

**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung  
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine  
**Band:** 89/90 (1927)  
**Heft:** 10

**Artikel:** Beitrag zur Berechnung von Schrumpfverbindungen  
**Autor:** Janicki, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-41755>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

INHALT: Beitrag zur Berechnung von Schrumpferbindungen. — Die Häuser der Architekten H. W. Moser und M. Kopp (mit Tafeln 6 bis 9). — Druckverteilung im Baugrunde. — Mitteilungen: Die 39. Generalversammlung der G. E. P. Das neue Untergrund-Umformerwerk der Stadt Leipzig. Alte Gotthardbahn-Ingenieure. „Hafraba“. Normalien des Vereins schweizerischer Maschinen-Industrieller. Der „Bund zur För-

derung der Farbe im Stadtbild“. Ausstellung neuer schweizerischer Architektur in Aarau. — Wettbewerbe: Ueberbauung des Stampfenbach-Areals in Zürich. Völkerbund-Gebäude in Genf. — Nekrologe: Heinrich Meili-Wapf. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Zürcher Ingenieur- und Architekten-Verein. S. T. S.

Band 90.

Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 10

Beitrag zur Berechnung von Schrumpferbindungen.

Von Dipl.-Ing. W. JANICKI, Zürich-Baden.

Im Anschluss an die in der „S. B. Z.“ vom 7. August 1926 (Band 88, Nr. 6) unter obigem Titel erschienene Arbeit soll die Spannungs- und Deformations-Verteilung bei einer Schrumpferbindung in dem Falle untersucht werden, wo der Kernkörper eine Hohlwelle von verhältnismässig beträchtlicher Wandstärke ist, während der Mantelkörper wiederum ein Schrumpfring sein möge, wie im erstbehandelten Falle. Die Berechnung einer Schrumpferbindung mit einem dünnwandigen Rohr als Kernkörper soll einer spätern Betrachtung vorbehalten bleiben.

Fassen wir den in Abb. 1 dargestellten, in der Mitte durch ein ausserordentlich schmales Band von der Breite  $2h$  umschnürten

Hohlwellenstumpf ins Auge, den wir uns der Einfachheit der Rechnung halber ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit nach beiden Seiten unbegrenzt fortgesetzt denken wollen, so ist der Spannungs-Zustand in der Hohlwelle durch die beiden folgenden partiellen

simultanen Differentialgleichungen gekennzeichnet, die man als die statischen Grundgleichungen des Problems ansprechen kann und die die Elastizitätstheorie aller rotations-symmetrisch belasteten Umdrehungskörper beherrschen:

$$\left. \begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}(r \tau) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sigma_r) + r \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \sigma_t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Die Bedeutung der vier Spannungskomponenten  $\sigma_r$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$ , durch die der Spannungszustand in einem Punkte  $(x, r)$  des dargestellten Meridianes vollständig beschrieben wird, ist aus der Abbildung ersichtlich.

Ausser der Annahme, dass die Länge der Hohlwelle gegenüber ihrem Aussendurchmesser gross genug ist, um sie mit hinreichender Genauigkeit als unendlich gross ansehen zu können, sei noch die Voraussetzung getroffen, dass die Gesamtkraft  $P$ , mit der das Band den ungefähr in der Mitte der ganzen Länge liegenden Querschnitt umschlingt, eine lineare spezifische Flächendruckverteilung über die halbe Breite  $h$  des Ringes ergibt, also dem Ansatz genügt:

$$p_x = p_0 \frac{h-x}{h} \dots \dots \dots (2)$$

worin  $p_0$  den Druck pro Flächeneinheit in der Mitte bedeutet. Die Gesamtlast  $P$  verteilt sich also dermassen über den ringförmigen Streifen von der Höhe  $2h$ , (wobei  $h$  sehr klein gegenüber  $2r_a$  ist), dass die Beziehung besteht:

$$P = p_0 r_a h \dots \dots \dots (3)$$

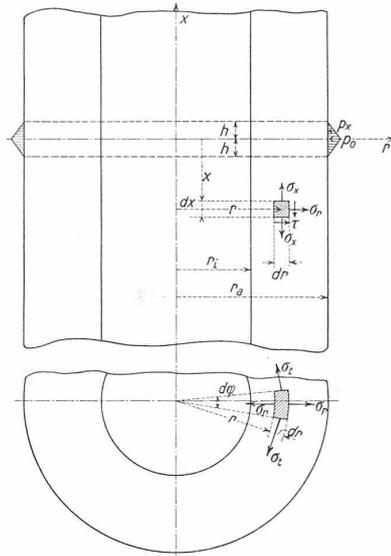


Abb. 1.

Die Spannungsverteilung im Hohlzylinder lässt sich nun nach dem von Ritz aufgestellten Prinzip des Minimums der Formänderungsarbeit mit beliebiger Genauigkeit in der Weise durch ein Näherungsverfahren ermitteln, dass man für zwei Spannungskomponenten, z. B. am geschicktesten für  $\tau$  und  $\sigma_r$ , Ansätze aufstellt, die den Grenzbedingungen genügen und mit grosser Wahrscheinlichkeit das wirkliche elastische Verhalten des Körpers wiedergeben, und dann aus den statischen Gleichungen (1) die beiden fehlenden Spannungskomponenten ermittelt, wobei man dafür Sorge trägt, dass in den beiden ersten Ansätzen noch einige disponible Parameter auftreten. Hierauf berechnet man durch Ausführung einer Integration über den ganzen Rauminhalt des Körpers die diesem angenommenen Spannungszustande entsprechende Formänderungsarbeit, und verfügt über die willkürlichen Freiwerte in der Weise, dass sie die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, wodurch man die beste, mit dem gewählten Ansatz verträgliche Näherungslösung erhält.

Wegen der Symmetrie des Problems kann man alle Betrachtungen auf den in der Richtung der positiven  $x$ -Axe fallenden Teil des Kernkörpers beschränken. Zerlegt man für die Berechnung der Formänderungsarbeit diesen oberen Teil des Hohlzylinders in zwei Abschnitte (Abschnitt I:  $h \leq x \leq \infty$ , Abschnitt II:  $0 \leq x \leq h$ ), so lassen sich für  $\tau$  und  $\sigma_r$  im ersten Abschnitt folgende einfachste Ausdrücke aufstellen:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= c e^{-\gamma x} (r_a - r) (r - r_i) \\ \sigma_r &= \frac{k}{r_a - r_i} e^{-\gamma x} (r_a - r) (r - r_i) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

wobei  $c, k, \gamma$  disponible Parameter sind. Der exponentielle Dämpfungsfaktor  $e^{-\gamma x}$  trägt dem Umstand Rechnung, dass die Spannungen mit wachsendem  $x$  rasch abklingen, während die beiden Klammernglieder die Tatsache zum Ausdruck bringen, dass die äussere und innere Mantelfläche des Zylinders im ersten Abschnitt frei von äusseren Kräften sind.<sup>1)</sup>

Aus (1) findet man:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{c}{\gamma} e^{-\gamma x} \left( 3r - 2(r_a + r_i) + \frac{r_a r_i}{r} \right) \\ \sigma_t &= -e^{-\gamma x} \left( \frac{k}{r_a - r_i} (3r^2 - 2(r_a + r_i)r + r_a r_i) \right. \\ &\quad \left. + \gamma c r (r_a - r) (r - r_i) \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

$\left( \begin{aligned} h &\leq x \leq \infty \\ r_i &\leq r \leq r_a \end{aligned} \right)$

Für den zweiten Abschnitt werden die Ansätze (4) beibehalten, wobei allerdings Zusatzglieder hinzuzunehmen sind, wie sie von den veränderten Anschlussbedingungen gefordert werden. Man findet:

$$\tau = c (r_a - r) (r - r_i) \left( e^{-\gamma x} - \frac{h-x}{h} \right) \dots \dots (6)$$

mit der Grenz- und Uebergangsbedingung:

$$\tau = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } (\tau)_{x=h} = (\tau)_{x=h}$$

woraus aus (1a):

$$\sigma_x = c \left( 3r - 2(r_a + r_i) + \frac{r_a r_i}{r} \right) \left( -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} + \frac{(h-x)^2}{2h} \right) (7)$$

<sup>1)</sup> Durch Multiplikation beider Ansätze für  $\tau$  und  $\sigma_r$  mit einem Polynom von der Form  $\sum c_n r^n$  und  $\sum k_n r^n$ , d. h. durch Einführung weiterer Freiwerte  $c_i$  und  $k_i$  in der Anzahl  $2n$  könnte die Genauigkeit des hier angewandten Verfahrens beliebig gesteigert werden, wovon aber an dieser Stelle der Umständlichkeit der Rechnung wegen abgesehen sei.

mit der Anschlussbedingung:

$$(\sigma_x)_{x=h} = (\sigma_{xII})_{x=h}$$

$$\sigma_r = \frac{r-r_i}{r_a-r_i} \left( k e^{-\gamma x} (\gamma a - r) - \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \right) \quad (8)$$

mit der Grenz- und Uebergangsbedingung:

$$(\sigma_r)_{r=r_a} = -\dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \text{ und } (\sigma_r)_{x=h} = (\sigma_{rII})_{x=h}$$

woraus aus (1 b):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= -e^{-\gamma x} \left( c \gamma r (r_a - r) (r - r_i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{r_a - r_i} (3 \gamma^2 - 2 (r_a + r_i) r + r_a r_i) \right) \\ &\quad \left. + \frac{c}{h} r (r_a - r) (r - r_i) - \frac{2 r - r_i}{r_a - r_i} \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

wobei es allerdings nicht mehr gelingt, den Ausdruck für  $\sigma_t$  im zweiten Abschnitt so zu bestimmen, dass für  $x = h$  nach Gleichung (5 b) und (9) der selbe Wert herauskommt. Es ergibt sich ein plötzlicher Sprung im Wert von  $\sigma_t$  an dieser Stelle im Betrag von  $r \frac{c}{h} (r_a - r) (r - r_i)$ , der aber keine notwendige Gleichgewichtsbedingung verletzt, worauf es bei dem von uns hier eingeschlagenen Näherungsverfahren in erster Linie ankommt.

Die Formänderungsarbeit im ersten Abschnitt berechnet sich nach der Formel:

$$A_I = \int_h^\infty dx \int_{r_i}^{r_a} 2 \pi r A' dr \sim \int_0^\infty dx \int_{r_i}^{r_a} 2 \pi r A' dr,$$

wobei  $A'$  die auf die Raumeinheit bezogene Deformationsarbeit bedeutet:

$$A' = \frac{1}{2G} \left( \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_r^2 + \sigma_t^2) - \frac{1}{2(m+1)} (\sigma_x + \sigma_r + \sigma_t)^2 + \tau^2 \right) \quad (10)$$

wobei  $m$  die Poisson'sche Konstante und  $G$  den Schubmodul des Materials bedeuten. Die Rechnung ergibt:

$$A_I = \frac{\pi}{4G\gamma} \left[ \frac{m}{m+1} \left( \alpha_1 \frac{c^2}{\gamma^2} + \beta_1 k^2 + \gamma_1 \gamma^2 c^2 \right) + k c \gamma \left( \delta_1 - \frac{\delta_2}{m+1} \right) + \frac{1}{m+1} \varepsilon_1 \frac{ck}{\gamma} + \xi_1 c^2 \right] \quad (11)$$

wobei  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1, \xi_1$  folgende Abkürzungen bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b^4}{4} [(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) + 4\lambda^2 \ln \lambda] \\ \beta_1 &= \frac{1}{60} \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} r_i^4 [7(\lambda^4 + 1) - 18\lambda(\lambda^2 + 1) + 22\lambda^2] \\ \gamma_1 &= \frac{1}{840} r_i^8 [5(\lambda^8 - 1) - 16\lambda(\lambda^6 - 1) + 14\lambda^2(\lambda^4 - 1)] \\ \delta_1 &= \frac{1}{210} \frac{r_i^6}{\lambda - 1} [2(\lambda^7 - 1) - 7\lambda((\lambda^5 - 1) - \lambda(\lambda^3 - 1))] \\ \delta_2 &= \frac{1}{210} \frac{r_i^6}{\lambda - 1} [502(\lambda^7 - 1) + 7\lambda((145(\lambda^5 - 1) + 71\lambda(\lambda^3 - 1))] \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{30} \frac{r_i^4}{\lambda - 1} [9(\lambda^5 - 1) - 25\lambda(\lambda^3 - 1) + 30\lambda^2(\lambda - 1)] \\ \xi_1 &= \frac{1}{30} r_i^6 (\lambda + 1)(\lambda - 1)^5 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left( \lambda = \frac{r_a}{r_i} > 1 \right)$$

Die Berechnung der Formänderungsarbeit  $A_{II}$  im zweiten Abschnitte des Zylinders vereinfacht sich erheblich durch die Bemerkung, dass wegen der Kleinheit von  $h$  und hiermit des Volumens nur solche Glieder der spezifischen Deformationsarbeit  $A''$  in Betracht gezogen werden brauchen, die selbst sehr gross sind, sodass sie trotz des kleinen Rauminhalts, über den sie sich erstrecken, doch noch einen der Grössenordnung nach mit  $A_I$  vergleichbaren Beitrag zu  $A_{II}$  liefern können. Von den Spannungskomponenten (6) bis (9) werden aber nur jene Glieder in  $\sigma_r$  und  $\sigma_t$  sehr gross, die  $\dot{p}_0$  enthalten, sowie das Glied in  $\sigma_t$ , bei dem sonst noch  $h$  im Nenner auftritt. Alle andern Glieder können dagegen vernachlässigt werden und man erhält:

$$\left. \begin{aligned} A'' &= \frac{1}{4G} \left[ \left( \frac{r-r_i}{r_a-r_i} \right)^2 \left( \frac{h-x}{h} \right)^2 \dot{p}_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{c}{h} r (r_a - r) (r - r_i) - \frac{2r-r_i}{r_a-r_i} \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m+1} \left( \frac{c}{h} r (r_a - r) (r - r_i) - \frac{3r-2r_i}{r_a-r_i} \dot{p}_0 \frac{h-x}{h} \right)^2 \right] \quad (13) \end{aligned}$$

woraus sich die totale Deformationsarbeit im zweiten Abschnitt berechnet zu:

$$A_{II} = \int_0^h dx \int_{r_i}^{r_a} 2 \pi r A'' dr = \frac{\pi}{4G} (K_1 + K_2 c + K_3 c^2) \quad (14)$$

Wobei  $K_1, K_2, K_3$  folgende Ausdrücke bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{h \dot{p}_0 r_i^2}{60(\lambda-1)^2} \left[ 5(\lambda^4 - 1) - 8(\lambda^3 - 1) + 4(\lambda^2 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m+1} (9(\lambda^4 - 1) - 16(\lambda^3 - 1) + 8(\lambda^2 - 1)) \right] = \\ &= \eta_1 - \frac{1}{m+1} \eta_2 \\ K_2 &= \frac{\dot{p}_0}{30(\lambda-1)} r_i^5 \left[ .0(\lambda^6 - 1) - 12(2\lambda + 3)(\lambda^5 - 1) + \right. \\ &\quad \left. + 15(3\lambda + 1)(\lambda^4 - 1) - 20\lambda^2(\lambda^3 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m+1} (30(\lambda^6 - 1) - 12(3\lambda + 1)(\lambda^5 - 1) + \right. \\ &\quad \left. + 15(5\lambda + 1)(\lambda^4 - 1) - 40\lambda(\lambda^3 - 1)) \right] = \\ &= \xi_1 - \frac{1}{m+1} \xi_2 = K'' \dot{p}_0 \\ K_3 &= \frac{r_i^8}{420h} \left( 1 - \frac{1}{m+1} \right) \left[ 105(\lambda^8 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 240(\lambda + 1)(\lambda^7 - 1) + 140(\lambda^2 + 4\lambda + 1)(\lambda^6 - 1) - \right. \\ &\quad \left. - 336\lambda(\lambda + 1)(\lambda^5 - 1) + 210\lambda^2(\lambda^4 - 1) \right] = \\ &= \vartheta_1 - \frac{1}{m+1} \vartheta_2 = \frac{1}{h} K''' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Somit ergibt sich für die gesamte Formänderungsarbeit in beiden Zylinderabschnitten folgender Ausdruck:

$$A = A_I + A_{II} = \frac{\pi}{4G} \left( C_1 \frac{c^2}{\gamma^2} + C_2 \frac{k^2}{\gamma} + C_3 \gamma c^2 + C_4 c k + C_5 \frac{ck}{\gamma^2} + C_6 \frac{c^2}{\gamma} + K_2 c + K_3 c^2 + K_1 \right) \quad (16)$$

wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \frac{m}{m+1} = C_1, \quad \beta_1 \frac{m}{m+1} = C_2, \quad \gamma_1 \frac{m}{m+1} = C_3 \\ \delta_1 - \frac{\delta_2}{m+1} = C_4, \quad \frac{\varepsilon_1}{m+1} = C_5, \quad \xi_1 = C_6 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Die Forderung des Minimums der Formänderungsarbeit führt dann zu folgenden drei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der drei Freiwerte  $\gamma, c$  und  $k$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \gamma} &= -\frac{\pi}{4G} \left[ 3 C_1 \frac{c^2}{\gamma^4} + 2 C_5 \frac{ck}{\gamma^3} + \frac{1}{\gamma^2} (C_2 k^3 + C_6 c^2) - C_3 c^2 \right] = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{\pi}{4G} \left[ c \left( \frac{2C_1}{\gamma^3} + 2C_3 \gamma + \frac{2C_6}{\gamma} + 2K_3 \right) + k \left( C_4 + \frac{C_5}{\gamma^2} \right) + K_2 \right] = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial k} &= \frac{\pi}{4G} \left[ 2 C_2 \frac{k}{\gamma} + C_4 c + \frac{C_5 c}{\gamma^2} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Daraus findet man:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= + \sqrt{\frac{C_4 C_5 - 2 C_2 C_6 \pm \sqrt{(C_4 C_5 - 2 C_2 C_6)^2 + 3(4 C_1 C_2 - C_6^2)(4 C_2 C_3 - C_4^2)}}{C_4^2 - 4 C_2 C_3}} \\ c &= \frac{2 C_2 K_2 \gamma^3}{(4 C_2 C_3 - C_4^2) \gamma^4 + 4 C_2 K_3 \gamma^3 + 2(2 C_2 C_6 - C_4 C_5) \gamma^2 + (4 C_1 C_2 - C_6^2)} \\ k &= -\frac{C_4 \gamma^2 + C_5 c}{2 C_2 \gamma} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Unter der vereinfachenden Annahme  $m = \infty$  berechnet sich die elastische Verkürzung  $\Delta r_a$ , die der Halbmesser  $r_a$  des Zylinders an der Stelle  $x = 0$  erfährt, aus der Verkürzung des äusseren Kreisumfangs wie folgt:

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} = -\frac{1}{E} \left( k r_a + \frac{2 r_a - r_i}{r_a - r_i} \dot{p}_0 \right),$$

$$\Delta u = \int_0^{2\pi} \varepsilon_t r_a d\varphi = r_a \varepsilon_t 2\pi = -\frac{2\pi r_a}{E} \left( k r_a + \frac{2 r_a - r_i}{r_a - r_i} \dot{p}_0 \right)$$

wobei  $\varepsilon_t$  die spezifische Dehnung in der Tangentialrichtung,  $\Delta u$  die Kreisumfangverkürzung und  $E$  den Elastizitätsmodul des Materials für Zug bedeutet. Daraus findet man:

$$(\Delta r_a)_{x=0} = -\frac{r_a}{E} \left( k r_a + \frac{2 r_a - r_i}{r_a - r_i} \dot{p}_0 \right) \quad (20)$$

Fasst man wiederum den Mantelkörper als Scheibe auf, so führen die gleichen Ueberlegungen wie in der eingangs angeführten Arbeit zu folgenden drei Bestimmungsgleichungen für die Integrationskonstanten  $B^*$ ,  $C^*$  und die maximale spezifische Flächenpressung  $p_0$  ( $m = \infty$  gesetzt und  $E_1 = E_2 = E$  angenommen):

$$\left. \begin{aligned} E \left( B^* - \frac{C^*}{R_2^2} \right) &= 0 \\ \left( B^* R_1 + \frac{C^*}{R_1} \right) - \frac{r_a}{E} \left( k r_a + \frac{2 r_a - r_i}{r_a - r_i} p_0 \right) &= \Delta \\ E \left( B^* - \frac{C^*}{R_1^2} \right) &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Daraus findet man ( $R_1 = a$  gesetzt):

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{(r_a^2 k + E \Delta) (r_a - r_i) (r_a^2 - R_2^2)}{2 r_a^3 (r_a - r_i) - r_a (2 r_a - r_i) (r_a^2 - R_2^2)}; \\ B^* &= \frac{r_a^2 \Delta}{E (r_a^2 - R_2^2)}; \quad C^* = B^* R_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

**Zahlenbeispiel:** Die gefundenen Ergebnisse sollen nun an einem Zahlenbeispiel erläutert werden. Es seien folgende Grössen der Berechnung zugrunde gelegt:  $r_a = 20$  cm,  $r_i = 10$  cm,  $R_2 = 40$  cm,  $h = 0,5$  cm;  $\lambda = 2$ .  $\Delta = 1,5 \frac{0}{0}$ , von  $r_a = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,03$  cm.  $E = 2,2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>  $m = \infty$ .

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_1 = 5,22 \cdot 10^3. & C_2 &= \beta_1 = 1,35 \cdot 10^4. & C_3 &= \\ \gamma_1 &= 11,845 \cdot 10^7. & C_4 &= \delta_1 = 297,6 \sim 300. & C_5 &= 0. & C_6 &= \\ \zeta_1 &= 10^5. & \gamma &= 0,11. & K_2 &= -11 \cdot 10^5 p_0. & K_3 &= -4906,3 \cdot 10^7. \\ c &= 1,02 \cdot 10^4 p_0. & k &= -1,24 \cdot 10^7 p_0 & p_0 &\sim -900 \text{ kg/cm}^2. \\ B^* &= 136 \cdot 10^6. & C^* &= 0,22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sigma_t^*)_{r=R_2} &= \sim 600 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_r^*)_{r=R_2=r_a} &= -900 \text{ kg/cm}^2. \\ (\sigma_t^*)_{r=R_1=r_a} &= \sim 1500 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_t)_{r=r_a} &= -2700 \text{ kg/cm}^2. \\ (\sigma_r)_{r=r_a} &= -900 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_t)_{r=r_i} &= \sim -900 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_r)_{r=r_i} &= 0. \end{aligned}$$

Handelt es sich um Schrumpfringe von einer Breite, die gegenüber den andern Abmessungen beträchtlich ist, so lassen sich in Anlehnung an die von A. & L. Föppl durchgeführte Untersuchung für den Vollzylinder als Kernkörper<sup>1)</sup> nach dem Superpositionsprinzip folgende Formeln für den Spannungs- und Deformationszustand einer unendlich langen Welle ableiten, die in der Mitte auf eine Länge  $l$  ringsum gleichmässig mit einer konstanten spezifischen Flächenpressung  $p_0$  beansprucht ist:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{p_0}{\gamma} K_4 (r_a - r) (r - r_i) \left[ e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}} \right] \\ \sigma_x &= -\frac{p_0}{\gamma^2} K_4 \left( 3r - 2(r_a + r_i) + \frac{r_a r_i}{r} \right) \\ &\quad \left[ 2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}} \right] \\ \sigma_r &= \frac{r - r_i}{r_a - r_i} \left[ \frac{p_0}{\gamma} K_5 \left( 2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}} \right) - p_0 \right] \\ \sigma_t &= -\frac{p_0}{\gamma} \left( 2 - e^{-\gamma \frac{l-2x}{2}} - e^{-\gamma \frac{l+2x}{2}} \right) \\ &\quad \left[ \frac{K_5}{r_a - r_i} [3\gamma^2 - 2(r_a + r_i)r + r_a r_i] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma K_4 r (r_a - r) (r - r_i) \right] + p_0 K_4 r (r_a - r) (r - r_i) - \frac{2r - r_i}{r_a - r_i} p_0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

wobei  $K_4 = \frac{K''}{2 K''}$ ,  $K_5 = -\frac{C_4 \gamma^2 + C_5}{2 C_2 \gamma} K_4$  und  $K''$  und  $K'''$

die in (15) angegebenen Abkürzungen bedeuten. Die Formeln (23) gelten nur für die innerhalb des Belastungsstreifens ( $|x| \leq l/2$ ) gelegenen Elemente, wobei der Koordinatenursprung in der Mitte der Strecke  $l$  angenommen ist. Die Verkürzung  $v$  des Ausserhalbmessers  $r_a$  berechnet sich für die Stelle  $x = 0$ ,  $r = r_a$  analog wie in Formel (20) zu:

$$v = -\frac{p_0}{E} r_a \left[ \frac{2 r_a K_5}{\gamma} \left( 1 - e^{-\gamma \frac{l}{2}} \right) + \frac{2 r_a - r_i}{r_a - r_i} \right] = -\frac{r_a p_0}{E} V \quad (24)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Schrumpfverbindung lauten analog Formeln (21):

$$\left. \begin{aligned} E \left( B^* - \frac{C^*}{R_2^2} \right) &= 0 \\ B^* R_1 + \frac{C^*}{R_1} - \frac{r_a p_0}{E} V &= \Delta \\ E \left( B^* - \frac{C^*}{R_1^2} \right) &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

<sup>1)</sup> A. & L. Föppl „Drang und Zwang“ Band II, 1920, Seite 177 bis 180.

und ihre Auflösung nach  $p_0$ ,  $B^*$  und  $C^*$  ergibt:

$$p_0 = \frac{-E \Delta}{r_a \left( V + \frac{R_2^2 + r_a^2}{R_2^2 - r_a^2} \right)}, \quad B^* = -\frac{p_0 r_a^2}{E R_2^2 - r_a^2}, \quad C^* = B^* R_2^2 \quad (26)$$

**Zahlenbeispiel:** Legt man der Rechnung die gleichen Daten wie im ersten Beispiel zu Grunde, mit dem einzigen Unterschied, dass man jetzt  $2h = l = 2$  cm wählt, so findet man:

$$\begin{aligned} p_0 &= \sim -700 \text{ kg/cm}^2, & B^* &= 10,7 \cdot 10^{-5}, & C^* &= 0,1712. \\ (\sigma_r^*)_{r=R_1=r_a} &= -700 \text{ kg/cm}^2, & (\sigma_t^*)_{r=R_1=r_a} &= 1177 \text{ kg/cm}^2, \\ & & (\sigma_r^*)_{r=R_2} &= 470 \text{ kg/cm}^2. \\ (\sigma_t)_{r=r_a} &= -1150 \text{ kg/cm}^2, & (\sigma_t)_{r=r_i} &= -2120 \text{ kg/cm}^2, \\ & & (\sigma_x)_{r=r_a} &= +275 \text{ kg/cm}^2 \\ (\sigma_x)_{r=r_i} &= -275 \text{ kg/cm}^2, & (\tau)_{r=r_a} &= 0. & (\tau)_{r=r_i} &= 0. \end{aligned}$$

Rechnet man das gleiche Zahlenbeispiel zum Vergleich nach der Scheibentheorie<sup>1)</sup> durch, so findet man: Trommel (Mantelkörper):  $(\sigma_r^*)_{r=R_1=r_a} = -990$  kg/cm<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned} (\sigma_t^*)_{r=R_1=r_a} &= 1650 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_t^*)_{r=R_2} &= 660 \text{ kg/cm}^2 \\ Zapfen (Kernkörper): & (\sigma_r)_{r=r_a} = -990 \text{ kg/cm}^2. \\ (\sigma_t)_{r=r_a} &= -1650 \text{ kg/cm}^2. & (\sigma_t)_{r=r_i} &= -2640 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass die Beanspruchungen nach den Formeln der Scheibentheorie etwas ungünstiger ausfallen als nach denen des von uns angewandten Verfahrens. Rechnet man das selbe Beispiel für andere Werte des Parameters  $l$  durch, so findet man, dass sich die Spannungswerte nur wenig in Abhängigkeit von  $l$  ändern, solange  $l$  innerhalb gewisser Grenzen ( $l \leq R_2$ ) bleibt.

### Die Häuser der Arch. H. W. Moser und M. Kopp zwei Wohnhäuser am Zürichsee.

(Hierzu Tafeln 6 bis 9.)

Die auf den folgenden Seiten und Tafeln in Bildern und Rissen vorgeführten behaglichen Wohnhäuser, die Eigenheime der beiden Firmateilhaber Hans W. Moser und Max Kopp, stellen den seltenen Glücksfall dar, in dem der Architekt sein eigener Bauherr sein kann. Sie liegen einander gegenüber: das Haus Moser am sonnigen Rebhang von Herrliberg, Haus Kopp am seeseitigen, dem Nordostwind ausgesetzten Rand der Terrasse oberhalb Bendlikon. Darin, in ihrer klimatischen Situation, liegt ihr wesentlicher Unterschied. Im übrigen geben uns die Erbauer folgende Erläuterungen zu den Bildern.

**Allgemeines.** Die Häuser Moser und Kopp wurden im Jahre 1923/24 erbaut und im Frühjahr 1924 bezogen. In beiden Fällen handelte es sich darum, für eine junge Familie mit relativ beschränkten Mitteln ein Heim in Stadtnähe zu schaffen, das, ganz ins Grün eingebettet, in Kontakt mit der Natur steht.<sup>2)</sup> Es ist darum eine Selbstverständlichkeit, dass in beiden Fällen nach der Sonne orientiert wurde, dass die Räume bei aller Sparsamkeit nicht kleinlich ausfielen, dass Wohnzimmer und Garten in direkter Verbindung zu einander stehen und dass breite, mit Steinplatten belegte Terrassen vor der Sonnenseite der Häuser liegen. Eine gedeckte Laube bildet die windgeschützte Sommerwohnstube und blühende Staudenbeete säumen die Terrasse gegen die Wiese.

Aus dieser Einstellung zur Situation und zur Natur ergibt sich von selber der Ausdruck der Häuser, die ein bescheidenes und behagliches Wohnen ausdrücken. Sie wollen weder Weltanschauungen manifestieren, noch mit

<sup>1)</sup> Siehe z. B. A. Stodola, „Dampf- und Gasturbinen“. 5. Aufl., 1922, Seite 343.

<sup>2)</sup> Die nämlichen Gegebenheiten also und Erfordernisse, die vor 20 Jahren den Herausgeber zum Bau seines Hauses im „Maienäss“ geführt hatten, in dessen Nähe nun auch das Haus Kopp steht. Vergleiche Band 72, Seite 143 (2. Oktober 1918). Red.