

## §2. Représentations des algèbres de Hecke

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## § 2. REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE HECKE

Dans toute la suite, on désignera par  $K$  l'extension quadratique de l'anneau  $k$  définie par

$$K = k[\lambda]/\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta.$$

On posera également  $\mu = \alpha - \lambda$ . On a donc

$$\alpha = \lambda + \mu, \quad \beta = \lambda\mu,$$

et  $K$  est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables  $\lambda$  et  $\mu$ .

Soit  $n$  un entier positif. On désignera par  $X_n$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$  et l'on notera  $M$  le  $K$ -module librement engendré par l'ensemble  $F_n$  des fonctions de  $X_n$  dans  $\mathbf{Z}$ . Soit  $i$  un entier compris strictement entre 0 et  $n$ . On notera  $s_i$  l'application linéaire de  $M$  dans lui-même définie par :

$$\forall f \in F_n, s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{si } f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{si } f(i) = f(i+1) \\ (\lambda + \mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{si } f(i) > f(i+1) \end{cases}$$

où  $\varepsilon_i$  désigne la permutation de  $X_n$  qui échange  $i$  et  $i + 1$ .

LEMME 2-1. *Les endomorphismes  $s_i$  vérifient les formules suivantes :*

$$s_i^2 - \alpha s_i + \beta = 0,$$

$$\forall i, j < n, \quad j > i + 1 \Rightarrow s_i s_j = s_j s_i$$

$$j = i + 1 \Rightarrow s_i s_j s_i = s_j s_i s_j.$$

*Démonstration.* La deuxième formule est évidente car les supports des permutations  $\varepsilon_i$  et  $\varepsilon_j$  sont disjoints. La première formule à vérifier sur une fonction  $f$  est évidente si  $f$  prend les mêmes valeurs en  $i$  et en  $i + 1$ . Il y a donc essentiellement les cas  $f(i) > f(i + 1)$  et  $f(i) < f(i + 1)$  et chacun de ces cas se montre aisément. Quant à la dernière formule, il faut considérer, pour une fonction  $f$  de  $F_n$ , les différentes positions respectives de  $f(i)$ ,  $f(i + 1)$ ,  $f(i + 2)$ . Lorsque deux de ces nombres sont égaux, la formule est facile à vérifier. Sinon il reste à priori six cas à examiner. A ce stade il est plus facile de poser :

$$\forall a, b \in \mathbf{Z}, \quad a < b \Rightarrow [a, b] = 0 \quad \langle a, b \rangle = \lambda$$

$$a > b \Rightarrow [a, b] = \lambda + \mu \quad \langle a, b \rangle = -\mu.$$

On a alors, si  $f(i)$  est différent de  $f(i+1)$ ,

$$s_i(f) = [f(i), f(i+1)]f + \langle f(i), f(i+1) \rangle f \circ \varepsilon_i.$$

Désignons par  $a, b$  et  $c$  les trois nombres  $f(i), f(i+1)$  et  $f(i+2)$  que l'on suppose distincts. On vérifie les formules suivantes :

$$\begin{aligned} s_i s_j s_i(f) &= ([a, b]^2 [b, a] + [a, c] \langle a, b \rangle \langle b, a \rangle) f \\ &+ ([a, b] [b, c] \langle a, b \rangle + [a, c] [b, a] \langle a, b \rangle) f \circ \varepsilon_i \\ &+ [a, b] [a, c] \langle b, c \rangle f \circ \varepsilon_j + [a, b] \langle a, c \rangle \langle b, c \rangle f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ &+ [b, c] \langle a, b \rangle \langle a, c \rangle f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ &+ \langle a, b \rangle \langle a, c \rangle \langle b, c \rangle f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j s_i s_j(f) &= ([a, b] [b, c]^2 + [a, c] \langle b, c \rangle \langle c, b \rangle) f \\ &+ ([a, b] [b, c] \langle b, c \rangle + [a, c] [c, b] \langle b, c \rangle) f \circ \varepsilon_j \\ &+ [a, c] [b, c] \langle a, b \rangle f \circ \varepsilon_i + [a, b] \langle a, c \rangle \langle b, c \rangle f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ &+ [b, c] \langle a, b \rangle \langle a, c \rangle f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ &+ \langle a, b \rangle \langle a, c \rangle \langle b, c \rangle f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \varepsilon_j. \end{aligned}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que les deux expressions sont égales quelles que soient les positions respectives des trois nombres  $a, b$  et  $c$ .

**COROLLAIRE 2-2.** *Il existe une représentation de l'algèbre  $H_n$  dans l'algèbre des endomorphismes de  $M$ , qui envoie les générateurs  $\sigma_i$  de  $H_n$  en l'endomorphisme  $s_i$ . De ce fait  $M$  devient un  $H_n$ -module.*

Soit  $\varphi$  une application à support fini de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$ . On appellera poids de  $\varphi$  le nombre  $\sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi(p)$ . Soit  $M(\varphi)$  le sous-module de  $M$  ( $n$  étant égal au poids de  $\varphi$ ) engendré par les fonctions  $f$  de  $F_n$  telles que

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(p) = \text{card}(f^{-1}(p)).$$

**PROPOSITION 2-3.** *Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$ , à support fini, le sous-module  $M(\varphi)$  de  $M$  est un  $H_n$ -module.*

*Démonstration.* Evidente.

Soient  $p < n$  des entiers strictement positifs. On notera  $\Sigma_p$  l'ensemble des éléments de  $H_n$  de la forme:  $\sigma_{p-1} \sigma_{p-2} \dots \sigma_i$ , avec  $1 \leq i \leq p$ . Si  $i$  est égal à 1, cet élément est égal à 1. On notera  $S_n$  l'ensemble des éléments de  $H_n$  de la forme:  $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$ , chaque élément  $\tau_i$  appartenant à  $\Sigma_i$ . L'ensemble  $S_n$  possède  $p!$  éléments. L'importance de cet ensemble provient du résultat classique suivant :

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre  $H_n$  est un  $k$ -module libre de base  $S_n$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \leq n$  un entier strictement positif. Notons, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $p$  (au sens large),  $\tau_i$  l'élément  $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$ . Il est facile de vérifier les formules suivantes :

$$\forall i \leq p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si } j < i - 1 \\ \tau_j & \text{si } j = i - 1 \\ \alpha \tau_i - \beta \tau_{i-1} & \text{si } j = i \\ \sigma_{j-1} \tau_i & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de  $H_n$  engendré par  $S_n$  est stable par multiplication à droite par tous les générateurs  $\sigma_i$  de  $H_n$ , ce qui prouve que  $H_n$  est engendré linéairement par  $S_n$ .

Soit maintenant  $\varphi$  l'application de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$ , de support  $\{1, 2, \dots, n\}$  et qui vaut 1 sur son support. Le  $K$ -module  $M(\varphi)$  est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique  $K[\mathfrak{S}_n]$ . Soit  $f_0$  l'inclusion de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\mathbf{Z}$ . La multiplication à droite par  $f_0$  induit une application  $K$ -linéaire  $\gamma$  de  $H_n \otimes K$  dans  $M(\varphi)$ . Si l'on tensorise ces modules par  $\mathbf{Z}$  au-dessus de  $K$ , via le morphisme de  $K$  dans  $\mathbf{Z}$  qui envoie  $\lambda$  et  $\mu$  en 1 et  $-1$ ,  $H_n \otimes \mathbf{Z}$  devient  $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$  ainsi que  $M(\varphi)$  et  $\gamma$  devient l'identité. On en déduit que  $\gamma(S_n)$  est une base de  $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$  et un système libre de  $M(\varphi)$ . Ce qui prouve que  $S_n$  est une base de  $H_n$ .

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier  $n > 0$ ,  $H_n$  est un  $H_{n-1}$ -module à gauche libre de base  $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$ .*

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout  $n > 0$ ,  $H_{n+1}$  est un  $H_n$ -bimodule isomorphe à  $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme provient de la stabilisation  $i$  de  $H_n$  dans  $H_{n+1}$  et de l'application de  $H_n \times H_n$  dans  $H_{n+1}$  qui à  $(u, v)$  associe  $i(u)\sigma_n i(v)$ . L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le  $H_n$ -module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

### § 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit  $n > 0$  un entier. Via la stabilisation  $i$  de  $H_n$  dans  $H_{n+1}$ ,  $H_{n+1}$  est un  $H_n$ -bimodule. On peut donc considérer le module  $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$ , quotient de  $H_{n+1}$  par le sous-module engendré par les éléments de la forme :