3.3. Après Châtelet.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Comme X_K est évidemment une surface K-rationnelle, la k-variété $X_1 = R_{K/k}(X_K)$ est k-rationnelle, si bien que l'on a paramétré les points du noyau de f. Pour paramétrer les points de $X(k)$ d'image non triviale par f, Châtelet observe par un calcul fort instructif que pour tout $\alpha = f(P_0)$, les points M de $f^{-1}(\alpha) \subset X(k)$ sont obtenus à partir des points de $\varphi_1(X_1(k))$ en appliquant la « symétrie » par rapport au point P_0.

3.3. Après Châtelet.

Les travaux consécutifs à ceux de Châtelet se sont en général placés dans la perspective plus large de l'étude des surfaces rationnelles et aussi de certaines variétés rationnelles de dimension plus grande. Comme ces travaux ont fait récemment l'objet d'exposés généraux (Manin/Tsfasman 1986, l'auteur 1986), on se contentera ici de décrire les développements ayant trait directement aux recherches de Châtelet.

Manin et Iskovskih, généralisant des résultats d'Enriques (1897) ont établi une classification k-birationnelle des surfaces rationnelles. Dans cette classification, les surfaces de Châtelet généralisées:

$$y^2 - az^2 = P(x), \quad \deg P \leqslant 4$$

apparaissent comme les surfaces arithmétiquement non-triviales les plus simples. Elles ont servi de banc d'essai pour toutes les conjectures concernant les variétés rationnelles, conjectures dont on a quelques raisons d'espérer qu'elles s'insèrent dans un ensemble bien plus vaste, sortant du cadre des variétés rationnelles.

Pour la commodité de l'exposé, disons que l'on s'est intéressé aux trois thèmes suivants:

k-rationalité. Si X est une surface (variété) rationnelle avec un k-point non singulier, qu'est-ce qui empêche X d'être k-rationnelle, ou du moins k-stablement rationnelle ($X \times \mathbf{P}^r_k$ k-birationnel à $\mathbf{P}^s_k$), et y a-t-il une différence entre ces deux notions (problème de Zariski, mentionné par B. Segre en 1950)?

Principe de Hasse. Si k est un corps de nombres, décrire l'obstruction à la validité du principe de Hasse.

Description des points rationnels. Si k est un corps de nombres, et $X(k) \neq \emptyset$, obtenir des paramétrisations finies du type de Châtelet pour d'autres classes de variétés. A défaut, décrire des relations d'équivalence sur $X(k)$ approchant la décomposition en classes de paramétrisation.

Manin et Voskresenskii dégagèrent le rôle important du module galoisien $\mathrm{Pic}(\bar{X})$ (X variété rationnelle projective et lisse) dans l'étude de la k-rationalité (stable). Ainsi, au moins en caractéristique zéro, le groupe $H^1(G, \mathrm{Pic}(\bar{X}))$ est un invariant k-birationnel qui est essentiellement équivalent à un autre invariant, le groupe de Brauer-Grothendieck de X. Ces invariants permettent souvent de reconnaître qu'une k-variété rationnelle n'est pas k-rationnelle, ce bien qu'elle possède un point rationnel.

Swinnerton-Dyer donna dès 1962 des contre-exemples au principe de Hasse pour les surfaces cubiques lisses, et d'autres suivirent pour d'autres types de surfaces rationnelles. Manin (1970) mit de l'ordre dans ces contre-exemples, en les interprétant au moyen du groupe de Brauer-Grothendieck.

Dans son livre sur les formes cubiques (1970), Manin donne aussi son point de vue sur la paramétrisation des points rationnels des surfaces de Châtelet. Il introduit d'une part la notion de R-équivalence sur les points (être liés par une chaîne de courbes de genre zéro), d'autre part l'équivalence de Brauer, via l'accouplement naturel $X(k) \times \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, k$. Il se trouve que pour les surfaces de Châtelet ces deux notions coïncident, mais il n'en est plus ainsi pour les surfaces de Châtelet généralisées.

En 1970, je passai une année à Cambridge (Angleterre) et P. Swinnerton-Dyer me suggéra de comprendre en profondeur les calculs assez mystérieux de Châtelet, ce afin de généraliser les résultats à d'autres variétés. En 1974, je pus ainsi interpréter une partie des calculs de Châtelet grâce à l'utilisation de torseurs sous des tores particuliers (ainsi le calcul fort instructif mentionné à la fin de 3.2 peut être interprété au moyen d'une généralisation de la loi de réciprocité d'A. Weil).

En 1976, Sansuc et moi-même, inspirés par les articles de Châtelet de 1954 et 1959 d'une part et par les travaux de Manin et Voskresenskii d'autre part, établîmes pour les points rationnels des tores algébriques l'analogue du résultat de paramétrisation finie de Châtelet. Ce résultat peut s'interpréter dans la perspective de la « descente » sur les points rationnels d'une variété rationnelle X. Comme Châtelet, on utilise des torseurs sur X sous des tores, plutôt que le groupe de Brauer-Grothendieck (de tels torseurs donnent une meilleure approximation de la R-équivalence sur $X(k)$). En 1984, Sansuc, Swinnerton-Dyer et moi-même pûmes compléter le programme de la descente pour toutes les surfaces de Châtelet généralisées. Ainsi, si une telle surface X possède un k-point et si l'invariant $\mathrm{Pic}(\bar{X})$ est « trivial », alors X est stablement k-rationnelle. Comme d'autres invariants, non stables, permettent parfois de montrer que X n'est pas k-rationnelle, ceci mena à une réponse négative au problème de Zariski, tant pour les surfaces sur $\mathbf{Q}$

(exemple: $y^2+3z^2=x^3-2$) que pour les variétés de dimension 3 sur $\mathbf{C}$ (résultat obtenu en collaboration avec Beauville). Par ailleurs, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (donnée par le groupe de Brauer-Grothendieck) est ici la seule, et ceci permet de déterminer effectivement si une telle surface a un point rationnel. Enfin, les points rationnels d'une telle surface peuvent être décrits au moyen d'un nombre fini de paramétrisations par des variétés k-rationnelles.

Dans ses recherches, François Châtelet ne s'est jamais enlisé dans un formalisme gratuit. Les idées qu'il a lancées sont encore fécondes aujourd'hui, et j'aimerais en conclusion redire combien elles m'ont marqué.

ARTICLES DE FRANÇOIS CHÂTELET

[1938] Points rationnels et classification des courbes de genre un. *C. R. Acad. Sc. Paris 206* (1938), 1532.

[1939] Classification des courbes de genre un, dans le corps des restes, module *p*. *C. R. Acad. Sc. Paris 208* (1939), 487-489.

[1940*a*] Points exceptionnels d'une cubique de Weierstrass. *C. R. Acad. Sc. Paris 210* (1940), 90-92.

[1940*b*] Groupe exceptionnel d'une classe de cubiques. *C. R. Acad. Sc. Paris 210* (1940), 200-202.

[1941] Courbes réduites dans les classes de courbes de genre 1. *C. R. Acad. Sc. Paris 212* (1941), 320-322.

[1943*a*] Sur la notion d'équivalence due à Poincaré. *C. R. Acad. Sc. Paris 216* (1943), 142-144.

[1943*b*] Equivalence de certaines variétés unicursales. *C. R. Acad. Sc. Paris 216* (1943), 189-191.

[1944] Variations sur un thème de Poincaré. *Annales E.N.S., 3^e série, 61* (1944), 249-300.

[1945] Les êtres géométriques d'un corps abstrait. *Annales de l'Université de Lyon, 3^e série, Section A, VIII* (1945), 5-28.

[1946*a*] Méthode galoisienne et courbes de genre un. *Annales de l'Université de Lyon, 3^e série, Section A, IX* (1946), 40-49.

[1946*b*] Introduction géométrique à l'étude arithmétique des cubiques. *Revue Scientifique 84* (1946), 3-6.

[1946*c*] Eléments de géométrie galoisienne. *Bulletin de la S.M.F. 74* (1946), 69-86.

[1946*d*] Les correspondances birationnelles à coefficients rationnels sur une courbe. *C. R. Acad. Sc. Paris 222* (1946), 351-353.

[1947*a*] Sur l'arithmétique des courbes de genre un. *Annales de l'Université de Grenoble (nouvelle série), XXII, Année 1946* (1947), 153-165.

[1947*b*] Utilisation des congruences en analyse indéterminée. *Annales de l'Université de Lyon, 3^e série, Section A, X* (1947), 5-22.