Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 76 (1958)
Heft: 49

Artikel: Eine interessante Translationsschale
Autor: Nyffeler, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64090

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

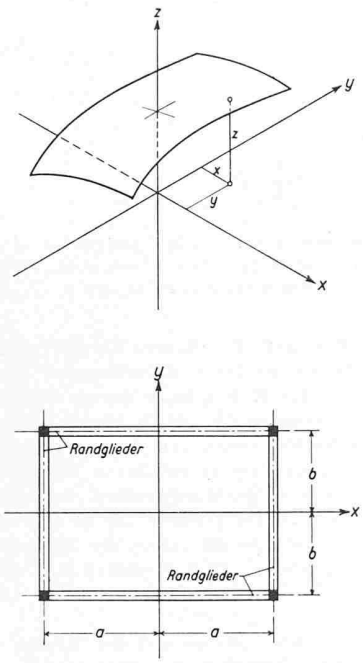
Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine interessante Translationsschale

DK 624.074.4

Von **Hans Nyffeler**, Bau-Ing., Technikumslehrer, Burgdorf



Bilder 1 und 2. Gewähltes Koordinatensystem und Schalengrundriss

1. Einführung

Schalen mit rechteckigem Grundriss werden üblicherweise durch spezielle Randglieder getragen. Die Berechnung erfolgt in der Regel mit Hilfe der allgemeinen Membrantheorie. Bei den meisten bekannten Schalenformen führt jedoch die Ermittlung des Membranzustandes zu erheblichen mathematischen Schwierigkeiten. Eine weitere Unzulänglichkeit tritt überdies bei den üblicherweise verwendeten Translationsschalen auf, indem die Schubkräfte in den Ecken unendlich gross werden. Diese Nachteile führen zur Suche nach einer bessern Schalenform. Dass es tatsächlich eine Schale gibt, die die genannten Nachteile nicht aufweist, sei nachfolgend gezeigt.

2. Geometrie der Schale

Die Funktion einer Translationsfläche hat für das in Bild 1 skizzierte orthogonale kartesische Koordinatensystem folgende Form, wobei f und g beliebige Funktionen von x bzw. von y sein können.

$$z = f(x) + g(y)$$

Für die gesuchte günstigere Schalenform wurde für z folgende Funktion ermittelt

$$z = A + Bx - C\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)+\left(1-\frac{x}{a}\right)\ln\left(1-\frac{x}{a}\right)\right] + Dy - E\left[\left(1+\frac{y}{b}\right)\ln\left(1+\frac{y}{b}\right)+\left(1-\frac{y}{b}\right)\ln\left(1-\frac{y}{b}\right)\right]$$

Die Werte A, B, C, D und E sind frei wählbare Konstanten, während die Werte a und b die Grundrissmasse nach Bild 2 sind. Bild 3 zeigt einen Schnitt durch eine Schale in der x-Richtung, wobei die Konstanten B und C zu $B = 0$ und $C = 3a/10$ gewählt wurden. Zur vergleichsweisen Betrachtung ist ein entsprechendes Kreisbogenstück einpunktiert. Der Schnitt der gewählten Schalenfläche zeigt in den äussern Partien eine stärkere Krümmung als das entsprechende Kreisbogenstück. Weiter hat die Kurve in den Randpunkten $x = +a$ und $x = -a$ vertikale Tangenten.

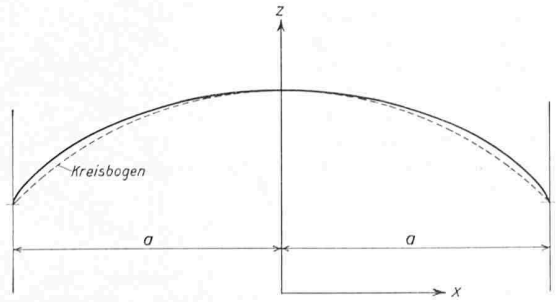


Bild 3. Schnitt in x-Richtung durch eine Schale mit $C = 3a/10$ und $B = 0$ (zum Vergleich ist ein Kreisbogen einpunktiert)

Die für die Durchführung der statischen Berechnung notwendigen zweiten partiellen Ableitungen betragen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2C}{x^2 - a^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2E}{y^2 - b^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{(Translationsfläche)}$$

3. Berechnung

In Anlehnung an bekannte Arbeiten kann die Berechnung des Membranspannungszustandes auf die Ermittlung einer Spannungsfunktion Φ zurückgeführt werden. Für die in Bild 4 dargestellten Schnittgrössen eines Schalenelementes gelten folgende Beziehungen

$$\overline{N}_x = N_x \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}; \qquad N_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

$$\overline{N}_y = N_y \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}; \qquad N_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$\overline{T} = T; \qquad T = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}$$

Φ = sogenannte Spannungsfunktion

Für die Spannungsfunktion Φ gilt für lotrechte Belastung die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p_z$$

wobei p_z die nach Bild 4 auf die Flächeneinheit einwirkende Belastung ist. Die Ermittlung von Φ hat unter Berücksichtigung folgender Randbedingungen zu erfolgen

$$x = +a\colon N_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0; \qquad x = -a\colon N_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$y = +b\colon N_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0; \qquad y = -b\colon N_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

Die für die Berechnung massgebenden Belastungen können in der Regel genügend genau durch die Funktion

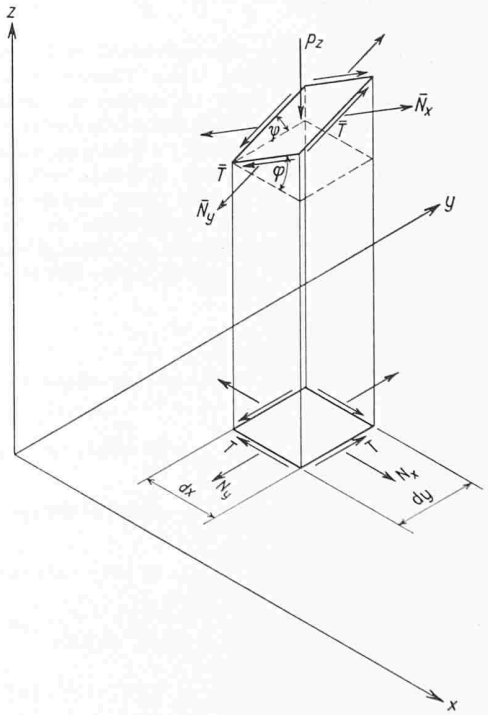


Bild 4. Darstellung der Schnittgrössen pro Längeneinheit an einem Element im Raum und in der Grundrissprojektion; Darstellung der lotrechten Belastung pro Flächeneinheit der Grundrissprojektion

$$p_z = K_0 + K_{x1}\,x + K_{x2}\,x^2 + K_{x3}\,x^3 + \ldots\ldots + \\ + K_{y1}\,y + K_{y2}\,y^2 + K_{y3}\,y^3 + \ldots\ldots$$

erfasst werden. Für diese Belastung gilt als Ansatz für die Spannungsfunktion

$$\Phi = (x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)\,C_0 + \\ + (x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)\,(C_{x1}\,x + C_{x2}\,x^2 + C_{x3}\,x^3 + \ldots\ldots) + \\ + (x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)\,(C_{y1}\,y + C_{y2}\,y^2 + C_{y3}\,y^3 + \ldots\ldots)$$

Werden für die praktische Berechnung nur die ersten Glieder der vorstehend angegebenen Belastungsfunktion verwendet, so wird die Spannungsfunktion zum geschlossenen Ausdruck. In der Tabelle 1 sind die Spannungsfunktionen der ersten einzelnen Glieder angegeben. Auch für ein Belastungsglied von der Form

$$p_z = K\,x^n\,y^m$$

lässt sich für die Spannungsfunktion ein geschlossener Ausdruck ermitteln. Für die Belastungsfunktion

$$p_z = K\,x\,y$$

ist z. B.

$$\Phi = \frac{K\,x\,y}{12\,(C + E)}\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$$

Bemerkenswert ist, dass bei allen praktisch vorkommenden Belastungsarten an den Schalenrändern Schubkräfte von endlicher Grösse auftreten, im Gegensatz zu andern Schalentypen. Als Beispiel sei der Lastfall

$$p_z = p$$

betrachtet.

Für $K_0 = p$ wird nach Tabelle 1

$$\Phi = \frac{p}{4\,(C + E)}\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$$

$$\overline{T} = T = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = -\frac{p}{C + E}\,x\,y$$

Der Schubkraftverlauf am Schalenrand ist linear (vgl. Bild 5). Für den Schalenrand $x = a$ wird z. B.

$$\overline{T} = T = -\frac{p\,a}{C + E}\,y$$

Die grösste Schubkraft in der Schalenecke beträgt

$$\overline{T}_{max} = T_{max} = -\frac{p\,a\,b}{C + E}$$

Die vorliegenden Betrachtungen setzen die Gültigkeit der Membrantheorie voraus. Diese Theorie beruht ihrerseits auf der Voraussetzung, dass die Dicke der Schale klein sei im Vergleich zum kleinsten Krümmungsradius der Mittelfläche. Um diesen Voraussetzungen zu genügen, müsste die Dicke der vorliegenden Schale an den Rändern auf Null abfallen. Ein solches Tragwerk ist jedoch nicht ausführbar. Da ausserdem der Verlauf der Schalenmittelfläche im Bereich der Randglieder (Randglied-Innenseite bis Randgliedmitte) nicht eindeutig bestimmt ist, drängt sich eine Untersuchung des Tragverhaltens in diesen Randteilen auf. Zu diesem Zweck wird angenommen, dass die in Bild 3 gezeigte Schnittkurve der Schalenmittelfläche im Bereich der Randglieder durch andere Kurvenstücke ersetzt sei. Vorausgesetzt wird ferner, dass diese Kurvenstücke und der verbleibende Teil der ursprünglichen Kurve in den Anschlusspunkten gemeinsame Tangenten aufweisen. Weiter seien die Krümmungsradien der gewählten Kurvenstücke an jeder Stelle grösser als null. Für die vorliegende Grundform der Schale sei (ohne die Berücksichtigung der veränderten Form in den Randteilen) die Spannungsfunktion für eine beliebige Belastung ermittelt worden.

Tabelle 1

Belastungsglied	Spannungsfunktion Φ
K_0	$\frac{K_0}{4\,(C + E)}\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$
$K_{x1}\,x$	$\frac{K_{x1}}{4\,(C + 3\,E)}\,x\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$
$K_{x2}\,x^2$	$\frac{K_{x2}}{4\,(C + 6\,E)}\,x^2\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2) + \frac{K_{x2}\,E\,a^2}{4\,(C + E)\,(C + 6\,E)}\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$
$K_{y1}\,y$	$\frac{K_{y1}}{4\,(3\,C + E)}\,y\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$
$K_{y2}\,y^2$	$\frac{K_{y2}}{4\,(6\,C + E)}\,y^2\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2) + \frac{K_{y2}\,C\,b^2}{4\,(C + E)\,(6\,C + E)}\,(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$

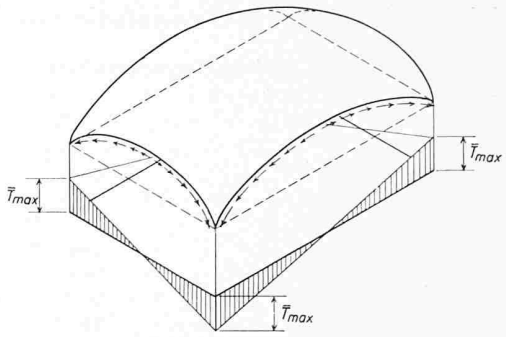


Bild 5. Darstellung der auf die Randglieder einwirkenden Schubkräfte bei einer gleichmässig über den ganzen Grundriss verteilten Belastung p

Wird nun mit dieser Spannungsfunktion und der Schalenmittelfläche mit den veränderten Randteilen unter Verwendung der Differentialgleichung die Belastung ermittelt, die getragen werden kann, zeigt sich folgendes.

Im eigentlichen Bereich der Schale (zwischen den Randgliedern) kann die vorausgesetzte Belastung voll aufgenommen werden. In den Bereichen unmittelbar über den Randgliedern kann dagegen die Belastung nur teilweise von der Schale getragen werden. Die fehlenden Anteile haben die Randglieder als lotrechte Belastung direkt aufzunehmen. Diese Lastanteile sind jedoch im Vergleich zum Eigengewicht der Randglieder klein, weshalb sie in vielen Fällen vernachlässigt werden dürfen.

4. *Ausführungsmöglichkeiten*

Je nach der Wahl der Konstanten B, C, D und E für die Funktion der Schalenmittelfläche können verschiedene Schalentypen konstruiert werden (Bild 6). Bei der Wahl der Konstanten C und E ist jedoch zu beachten, dass die Summe der beiden Konstanten nicht null wird, da die Schale sonst ihre Tragfähigkeit verliert.

5. *Zusammenfassung*

Das vorstehende Beispiel zeigt, dass die Suche nach neuen, statisch zweckmässigen Schalenformen sich lohnt. Die Arbeit in dieser Richtung kann jedem interessierten Statiker bestens empfohlen werden, um so mehr, als sie nicht eines gewissen Reizes entbehrt. (Literatur über Schalenstatik siehe Verzeichnis zur Arbeit von *O. Gmür:* Berechnung von doppelt gekrümmten Schalen und Versuche an solchen aus Tonhohlsteinen, SBZ 1958, Nr. 22, S. 39.)

Adresse des Verfassers: Dammstrasse 11, Burgdorf.

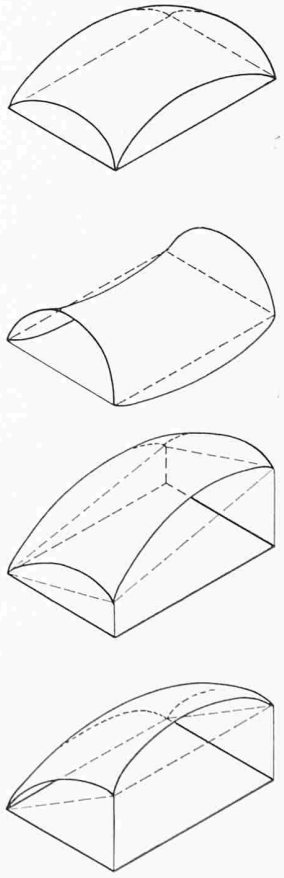


Bild 6. Beispiele für die Ausführung verschiedener Schalentypen durch entsprechende Wahl der Konstanten B, C, D und E