Band 90. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 21

Die praktische Berechnung der Biegebeanspruchung in kreisrunden Behältern mit gewölbten Böden und Decken und linear veränderlichen Wandstärken.

Von Dr. Ing. PETER PASTERNAK, Privatdozent an der Eidgen. Techn. Hochschule in Zürich.

(Schluss von Seite 262.)

IV. Kegelschale konstanter Wandstärke.

Am Schlusse meiner Abhandlung in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik habe ich den Weg angedeutet, auf dem man genauere Formeln für die Einflusszahlen der elastischen Randbewegungen einer dünnen, nicht allzu flachen Kegelschale unveränderlicher Wandstärke finden kann.

Es ergeben sich auf jenem Wege für die JE-fachen Einflusszahlen, in gleicher Form wie bei der Kugelschale, folgende Werte:

$$a_{11} = \frac{s}{\omega_1}, \quad a_{12} = \frac{s^2}{2}\frac{\sin\alpha}{\omega_1}, \quad a_{22} = \frac{s^3}{2}\sin^2\alpha \quad . \quad (44)$$

$s = 0{,}76\sqrt{hr}$ ist wieder die lineare Randcharakteristik, wo r = zweiter Hauptkrümmungradius, also die Länge der Mantellinie des Rand-Normalenkegels bedeutet. Ist α der halbe Oeffnungswinkel dieses Kegels, so findet man die Korrekturzahl ω_1 aus

$$\omega_1 = 1 \mp \left(\frac{s}{4r} - \nu\right)\operatorname{ctg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (44a)$$

Das obere Zeichen gilt für den untern (grössern), das untere für einen eventuell vorhandenen obern (kleinern) Randkreis. Der Unterschied gegenüber der Korrekturzahl ω_1 der Kugelschale besteht im Auftreten des Ausdrucks $\frac{1}{4}\frac{s}{r}$ anstelle von $\frac{1}{2}\frac{s}{r}$.

Die elastischen Randbewegungen a_{20}, a_{10} infolge stetig verteilter Belastungen berechnen sich auch hier, genau genug, mit Hilfe der statisch bestimmten Membrankräfte T_{10}, T_{20} aus der Ringdehnung und der Verträglichkeitsbedingung, die für den Fall der Kegelschale lautet

$$d = -\operatorname{ctg}\alpha\,[e_2'\,t + (e_2 - e_1)]\,^{16)} \quad . \quad . \quad (45)$$

darin ist t die vom Kegelscheitel aus gemessene Länge der Mittelflächen-Mantellinie.

Besondere Belastungsfälle.

a) Eigengewicht g t/m² Schalenoberfläche

$$\left.\begin{aligned}
T_{10} &= \frac{V}{2\pi r\sin^2\alpha} = \frac{gr}{2\cos\alpha}; \quad T_{20} = g\,r\cos\alpha \\
a_{20} &= -\frac{T_{20} - \nu T_{10}}{r}\frac{s^4}{4}\sin\alpha = -\frac{g s^4}{8}(\sin 2\alpha - \nu\operatorname{ctg}\alpha) \\
a_{10} &= -\frac{h^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\,[e_2'\,t + (e_2 - e_1)] \\
&= -\frac{g s^4}{8r}[(2+\nu)\cos 2\alpha + (1-\nu)]
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

b) Gleichförmig verteilte Belastung auf Horizontalprojektion p t/m²

$$\left.\begin{aligned}
T_{10} &= \frac{pr}{2}; \quad T_{20} = p\cos^2\alpha \\
a_{20} &= -\frac{p s^4}{8}[\cos 2\alpha + (1-\nu)] \\
a_{10} &= -\frac{p s^4}{8r\operatorname{tg}\alpha}[(2+\nu)\cos 2\alpha + 1 - \nu]
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Man beachte, dass die Randdrehungen der Kegelschale infolge der g und p nach *innen* und nicht (wie bei der Kugelschale) nach aussen geschehen.

Geschlossene Formeln für die Einflusszahlen der Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke habe ich noch nicht aufstellen können.

Bei den sehr dünnen Kegeldächern mit kleiner Nutzlast ($p = \sim 0{,}1$ t/m²) kann $\omega_1 = 1$ gesetzt, also mit den einfachern Ausdrücken

$$a_{11} = s, \quad a_{12} = \frac{s^2}{2}\sin\alpha, \quad a_{22} = \frac{s^3}{2}\sin^2\alpha \quad . \quad (48)$$

für die Einflusszahlen gerechnet werden.[17]

Rechnet man, zur Abschätzung der Zwängungskräfte, in erster Annäherung mit starrer Einspannung, so ergeben sich für die Randkräfte mit Hilfe der vereinfachten Einflusszahlen und weiter oben angegebenen a_{10} und a_{20}-Werte, folgende geschlossenen Formeln

a) infolge Eigengewicht

$$\left.\begin{aligned}
M &= -g\frac{s^2}{2}\left[\cos\alpha - \left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{s}{r}\right] \\
H &= +\frac{gs}{2}\,\frac{\sin 2\alpha - (\cos 2\alpha + {}^1/_2)\frac{s}{r}}{\sin^2\alpha}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (49)$$

b) infolge gleichförmig verteilter Nutzlast p t/m² auf Horizontalprojektion

$$\left.\begin{aligned}
M &= -\frac{p s^2}{4}\left[1 + \cos 2\alpha - \frac{1 + 2\cos 2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\frac{s}{r}\right] \\
H &= +\frac{ps}{2}\left[\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin\alpha - \cos\alpha\,(1 + 2\cos 2\alpha)\frac{s}{r}}{\sin^2\alpha}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Man rechnet etwas zu ungünstig, wenn die den s/r proportionalen Subtrahenden weggelassen werden. Der Fehler beträgt nur wenige Prozente, da s/r nach Voraussetzung sehr klein ist.

Die der Abschätzung dienenden bequemeren Ausdrücke lauten also

$$M = -\frac{g s^2}{2}\cos\alpha, \qquad H = +g\,s\operatorname{ctg}\alpha \qquad (51a)$$

$$M = -\frac{p s^2}{4}(1 + \cos 2\alpha), \quad H = +\frac{ps}{2}\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (51b)$$

Auf ähnliche Weise kann man natürlich auch für die Zwängungskräfte der starr eingespannten Kugelschale unveränderlicher Dicke geschlossene Formeln erhalten, deren Aufstellung mit Hilfe der vereinfachten Einflusszahlen und der angegebenen Formeln für a_{10} und a_{20} dem Leser überlassen wird.

ZAHLENBEISPIEL 5.

In dem kreisrunden Eisenbeton-Wasserbehälter (für rund 600 m³) mit Kugelboden und Kegeldach, gemäss Abb. 8 sollen die Meridianbiegemomente infolge der monolithischen Anschlüsse ermittelt werden. Die Ringmomente werden ihrer Kleinheit wegen vernachlässigt.

In Einhaltung der im Eisenbetonbau für die Erschliessung der statischen Unbestimmtheit geltenden Grundlage wird die Berechnung der Zwängungskräfte unter Annahme eines isotropen Baumaterials und unter Vernachlässigung der Bewehrung durchgeführt. Nach erfolgter Bemessung könnte zwar die Bewehrung mit einem Dehnungsmass $n = 5 \div 10$ in einer zweiten Kontrollberechnung Berücksichtigung finden; doch kann meistens eine solche unterbleiben, da sich das Kräftespiel nur wenig ändert.

[16] Man findet diesen Ausdruck unmittelbar durch Spezialisierung der allgemeinen Verträglichkeitsbedingung. — Eine Zurückführung von d auf die Komponenten X und Z der äussern Belastungen bietet bei der Kegelschale keine Vorteile.

[17] Diese einfachen Formeln gelten angenähert für beliebig geformte Rotationsschalen. Vergl. meinen Beitrag an den Referatenband des Intern. Kongresses für Mechanik Zürich 1927.