Johann, devenu trop sûr de lui, envoie immédiatement sa solution, «trouvée en trois minutes», à Leibniz et au Journal. Comme la solution de Johann est fausse, Jacob fait passer dans le «Journal des Savans» une série de polémiques contre son frère qui paraissent en alternance avec les réponses non moins agressives de ce dernier (cf. citations).

EULER ET LAGRANGE

La guerre impitoyable des frères ennemis ne prend fin qu'après la mort de Jacob en 1705. Johann devient alors son successeur à Bâle; excellent pédagogue, il trouve des élèves extraordinaires: ses trois fils et, surtout, Leonhard Euler. Euler explore systématiquement la solution des équations différentielles et attaque, indépendamment de Riccati, les premières équations d'ordre supérieur. Toutes ces recherches sont rassemblées dans les volumes XXII et XXIII des Opera Omnia (cf. aussi Sections I.3, I.4 et I.5 de [13]). Lagrange est le premier à traiter les *systèmes* d'équations différentielles dans son travail sur la théorie du son [15] et, surtout, dans sa célèbre *mécanique analytique* [16] de 1788 (deux cents ans de mécanique de Lagrange!).

Il reste finalement à mentionner qu'Euler, en 1744, révolutionne le Calcul variationnel (cf. [11], «...eines der schönsten mathematischen Werke, die je geschrieben worden sind» (C. Carathéodory)) en trouvant pour le problème variationnel général

$$\int_a^b F(x, y, y')dx = \min! \tag{19}$$

l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_y \equiv F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{y'x} - F_y = 0\,. \tag{20}$$

Cette dernière, au cas où F est indépendant de x, peut encore être simplifiée en

$$y'F_{y'} - F = K \tag{21}$$

comme on le vérifie facilement en dérivant (21) par rapport à x. En 1755, âgé de 19 ans, Lagrange trouve une nouvelle démonstration des équations d'Euler [20] et donne toute son élégance à la théorie. De plus, pour des problèmes du type

$$\int_a^b F(x, y, y')dx = \min! \quad \text{sous condition} \int_a^b G(x, y, y')dx = 0 \tag{22}$$

il introduit l'idée du «multiplicateur de Lagrange» (voir [16], première partie, Section IV, § 1) en remplaçant (22) par

$$\int_a^b \mathscr{L}(\lambda, x, y, y')dx = \min!\ (\text{vel}\ \max!) \tag{23}$$

où $\mathscr{L}$ est «la fonction de Lagrange»

$$\mathscr{L}(\lambda, x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') .$$

Problèmes isopérimétriques, suite

Avec ces formules, introduites dans (21), le problème isopérimétrique de Jacob Bernoulli devient

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{(K+y^m)^2} - 1} . \tag{24}$$

La solution est donc décrite par quadratures

$$\int \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = x + C . \tag{25}$$

Les constantes C, K et λ sont à ajuster aux conditions aux bords et à la longueur L. Ce n'est que pour $m = 1$ que cette intégrale est résoluble avec efforts raisonnables (voir Euler [11], Caput V, Exemplum II; «quae est aequatio generalis pro Circulo»).

Pour $m > 1$ il s'agit d'intégrales «elliptiques» ou «hyperelliptiques» et on a besoin de méthodes numériques. Par exemple, si on pose $A = 0$, $B = 1$ et $L = 4$, les constantes K et λ dans (25) doivent satisfaire (puisque la courbe est symétrique il suffit de ne considérer que sa moitié ascendante)

$$\int_0^{y_{max}} \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 0.5 , \quad \text{et} \quad \int_0^{y_{max}} \frac{\sqrt{\lambda}dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 2 . \tag{26}$$

où

$$y_{max} = (\sqrt{\lambda} - K)^{1/m}$$

est la valeur de y pour laquelle le dénominateur devient zéro. Un processus itératif (méthode de Newton) combiné avec le calcul numérique des intégrales