigation de M. Voigt par M. F. Schmidt ⁽²⁾.

Nous nous bornons à mentionner parmi les résultats de ces recherches, que le cuivre et le nickel semblent obéir à la théorie du frottement intérieur, fonction de la vitesse, tandis que le cadmium fournit un décrement logarithmique à peu près constant et semble, par conséquent, se conformer à la théorie de Boltzmann. Un assez grand nombre de métaux par contre ne vérifient ni l'une ni l'autre des deux théories.

M. Voigt examine la supposition plus générale que les deux effets se produisent simultanément, c'est-à-dire que l'amortissement des oscillations est dû en partie au frottement intérieur

¹⁾ W. Voigt, « Bestimmung der Constanten der Elastizität und Untersuchung der inneren Reibung für einige Metalle ». *Abhandlungen d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen*, 1892, **38**. Un extrait de ce travail se trouve dans les *Annalen d. Physik u. Chemie* (Wiedemann), 1892, **47**, p. 671-693.

²⁾ F. Schmidt, « Ueber die Dämpfung langsamer Biegungs- und Drillungsschwingungen von Steinsalzprismen. » Diss., Goettingue, 1912.

fonction de la vitesse et en partie à la réactivité du corps, et il indique des formules représentant le décrement comme somme de ces deux effets. Cette simple superposition des deux théories ne suffit d'ailleurs pas pour expliquer l'ensemble des phénomènes observés et constitue une hypothèse encore trop spéciale. M. Voigt en conclut qu'une théorie, pour être tout à fait générale, doit prendre pour point de départ les formules de Maxwell, qui donnent les composantes de pression sous forme de séries ordonnées suivant les dérivées, par rapport au temps, des déformations.

Après avoir examiné les principales théories il nous reste à ajouter quelques remarques relatives aux résultats des différents observateurs. La structure des corps solides étant extrêmement compliquée et aucune théorie ne conduisant à un résultat général, conforme aux observations, quelques auteurs ont interprété leurs expériences au moyen de relations empiriques renfermant certains paramètres, constants pour les corps étudiés. Nous ne croyons pas que ce procédé puisse être d'une grande utilité.

Il nous semble, au contraire, que le but des recherches expérimentales doit être la constatation de l'influence de chacun des facteurs qui sont susceptibles d'agir sur l'expérience, telles que la température, l'amplitude, la période, la longueur et le diamètre de l'éprouvette, etc.

De bonne heure déjà on a cherché à établir le rôle que joue dans ces phénomènes l'amplitude des oscillations parce que ce sujet est relativement facile à aborder. Parmi les expériences faites dans cette direction nous citons celles de Gauss et de Weber, de Warburg ⁽¹⁾, Streintz ⁽²⁾, Braun ⁽³⁾,

¹⁾ E. Warburg, « Über die Dämpfung der Töne fester Körper durch innere Widerstände », *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1870, **139**, p. 89-104.

²⁾ H. Streintz, *loc. cit.* et « Beiträge zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung. » *Berichte der Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien*, 1880, **80**, p. 397-438.

³⁾ F. Braun, « Über elastische Schwingungen deren Amplituden nicht unendlich klein sind. » *Annalen d. Physik u. Chemie* (Poggendorff), 1874, **151**, p. 51-69, 250-267.

Schmidt ⁽¹⁾, Wiedemann ⁽²⁾, Bouasse ⁽³⁾, Voigt, ainsi que celles qui ont été faites au Laboratoire de Physique de l'Université de Genève.

Il ne nous est pas possible, dans le cadre restreint de cet aperçu historique, d'exposer en détail le contenu de ces nombreux travaux, et nous nous bornons à renvoyer le lecteur aux mémoires de ces auteurs.

Les expériences ont porté sur des fils de soie, de métal, de verre, de caoutchouc, sur des cordes, des tiges de bois, etc. Le résultat général qui se dégage de ces travaux, d'une manière à peu près concordante, peut être résumé comme suit :

Pour chaque fil il existe en général une certaine limite d'amplitude au-dessous de laquelle le décrement est pratiquement constant, en ce sens que les amplitudes diminuent suivant une progression géométrique. La limite en question ne peut être établie que par l'expérience.

Au-dessus de cette limite le décrement est une fonction croissante de l'amplitude ; il diminue si l'amplitude décroît.

D'après M. Voigt, la diminution du décrement λ , pour des tiges métalliques, est en général d'autant plus considérable que la valeur absolue de λ est plus grande, et pour une même substance, la diminution de λ est d'autant plus grande que les oscillations sont plus rapides. M. Voigt croit pouvoir expliquer ce fait par la supposition que le frottement n'est pas une fonction linéaire de la vitesse. Il ajoute donc des termes renfermant la troisième puissance de la vitesse de déformation et arrive ainsi à la formule :

$$\lambda = A + A\alpha_n^3,$$

¹⁾ P.-M. Schmidt, «Über die innere Reibung fester Körper», *Annalen d. Physik u. Chemie* (Wiedemann), 1877, **2**, p. 48-66.

²⁾ G. Wiedemann, «On Torsion», *Phil. mag.*, 1880, **9**, p. 1-15, 97-109. «Über die Torsionen», *Annalen d. Physik u. Chemie* (Wiedemann), 1879, **6**, p. 485-520.

³⁾ H. Bouasse, «Torsion des fils fins», *Ann. de Phys. et de Chim.*, 1897, **11**. «Pertes d'énergie dans les phénomènes de torsion», *Ibid.*, 1898, **14**. «Sur la théorie des déformations permanentes», *Ibid.*, 1901, **23**. «Sur les déformations des corps solides», *Ibid.*, 1903, **29**. «Sur la fatigue d'élasticité», *Ibid.*, 1904, **2**. «Sur l'amortissement des vibrations» (en coll. avec M. Carrière), *Ibid.*, 1908, **14**.

où λ est le décrement observé pour une valeur α_n de l'amplitude, Λ par contre le décrement limite correspondant aux amplitudes infiniment petites. Cette formule s'accorde bien avec les résultats des expériences de M. Voigt, d'autres observateurs par contre, en expérimentant sur des fils étirés recuits, ont trouvé que λ est une fonction linéaire de l'amplitude ⁽¹⁾.

En ce qui concerne les fils de verre, l'influence de l'amplitude sur le décrement logarithmique semble être inappréciable dans les mêmes conditions où elle est très sensible pour les fils métalliques ⁽²⁾.

Il importe de remarquer à ce propos que l'influence de l'amplitude ⁽³⁾ sur le décrement peut être modifiée notablement par *l'accomodation*. Cet effet a été observé pour la première fois par Weber, puis étudié par d'autres auteurs, parmi lesquels W. Thomson ⁽⁴⁾, mais principalement par M. Bouasse. Il est indispensable de mettre en ligne de compte ce facteur si on s'occupe de l'influence de l'amplitude.

Beaucoup moins nombreuses que les recherches sur l'influence de l'amplitude sont celles qui se rapportent à l'influence de la période des oscillations. Habituellement on modifie la période en changeant le moment d'inertie. Mentionnons cependant un travail de M. Warburg, qui produit la variation de la période en ajoutant aux forces élastiques développées par la torsion, des actions magnétiques.

Malheureusement, en dépit de l'importance qu'auraient des

¹⁾ C.-E. Guye et H. Schapper, « Sur le frottement intérieur de quelques métaux aux basses températures », *Arch. Sc. phys. et nat.*, Genève, août 1910.

²⁾ C.-E. Guye et S. Vassileff, « Frottement intérieur des verres en fonction de la température », *Arch. Sc. phys. et nat.*, Genève, mars et avril 1914.

³⁾ Afin de réduire l'influence des erreurs d'observation, quelques auteurs utilisent, pour le calcul du décrement logarithmique, la formule suivante, indiquée par O.-E. Meyer :

$$n\lambda = \frac{2}{m(m+1)} \sum_{p=1}^{p=m} \log \frac{\alpha_0}{\alpha_p},$$

où α_0, α_1 etc. signifient les m élongations observées, séparées l'une de l'autre par un intervalle de n périodes.

⁴⁾ W. Thomson, « On the elasticity and viscosity of metals », *Phil. mag.*, 1865, 30, p. 63-71, *Proc. Royal soc. of London*. 1865, 14, p. 289.

résultats concordants pour la confrontation des théories générales, les résultats de ces recherches sont très variés.

Il est donc impossible d'en dégager une conclusion simple. Tantôt c'est l'une, tantôt l'autre des deux théories principales que nous avons mentionnées qui semble plus ou moins bien vérifiée, quelquefois même aucune des deux.

Il semble toutefois que l'amortissement de la plupart des corps, examinés à la température ordinaire et aux températures élevées, soit attribuable, en majeure partie du moins, à la réactivité élastique.

Ceci nous amène à parler du sujet qui nous intéresse plus particulièrement dans les présentes recherches, c'est-à-dire de l'influence de la température sur le décrement logarithmique des oscillations. En 1863, Kohlrausch ⁽¹⁾ paraît avoir attiré le premier l'attention sur le fait que la température exerce une influence particulièrement grande sur la valeur du décrement. Ainsi par exemple le décrement d'un fil d'argent était à 21° deux fois plus grand qu'à zéro.

Dans ces recherches, Kohlrausch utilisa les variations journalières de la température, et put atteindre, un jour d'été exceptionnellement chaud, la température de 33°,4. D'autres physiciens l'ont suivi dans cette voie; mentionnons parmi ceux-ci Streintz, Schmidt, Pisati ⁽²⁾, Klemenčić ⁽³⁾, Tomlinson ⁽⁴⁾, Gray ⁽⁵⁾ et Horton ⁽⁶⁾.

¹⁾ *Loc. cit.*

²⁾ Pisati. « Sur l'élasticité des métaux à diverses températures », *Cimento*, 1880, **5**.

³⁾ J. Klemenčić, « Beiträge zur Kenntniss der inneren Reibung im Eisen », *Berichte der Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien*, 1879, **78**, p. 935-942. *Id.*, « Beobachtungen über die Dämpfung der Torsionsschwingungen durch die innere Reibung », *ibid.*, 1880, **81**, p. 791-809.

⁴⁾ H. Tomlinson, « The effect of magnetisation on the elasticity and the internal friction of metals », *Phil. Trans.*, 1886, **177**, p. 801-837.

⁵⁾ A. Gray, V.-J. Blyth and J.-S. Dunlop, « On the effect of changes of temperature on the elasticities and internal viscosity of metal wires », *Proc. Royal Soc. of London*, 1900, **67**, p. 180-197.

⁶⁾ F. Horton, « Effect of Changes of Temperature on the modulus of Torsional Rigidity of Metall wires. » Exhibition Research Scholar of the University of Birmingham. *Proc. Royal Soc. of London*, 1904, **73**.

Il est à noter cependant que tous ces observateurs n'ont soumis les corps qu'à des variations de température relativement faibles. Leurs expériences n'ont pas été effectuées au-dessous de 0° et dans un seul cas on a atteint la température de 126° , limites trop restreintes pour permettre des conclusions d'une portée générale.

Afin de combler cette lacune, des recherches ont été entreprises depuis plusieurs années, au Laboratoire de Physique de l'Université de Genève, sous la direction de M. le Prof. C.-E. Guye ⁽¹⁾, ces recherches s'étendant sur un assez grand nombre de corps (métaux, verres, quartz) et sur un intervalle de température compris entre -195° et $+360^{\circ}$. A toutes ces températures on a étudié l'influence de l'amplitude et de la période sur le décrement logarithmique, et cela par diverses méthodes.

Parmi les résultats généraux qui ressortent de ces expériences on peut citer l'augmentation vraiment surprenante que subit l'amortissement des oscillations aux températures élevées. Dans quelques cas l'amortissement passe par un maximum à certaines températures (acier ordinaire) ou subit un brusque accroissement (acier invar) révélant ainsi une transformation qui s'opère à l'intérieur de la matière.

Aux températures élevées, le décrement logarithmique semble être indépendant de la période des oscillations du moins dans la limite peu étendue des observations effectuées. Il est en outre presque toujours une fonction linéaire de l'amplitude.

Aux basses températures le décrement logarithmique des oscillations subit une diminution le plus souvent considérable. Cette diminution a pu suggérer l'idée, appuyée du reste par le théorème thermo-dynamique de Nernst, qu'à une température plus basse encore l'amortissement des oscillations tendrait à disparaître, de même que tout autre effet irréversible qui serait la conséquence de l'agitation moléculaire ; mais nous verrons plus loin qu'on peut faire intervenir d'autres considérations.

¹⁾ C.-E. Guye et S. Mintz, «Etude sur la viscosité de quelques métaux en fonction de la température», *Arch. Sc. phys. et nat.*, Genève, août et septembre 1908, C.-E. Guye et V. Fréedericksz, «Frottement intérieur des solides aux basses températures», *ibid.*, janvier, février et mars 1910, deux autres travaux ont été cités plus haut.

Quant au mécanisme moléculaire du frottement intérieur, il reste encore très mystérieux ; on peut le chercher d'une part dans l'agitation thermique des molécules et d'autre part dans des phénomènes d'orientation moléculaire ; on est ainsi amené à rapprocher le frottement intérieur d'autres phénomènes irréversibles, en particulier de l'hystérésis magnétique ⁽¹⁾.

La variation du décrement logarithmique avec la température est certainement un phénomène compliqué, et il y a peu de chance de pouvoir la représenter au moyen d'une formule d'interpolation simple, comme celle de Streintz ⁽²⁾ ou celle de Tomlinson ⁽³⁾.

Des formules empiriques de ce genre n'ont aucune signification générale et sont, par conséquent, d'une utilité contestable.

Notons encore que Kohlrausch, en se basant sur un petit nombre d'observations effectuées entre 0° et 33°,4 seulement, a cru pouvoir supposer que la chaleur est la principale cause de la réactivité, et que celle-ci diminue d'une façon asymptotique lorsque la température décroît. Il est assez remarquable que les travaux récents cités plus haut confirment en somme cette conception de Kohlrausch.

En résumé, en essayant de dégager quelques conclusions générales de l'ensemble des travaux passés en revue, nous penchons vers l'opinion émise par M. Voigt que le décrement des oscillations doit être attribué en général à deux effets superposés au moins, d'une part au frottement intérieur fonction de la vitesse, et d'autre part à une réactivité élastique telle que l'envisage M. Boltzmann.

Les recherches qui font l'objet du présent travail semblent venir également à l'appui de cette manière de voir.

¹⁾ Cf. C.-E. Guye, « Le frottement intérieur des solides », *Journal de Physique*, 1912, 2, p. 620-645.

²⁾ Formule de Streintz :

$$\lambda = \alpha + \beta \varphi^{\gamma \vartheta} ,$$

α , β et γ étant des constantes ; α représente probablement la partie du décrement qui est dû à la résistance de l'air ; ϑ signifie la température.

³⁾ Formule de Tomlinson :

$$\lambda = \lambda_0 (1 + a\vartheta + b\vartheta^2) ,$$

λ_0 est le décrement à zéro ; a et b sont des constantes.

Le point de départ de ces recherches était le suivant :

Les expériences effectuées précédemment par C.-E. Guye et S. Vassileff ⁽¹⁾ sur le frottement intérieur des verres aux températures moyennes et élevées avaient montré que le frottement intérieur présente alors une très grande régularité. En premier lieu le décrement est rigoureusement indépendant de l'amplitude, ce qui n'est qu'exceptionnellement le cas pour les métaux. Bien que le décrement soit constant, le frottement intérieur des verres ne peut cependant pas être assimilé au frottement intérieur des liquides; en ce sens que si l'on change le moment d'inertie sans rien modifier au reste de l'expérience le cycle est parcouru plus ou moins rapidement et cependant le décrement reste pour ainsi dire constant. En outre le frottement intérieur paraît être une propriété physique, parfaitement définie, sur laquelle l'hystérésis thermique et mécanique de l'échantillon n'a que très peu d'influence, à la condition de recuire préalablement les verres. En résumé le frottement intérieur des verres aux températures moyennes et élevées semble donc suivre plutôt la loi de Boltzmann.

Il était particulièrement intéressant d'étudier les variations du frottement intérieur des verres aux basses températures afin de vérifier d'abord si les propriétés précédentes existent encore au fur et à mesure que l'état solide est plus complet.

Pour la même raison, il a semblé utile d'étendre les recherches à des fils de quartz, les résultats devant être, dans ce cas, d'une interprétation particulièrement intéressante, à cause de la constitution chimique simple de ce corps. Le décrement d'un seul fil de quartz avait été étudié à basse température déjà antérieurement par MM. C.-E. Guye et V. Fréedericksz ⁽²⁾. Cependant cette expérience n'avait pas conduit à une conclusion bien nette, à cause du nombre trop restreint des observations et à cause de l'emploi d'un double fil de suspension, introduisant une correction qui est du même ordre de grandeur que la quantité à déterminer.

Il était donc indiqué de se servir d'un nouveau dispositif qui

¹⁾ *Loc. cit.*

²⁾ *Loc. cit.*

permet d'éviter les inconvénients résultant aux basses températures de l'emploi d'un double fil de suspension, ainsi que toute autre correction.

II. PRINCIPE DE LA MÉTHODE.

La définition du décrement logarithmique donnée par les divers auteurs n'étant pas toujours la même, nous avons cru nécessaire de récapituler très brièvement la théorie des oscillations amorties. Le lecteur trouvera ainsi dans ce chapitre un résumé des différentes formules dont nous aurons l'occasion de nous servir dans la suite.

§ 1. *Eléments de la théorie des oscillations amorties.*

Cas du frottement intérieur proportionnel à la vitesse.

A l'extrémité libre d'un fil supposé parfaitement élastique, fixons un disque dont le moment d'inertie par rapport à l'axe de suspension soit I . En écartant le disque de sa position d'équilibre et en l'abandonnant à lui-même, on provoque des oscillations torsionnelles.

L'équation du mouvement d'un pareil système résulte du principe connu suivant lequel le moment d'inertie multiplié par l'accélération angulaire est égal au moment du couple de torsion. Si l'on fait abstraction de l'amortissement du mouvement, les forces agissant sur le système se réduisent à un couple dû à la torsion du fil de suspension. Ce couple est proportionnel à l'angle d'écart (compté à partir de la position d'équilibre) et tend toujours à ramener le système dans sa position d'équilibre.

L'équation peut être mise sous la forme :

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = - E\alpha, \quad (1)$$

¹⁾ E représente le moment du couple de torsion développé dans le fil les deux sections extrêmes étant tordues l'une par rapport à l'autre d'un angle égal à un radian ($57^\circ 19' 29''$). Pour un cylindre de rayon r et de longueur l , on a en désignant par G le second module d'élasticité.

$$E = \frac{GI_{pol}}{l} = \frac{\pi r^4 G}{2l}.$$

soit :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{E}{I} \alpha ;$$

et si l'on remplace :

$$\frac{E}{I} = \omega^2 ,$$

on a comme intégrale :

$$\alpha = c_1 \sin (\omega t + c_2) . \quad (1)$$

Pour déterminer les deux constantes c_1 et c_2 nous admettons qu'au temps $t=0$ le disque se trouve dans sa position d'équilibre $\alpha = 0$ et possède la vitesse $d\alpha/dt = v_0$. Nous obtenons alors :

$$\alpha = \frac{v_0}{\omega} \sin (\omega t) .$$

Le mouvement est alors une oscillation harmonique simple (sinusoïdale) d'amplitude $\alpha_{\max} = v_0/\omega$. La période de ces oscillations isochrones est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{E}} . \quad (2)$$

Mais en réalité on constate que les oscillations sont toujours amorties, même si elles se font dans le vide et si l'on empêche autant que possible que le fil de suspension ne cède de l'énergie au support auquel il est fixé. Il faut donc admettre qu'il existe à l'intérieur du fil un ensemble de causes qui ont pour effet d'absorber d'une façon irréversible l'énergie du mouvement lorsque les diverses parties qui composent le solide se déplacent les unes par rapport aux autres. C'est à cet ensemble de causes que nous donnons d'une façon tout à fait générale le nom de « frottement intérieur » ⁽¹⁾.

D'après l'interprétation habituelle due à Coulomb on admet que le couple dû au frottement intérieur, qui agit dans un sens opposé à celui du mouvement, est à chaque instant propor-

¹⁾ Ce nom comprend donc les deux effets désignés plus haut par les termes « frottement intérieur fonction de la vitesse » et « réactivité élastique ». C'est dans cette signification générale que le nom « frottement intérieur » est utilisé dans le présent travail. Nous avons conservé du reste les deux désignations ci-dessus mentionnées pour les deux effets qu'il faut souvent distinguer.

tionnel à la vitesse angulaire. L'équation du mouvement est alors :

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -F \frac{d\alpha}{dt} - E\alpha, \quad (1)$$

soit :

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + F \frac{d\alpha}{dt} + E\alpha = 0, \quad (3)$$

équation différentielle bien connue. Si $F^2 - 4IE < 0$ (ce qui est le cas lorsque le couple provenant du frottement intérieur est petit) et si nous posons :

$$\frac{F}{2I} = k$$

et :

$$\sqrt{\frac{4IE - F^2}{4I^2}} = \omega,$$

l'intégrale générale s'écrit :

$$\alpha = c_1 e^{-kt} \sin(\omega t + c_2).$$

En comptant le temps à partir d'un moment où le système passe par sa position d'équilibre avec une vitesse $d\alpha/dt = v_0$ nous obtenons :

$$\alpha = \frac{v_0}{\omega} e^{-kt} \sin(\omega t). \quad (4)$$

Dans le cas d'un mouvement périodique amorti il n'y a pas une période d'oscillation bien définie. L'on convient d'appeler « oscillation complète » le mouvement du système compris entre deux passages consécutifs par la position d'équilibre avec une vitesse dirigée dans le même sens, et nous appellerons comme on le fait généralement la durée d'une telle oscillation complète la *pseudo-période*. Elle est exprimée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{E - \left(\frac{F}{2I}\right)^2}}. \quad (5)$$

On voit facilement, que si au temps t_1 , le système se trouve

¹⁾ F représente le moment du couple du frottement intérieur pour une vitesse $d\alpha/dt$ égale à l'unité. F est donc une constante de dimension $\text{gr. cm}^2 \text{ sec}^{-1}$.

dans sa position d'équilibre, il s'y trouvera aussi aux temps :

$$t = t_1 + n \frac{2\pi}{\omega} = t_1 + nT$$

(où n signifie un nombre entier quelconque). A tous les instants définis par cette formule la vitesse présente en outre le même sens. On peut donc dire que les oscillations complètes amorties sont également isochrones. Cependant la pseudo-période T est toujours plus grande⁽¹⁾ que la période réelle T_0 calculée d'après l'équation (2).

La vitesse angulaire du système est alors :

$$v = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_0}{\omega} e^{-kt} [\cos(\omega t) - k \sin \omega t] . \quad (6)$$

Les instants où le disque atteint les écarts maxima de la position d'équilibre, sont définis par la condition $v = 0$ parce

¹⁾ Si le frottement proportionnel à la vitesse est faible, la durée d'oscillation n'est qu'extrêmement peu modifiée. Désignant par T_0 la période d'oscillation sans amortissement et par T la période des oscillations amorties, on a :

$$\frac{T}{T_0} = 1 : \sqrt{1 - \frac{F^2}{4IE}} = \left(1 - \frac{F^2}{4IE}\right)^{-\frac{1}{2}} ,$$

et comme le terme négatif est très petit, on peut développer en série et supprimer les termes d'ordre supérieur. On obtient ainsi :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{F^2}{8IE} .$$

En remplaçant les deux constantes E et F par leurs valeurs tirées des équations (2) et (8) :

$$E = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad \text{et} \quad F = \frac{2I\lambda}{T} ,$$

on obtient :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2} .$$

Le plus grand décrement observé dans nos expériences était $\lambda_{\max} = 0,01$ d'où :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + 1,266 \cdot 10^{-6} .$$

Le rapport diffère de l'unité d'un millionième environ. On peut donc remplacer au besoin et sans erreur sensible T par T_0 et poser :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{E}} .$$

qu'au moment où le mouvement change de sens la vitesse est toujours nulle. Faisant usage de cette condition, on trouve :

$$\omega \cos(\omega t) - k \sin(\omega t) = 0,$$

d'où :

$$\operatorname{tg}(\omega t) = \frac{\omega}{k}.$$

Or la tangente reprend toujours la même valeur, lorsque l'angle (ωt) a augmenté de π , 2π , 3π , etc., respectivement lorsque le temps a augmenté de π/ω , $2\pi/\omega$, $3\pi/\omega$, etc. Il en résulte que le temps qui s'écoule entre deux élongations maxima consécutives est toujours le même ; il est égal à la moitié de la pseudo-période T .

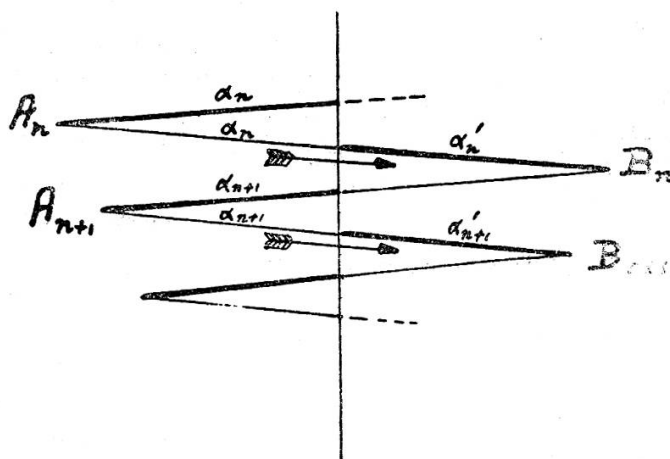


Fig. 1.

Soient α_n , α_{n+1} , etc., des élongations maxima successives observées du même côté de la position d'équilibre (voir la fig. 1) et τ , $\tau + T$, etc., les époques correspondantes, on trouve d'après l'équation (4) :

$$\alpha_n = \frac{v_0}{\omega} e^{-k\tau} \sin(\omega\tau)$$

et :

$$\alpha_{n+1} = \frac{v_0}{\omega} e^{-k(\tau+T)} \sin(\omega\tau + 2\pi),$$

d'où la relation bien connue :

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = e^{kT} = e^{\lambda}, \quad (7)$$

en posant :

$$kT = \lambda,$$

soit :

$$\lambda = \frac{FT}{2I} . \quad (1)$$

Le rapport de deux élongations maxima consécutives de même sens est constant, c'est-à-dire indépendant du temps ⁽²⁾. Il en résulte que les amplitudes décroissent suivant une progression géométrique. *La quantité λ qui est la différence des logarithmes naturels de deux amplitudes successives.*

$$\log \text{nat} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \right) = \lambda \quad (9)$$

s'appelle décrement logarithmique des oscillations ⁽³⁾.

¹⁾ Eu égard à l'équation (2) on peut transformer l'expression (8) en éliminant le moment d'inertie I, et on obtient :

$$\lambda = \frac{2\pi^2 F}{TE} . \quad (8a)$$

²⁾ Les élongations maxima consécutives de sens contraire $\alpha_n, \alpha'_n, \alpha_{n+1}, \alpha'_{n+1}$, etc., forment également une progression géométrique, car on a :

$$\alpha_n = \frac{v_0}{\omega} e^{-k\tau} \sin(\omega\tau)$$

et :

$$\alpha'_n = \frac{v_0}{\omega} e^{-k\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} \sin\left(\omega\tau + \pi\right) = -\frac{v_0}{\omega} e^{-k\left(\tau + \frac{T}{2}\right)} \sin(\omega\tau) .$$

Si l'on ne considère que les valeurs absolues on trouve :

$$\frac{\alpha_n}{\alpha'_n} = e^{\frac{kT}{2}} = e^{\frac{\lambda}{2}} ,$$

donc un rapport constant.

³⁾ Pour déterminer la valeur de λ il est commode de mesurer l'écart entre les deux positions extrêmes du disque, le parcours se faisant toujours dans le même sens, par exemple :

$$A_n B_n = a_n , \quad A_{n+1} B_{n+1} = a_{n+1} \dots$$

On peut facilement démontrer qu'alors :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^\lambda .$$

On a en valeur absolue :

$$\frac{\alpha'_n}{\alpha_n} = \frac{1}{e^{\lambda/2}} .$$

Cette loi (de la diminution de l'amplitude) est immédiatement accessible à l'observation et offre un moyen simple pour vérifier l'hypothèse qui forme le point de départ de la théorie.

Cependant, si on trouve un décrement logarithmique constant, cela ne prouve pas encore que le frottement intérieur est proportionnel à la vitesse. Il existe en effet des théories basées sur d'autres hypothèses, par exemple celles de Weber et de Boltzmann qui conduisent à la même conséquence d'un décrement logarithmique indépendant de l'amplitude.

Pour contrôler l'hypothèse de Coulomb il faut examiner de plus si le produit du décrement λ par la période des oscillations T est indépendant de la période. En effet, d'après l'équation (8a) on trouve :

$$\lambda T = 2\pi^2 \frac{F}{E} .$$

Si l'on admet que la constante F de l'équation (3) est indépendante de la période, le produit λT doit rester constant pour un fil donné quel que soit la période; M. Voigt arrive à la même

Suite de la note ³⁾ de la page précédente.

En posant :

$$\frac{1}{e^{\lambda/2}} = g ,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha'_n &= g\alpha_n , \\ \alpha'_{n+1} &= g\alpha'_n = g^2\alpha_n , \\ \alpha'_{n+1} &= g\alpha_{n+1} = g^3\alpha_n , \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\alpha_n + \alpha'_n}{\alpha_{n+1} + \alpha'_{n+1}} = \frac{1}{g^2} = e^{\lambda} .$$

En prenant alors les logarithmes on a :

$$\log \text{nat} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \lambda . \quad (9a)$$

Si λ est petit, on mesurera chaque dixième écart, par exemple a_n , a_{n+10} , a_{n+20} , etc. Le décrement λ résulte alors de la formule :

$$\log \text{nat} \left(\frac{a_n}{a_{n+10}} \right) = 10\lambda . \quad (9b)$$

conclusion en traitant le problème d'une manière beaucoup plus générale.

Il est donc indispensable pour trancher cette question d'étudier l'influence de la période sur le décrement logarithmique. Dans ce but il faut pouvoir modifier le moment d'inertie sans changer ni la charge du fil ni la forme extérieure du système oscillant.

§ 2. *Remarque sur la signification physique du décrement logarithmique λ*

a) Puisque λ est très petit dans nos expériences, nous pouvons poser :

$$e^\lambda = 1 + \lambda + \dots,$$

et d'après l'équation (7) :

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 1 + \lambda,$$

d'où :

$$\lambda = \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}}. \quad (10)$$

λ représente alors la diminution relative de l'amplitude.

En posant :

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \Delta\alpha_n,$$

on trouve :

$$\Delta\alpha_n = \lambda\alpha_n.$$

La diminution de l'amplitude est donc proportionnelle à l'amplitude actuelle, bien entendu à condition que le décrement logarithmique soit petit et constant. Inversement, si on constate l'existence d'une diminution $\Delta\alpha_n$ satisfaisant à cette condition on peut en conclure que le décrement logarithmique est constant. Mais on n'a pas le droit d'affirmer que l'hypothèse d'un frottement intérieur proportionnel à la vitesse est alors vérifiée, à moins d'avoir la preuve que le produit λT reste constant lorsqu'on fait varier la période T .

b) Si on ne prend en considération que les forces élastiques, l'énergie potentielle P du système, écartée de sa position d'équi-

libre d'un angle α , est (le moment du couple étant proportionnel à l'angle de torsion) :

$$P = \int_0^{\alpha} (E\alpha) d\alpha = \frac{E\alpha^2}{2} .$$

Lorsque le système a effectué une oscillation, entre deux élongations maxima consécutives α_n et α_{n+1} du même côté de la position d'équilibre, l'énergie potentielle du système a diminué. La perte d'énergie peut être exprimée par :

$$\Delta P = \frac{E}{2} (\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2) = \frac{E}{2} (\alpha_n + \alpha_{n+1})(\alpha_n - \alpha_{n+1}) ,$$

et comme l'amortissement est petit, on a sensiblement :

$$\Delta P = \frac{E}{2} 2\alpha_n(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = E\alpha_n^2 \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_n} ;$$

enfin :

$$\Delta P = E\alpha_n^2 \lambda ,$$

d'où :

$$\lambda = \frac{\Delta P}{E\alpha_n^2} ,$$

et :

$$2\lambda = \frac{\Delta P}{P} . \quad (11)$$

Le double du décrement λ représente par conséquent le rapport de l'énergie absorbée par le frottement intérieur pendant une oscillation (exécutée entre deux écarts maxima consécutifs du même côté de la position d'équilibre) à l'énergie potentielle du système.

En substituant dans l'expression ci-dessus de ΔP à la place de E la valeur tirée de l'équation (2) on obtient :

$$\Delta P = 4\pi^2 \alpha_n^2 \lambda \frac{I}{T^2} . \quad (12)$$

Cette formule peut servir pour le calcul de la valeur de l'énergie absorbée, dans des conditions déterminées, à partir des données des observations.

(A suivre.)