§2. Représentations des algèbres de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

§ 2. Représentations des algèbres de Hecke

Dans toute la suite, on désignera par K l'extension quadratique de l'anneau k définie par

$$K = k[\lambda]/_{\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta} .$$

On posera également $\mu = \alpha - \lambda$. On a donc

$$\alpha = \lambda + \mu , \qquad \beta = \lambda\mu ,$$

et K est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables λ et μ.

Soit n un entier positif. On désignera par X_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et l'on notera M le K-module librement engendré par l'ensemble F_n des fonctions de X_n dans $\mathbf{Z}$. Soit i un entier compris strictement entre 0 et n. On notera s_i l'application linéaire de M dans lui-même définie par:

$$\forall f \in F_n, s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{si} \quad f(i) = f(i+1) \\ (\lambda+\mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) > f(i+1) \end{cases}$$

où ε_i désigne la permutation de X_n qui échange i et $i + 1$.

Lemme 2-1. *Les endomorphismes* s_i *vérifient les formules suivantes:*

$$s_i^2 - \alpha s_i + \beta = 0 ,$$

$$\forall i, j < n , \quad j > i + 1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j = s_j s_i$$

$$j = i + 1 \quad \Rightarrow \quad s_i s_j s_i = s_j s_i s_j .$$

Démonstration. La deuxième formule est évidente car les supports des permutations ε_i et ε_j sont disjoints. La première formule à vérifier sur une fonction f est évidente si f prend les mêmes valeurs en i et en $i + 1$. Il y a donc essentiellement les cas $f(i) > f(i+1)$ et $f(i) < f(i+1)$ et chacun de ces cas se montre aisément. Quant à la dernière formule, il faut considérer, pour une fonction f de F_n, les différentes positions respectives de $f(i)$, $f(i+1)$, $f(i+2)$. Lorsque deux de ces nombres sont égaux, la formule est facile à vérifier. Sinon il reste à priori six cas à examiner. A ce stade il est plus facile de poser:

$$\forall a, b \in \mathbf{Z} , \quad a < b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = 0 \qquad <a, b> \; = \lambda$$

$$a > b \quad \Rightarrow \quad [a, b] = \lambda + \mu \quad <a, b> \; = - \mu .$$

On a alors, si $f(i)$ est différent de $f(i+1)$,

$$s_i(f) = [f(i), f(i+1)]f + <f(i), f(i+1)> f \circ \varepsilon_i .$$

Désignons par a, b et c les trois nombres $f(i)$, $f(i+1)$ et $f(i+2)$ que l'on suppose distincts. On vérifie les formules suivantes:

$$\begin{aligned} s_i s_j s_i(f) = {} & \big([a, b]^2[b, a] + [a, c] <a, b> <b, a>\big)f \\ & + \big([a, b]\,[b, c] <a, b> + [a, c]\,[b, a] <a, b>\big)f \circ \varepsilon_i \\ & + [a, b]\,[a, c] <b, c> f \circ \varepsilon_j + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j s_i s_j(f) = {} & \big([a, b]\,[b, c]^2 + [a, c] <b, c> <c, b>\big)f \\ & + \big([a, b]\,[b, c] <b, c> + [a, c]\,[c, b] <b, c>\big)f \circ \varepsilon_j \\ & + [a, c]\,[b, c] <a, b> f \circ \varepsilon_i + [a, b] <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b, c] <a, b> <a, c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a, b> <a, c> <b, c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \varepsilon_j . \end{aligned}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que les deux expressions sont égales quelles que soient les positions respectives des trois nombres a, b et c.

COROLLAIRE 2-2. *Il existe une représentation de l'algèbre* H_n *dans l'algèbre des endomorphismes de* M, *qui envoie les générateurs* σ_i *de* H_n *en l'endomorphisme* s_i. *De ce fait* M *devient un* H_n*-module.*

Soit φ une application à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. On appellera poids de φ le nombre $\sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi(p)$. Soit $M(\varphi)$ le sous-module de M (n étant égal au poids de φ) engendré par les fonctions f de F_n telles que

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \qquad \varphi(p) = \operatorname{card}\big(f^{-1}(p)\big).$$

PROPOSITION 2-3. *Pour toute fonction* φ *de* $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{N}$, *à support fini, le sous-module* $M(\varphi)$ *de* M *est un* H_n*-module.*

Démonstration. Evidente.

Soient $p < n$ des entiers strictement positifs. On notera Σ_p l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$, avec $1 \leqslant i \leqslant p$. Si i est égal à 1, cet élément est égal à 1. On notera S_n l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\tau_1\tau_2 \dots \tau_n$, chaque élément τ_i appartenant à Σ_i. L'ensemble S_n possède $p!$ éléments. L'importance de cet ensemble provient du résultat classique suivant:

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre* H_n *est un k-module libre de base* S_n.

Démonstration. Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout i compris entre 1 et p (au sens large), τ_i l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i - 1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i - 1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i\,. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de H_n engendré par S_n est stable par multiplication à droite par tous les générateurs σ_i de H_n, ce qui prouve que H_n est engendré linéairement par S_n.

Soit maintenant φ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, \dots, n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le K-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit f_0 l'inclusion de $\{1, \dots, n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par f_0 induit une application K-linéaire γ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de K, via le morphisme de K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie λ et μ en 1 et -1, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et γ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que S_n est une base de H_n.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier* $n > 0, H_n$ *est un* H_{n-1}*-module à gauche libre de base* $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout* $n > 0, H_{n+1}$ *est un* H_n*-bimodule isomorphe à* $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.

Démonstration. L'isomorphisme provient de la stabilisation i de H_n dans H_{n+1} et de l'application de $H_n \times H_n$ dans H_{n+1} qui à (u, v) associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le H_n-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

§ 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation i de H_n dans H_{n+1}, H_{n+1} est un H_n-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de H_{n+1} par le sous-module engendré par les éléments de la forme: