

# §8. Le théorème de Gross et Zagier

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

on obtient par exemple <sup>1)</sup> pour  $h(-d)$  impair une inégalité de la forme

$$(34) \quad h(-d) \geq c_E \log d$$

où  $c_E$  est une constante dépendant de la courbe elliptique  $E$  choisie, et susceptible d'être calculée. (Plus généralement, si  $h(-d)$  est de la forme  $2^t h'$  avec  $h'$  impair, on a une inégalité analogue à (34) à condition de remplacer  $c_E$  par une nouvelle constante  $c_E(t)$  qui dépend de  $t$ , par exemple  $c_E(t) = c_E e^{-3\sqrt{t}}$ , et de supposer  $d$  premier à  $N_E$ ; cette dernière condition peut même être omise si l'on choisit  $E$  convenablement comme l'ont remarqué Gross et Zagier.)

*Comment trouver  $E$  remplissant les deux conditions énoncées ci-dessus?* On commence par choisir une courbe elliptique  $E$  telle que le groupe  $E(\mathbf{Q})$  ait un rang impair  $r \geq 3$  (il y en a une infinité et on peut en expliciter à volonté). On vérifie qu'elle est de Weil (soit parce qu'elle est à multiplications complexes, soit par un calcul sur ordinateur) et que le signe  $\varepsilon_E$  de l'équation fonctionnelle de  $L_E$  est  $-1$  (par le calcul). La fonction  $L_E$  a alors un zéro d'ordre  $\rho$  impair en 1, et si l'on croit en la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer,  $\rho$  doit être égal à  $r$ , donc  $\geq 3$ . Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée. Peut-on s'en passer et dans le cas particulier choisi, prouver directement l'inégalité  $\rho \geq 3$ ? Puisque  $\rho$  est impair, cela revient à montrer que  $L'_E(1) = 0$ . Il est possible d'obtenir par calcul sur ordinateur des valeurs approchées de  $L'_E(1)$ , mais a priori même si celles-ci sont très petites on ne peut conclure à la nullité de  $L'_E(1)$ .

Il a fallu attendre 1983 et les travaux de Gross et Zagier pour arriver enfin à surmonter cette difficulté et à appliquer le théorème de Goldfeld.

## § 8. LE THÉORÈME DE GROSS ET ZAGIER

Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur  $\mathbf{Q}$  et soit  $P \in E(\mathbf{Q})$  un point rationnel de  $E$ . Écrivons l'abscisse  $x(n(P))$  du point  $P + \dots + P$  ( $n$  termes, la somme étant calculée dans le groupe  $E(\mathbf{Q})$ ) sous forme d'une fraction irréductible  $a_n/b_n$ . On montre que l'expression  $\frac{1}{2} n^{-2} \log(\sup(|a_n|, |b_n|))$  a une limite  $\hat{h}(P)$  lorsque  $P$  tend vers  $+\infty$ , appelée *hauteur de Néron-Tate de  $P$* .

<sup>1)</sup> Cette inégalité, un peu meilleure que celle de Goldfeld, est prouvée par la même méthode dans mon exposé sur la question au Séminaire Bourbaki (Juin 1984, exposé 631).

L'application  $P \mapsto \widehat{h}(P)$  de  $E(\mathbf{Q})$  dans  $\mathbf{R}$  est quadratique et positive, et l'on a  $\widehat{h}(P) = 0$  si et seulement si  $P$  est un point *de torsion* du groupe  $E(\mathbf{Q})$ .

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème <sup>1)</sup> qui donne une expression de la dérivée en 1 de certaines fonctions  $L$  associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique  $E$  de Weil, telle que le signe  $\varepsilon_E$  de l'équation fonctionnelle  $L_E$  soit  $-1$ , et notons  $f_E$  la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle  $c_E$  telle que:

Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair  $\chi$  de conducteur  $d \geq 7$  tel que  $\chi(N_E) = 1$ , il existe un point  $P \in E(\mathbf{Q})$  tel que

$$L'_E(1)L_E(\chi, 1) = c_E \widehat{h}(P).$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si  $L'_E(1) = 0$ : pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet  $\chi$  comme ci-dessus pour lequel  $L_E(\chi, 1) \neq 0$  (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel  $\chi$  lorsque  $E$  est choisie). Comme on dispose de majorations de  $L_E(\chi, 1)$ , de la valeur approchée de  $c_E$  et de minoration des  $\widehat{h}(P)$  non nuls lorsque  $P$  décrit  $E(\mathbf{Q})$ , il suffit alors pour conclure à la nullité de  $L'_E(1)$  de montrer que  $L'_E(1)$  est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

## § 9. CONCLUSION

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante  $c_E$  correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$h(-d) = 3 \Rightarrow \log d \leq 21\,000$$

$$h(-d) = 4 \Rightarrow \log d \leq 336\,000$$

$$h(-d) = 5 \Rightarrow \log d \leq 35\,000$$

$$h(-d) = 6 \Rightarrow \log d \leq 168\,000$$

etc.

<sup>1)</sup> B. H. GROSS et D. B. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.