

Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons

Autor(en): **Föppl, Otto**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **89/90 (1927)**

Heft 23

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41705>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

INHALT: Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons. — Der Neubau der Schweizer Nationalbank in Luzern (mit Tafeln 15 und 16). — Elektrizitätsversorgung der Schweiz aus ihren Wasserkraften. — Mitteilungen: Aus „Bauen“ von Bruno Taut. Bronze-Zahnräder aus Schleuderguss. Unterwasser-Tunnel für Strassenverkehr in Oakland. Pneumatischer Betontransport.

Sechszylinder-Flugmotor von 950 PS. Luftphotogrammetrie. Eisenbeton-Hängebrücke in Vaux-sous-Laon. Eisenhüttenanlage in Luxemburg. Wasserkraftnutzung in Island. Luftweg nach Indien. Die Roheisenerzeugung der Vereinigten Staaten im Jahre 1926. — Wettbewerbe: Schulhaus und Turnhalle für die Bezirksschule an der Burghalde in Baden. — Literatur. — Vereinsnachrichten: Sektion Bern. Basler I. A. V. S. T. S.

Band 89.

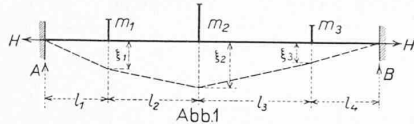
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet.

Nr. 23

Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons.

Von Prof. Dr.-Ing. OTTO FÖPPL, Braunschweig.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, die Eigenschwingungszahl eines gespannten Seiles zu berechnen, das mit mehreren Lasten behaftet ist. Der gleiche Weg, der hier zur Lösung führt, kann auch zur Berechnung der Eigenschwingungszahl einer Zug- und Druckfeder eingeschlagen werden, die mit aufgesetzten Massen behaftet ist, oder einer Welle, die Schwungmassen trägt. Der folgenden Betrachtung wohnt deshalb weitergehende Bedeutung inne, als es nach den zuerst folgenden Ausführungen scheinen mag.



Wir beziehen uns auf Abbildung 1, in der ein mit der Kraft H gespanntes Drahtseil mit den Massen $m_1, m_2 \dots$ dargestellt ist. Das Eigengewicht des Drahtseils wird vernachlässigt. Das Drahtseil mit den Lasten kann Schwingungen senkrecht zur Axe ausführen, deren Ausschläge $\xi_1, \xi_2 \dots$ klein sein sollen gegenüber den Abständen $l_1, l_2 \dots$ zwischen den einzelnen Massen. Auf jede Masse m werden durch das Seil Kräfte von beiden Seiten her übertragen. Die wagrechten Kraftkomponenten sind in erster Annäherung gleich H ; sie heben sich für jede Masse heraus. In lotrechter Richtung wirkt auf die Masse m_n von links die Komponente $-H \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n}$ und von rechts $+H \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}}$; das negative Vorzeichen gibt an, dass die Masse m_n durch die Kraft nach der Nulllage zu beschleunigt wird. Es ist also:

$$m_n \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -H \left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}} \right) \quad (1)$$

Die Gleichung (1) und die entsprechenden Gleichungen für die übrigen Massen haben bei s Massen s Lösungen. Von Interesse ist gewöhnlich nur die Lösung 1. Ordnung. Um sie zu finden, muss eine Gleichung von s^{ten} Grad gelöst werden, was bei $s > 3$ erhebliche Schwierigkeiten verursacht. Die Lösung von der 1. Ordnung kann aber in angenäherter Weise auch gefunden werden, wenn die ungefähre Form, nach der das gespannte Drahtseil schwingt, bekannt ist, und darauf bauen die nachfolgenden Ausführungen auf.

Wir stützen uns auf den Aufsatz des Verfassers: „Berechnung der Biegungsschwingungszahl einer Welle, die mit mehreren Massen behaftet ist“, in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“ Jahrgang 1927, Heft 1, wo die Biegungsschwingungszahl einer mit Einzelasten behafteten Welle mit Hilfe des Impulssatzes angenähert bestimmt worden ist. Wir bezeichnen mit $\xi_{01}, \xi_{02} \dots$ die Grösstausschläge, die bei der Schwingung auftreten, und setzen den Ausschlag ξ_n zur Zeit t gleich $c \xi_{0n}$. Der Koeffizient c ist nur von der Zeit abhängig; er hat also für alle Ausschläge zu einer bestimmten Zeit gleiche Grösse. Wenn n_1 die minutliche Schwingungsdauer 1. Ordnung und $\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}$ die Winkelgeschwindigkeit der Schwingung ist, können wir $c = \cos \omega_1 t$ setzen.

Mit A und B bezeichnen wir die beiden durch die Festpunkte übertragenen Kräfte in lotrechter Richtung, die bei der Schwingung auftreten; es ist also

$$A = H \frac{\xi_1}{l_1} = H \frac{\xi_{01}}{l_1} \cos \omega_1 t$$

und
$$B = H \frac{\xi_s}{l_{s+1}} = H \frac{\xi_{0s}}{l_{s+1}} \cos \omega_1 t$$

Nach der dynamischen Grundgleichung ist ferner die Summe der äusseren Kräfte in lotrechter Richtung gleich der Summe der Massen multipliziert mit ihren Beschleunigungen in dieser Richtung:

$$A + B = \sum_{n=0}^s m_n \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -\omega_1^2 \cos \omega_1 t \sum m_n \xi_{0n} \quad (2)$$

Das Summenzeichen ist über die sämtlichen Massen zu erstrecken, die auf dem schwingenden Drahtseil sitzen. Der grösste Ausschlag ist zur Zeit $t=0$ vorhanden; dann ist:

$$A_0 + B_0 = -\omega_1^2 \sum m_n \xi_{0n} \quad (3)$$

Die Gleichung (3) gilt für die Schwingungslinie. Wir vergleichen sie mit einer entsprechenden Gleichung, die für die statische Seillinie aufgestellt ist und die angibt, dass das Gewicht mg der Massen m von den beiden Festpunkten aus getragen wird:

$$A + B = -g \sum m_n \quad (4)$$

Wir finden, dass beide Gleichungen, abgesehen von einem Faktor, den wir $p = \frac{a \omega_1^2}{g}$ nennen wollen, dadurch von einander verschieden sind, dass unter dem einen Summenzeichen die Massen und unter dem andern die Massen m multipliziert mit den Durchbiegungen ξ_0 in der Nulllage auftreten. Wir können deshalb sagen, „die Schwingungskurve ist jene Seilkurve, die entsteht, wenn man das Seil statt durch die Massen m durch die Massen multipliziert mit den Grösstdurchbiegungen belastet“. Wir setzen deshalb im nachfolgenden statt der Massen m fingierte Massen $\varkappa m \xi_0$ ein. Damit die fingierten Massen auch wirklich die Dimension von Massen haben, muss der Faktor \varkappa die Dimension cm^{-1} haben. Wir werden sehen, dass \varkappa bei der Aufstellung der Gleichung für die Schwingungsdauer herausfällt.

Die Grössen der einzelnen Werte ξ_0 sind uns nicht bekannt. Wir kennen aber die Senkungen ξ_G , die die Massen durch elastisches Nachgeben des Seils unter ihrem Eigengewicht erfahren. Für die angenäherte Berechnung nehmen wir an, ξ_0 sei gleich ξ_G und die fingierten Massen infolgedessen $\varkappa m \xi_G$. Den fingierten Massen entsprechen lotrechte Seilzüge an den beiden Festpunkten:

$$A_G' + B_G' = g \varkappa \sum m \xi_G \quad (5)$$

Wenn die Schwingungskurve in der Endlage gleich der Seilkurve ist, gibt Gleichung (5) auch die bei der Schwingung in der Totlage von aussen auf das System übertragene lotrechte Kraft an. Die Werte in einer Zwischenlage zur Zeit t erhalten wir wieder durch Multiplikation der rechten Seite von Gleichung (5) mit $c = \cos \omega_1 t$:

$$A + B = g \varkappa \cos \omega_1 t \sum m \xi_G \quad (6)$$

Wir betrachten nun den Schwingungsvorgang von der Zeit $t=0$, zu der die Massen in der äussersten Schwingungslage sind, bis zur Zeit $t = t_a = \frac{T_1}{4} = \frac{2\pi}{4\omega_1}$ des Durchganges der Massen durch die Mittellage. Mit T_1 ist die Schwingungsdauer 1. Ordnung in Sekunden bezeichnet,

n_l gibt die minutliche Schwingungszahl an. Auf eine Viertelschwingung leisten die beiden äusseren Kräfte den Impuls Z :

$$Z = \int_0^{\frac{T_1}{4}} (A + B) dt = g \kappa \frac{1}{\omega_l} \sum m \xi_G \quad (7)$$

Dieser Impuls ist dazu verwendet worden, um die Massen aus der Totlage (Geschwindigkeit $\frac{d\xi}{dt} = 0$) bis zur Mittellage a (Geschwindigkeit $(\frac{d\xi}{dt})_a = -\xi_0 \omega_l (\sin \omega_l t)_{t=t_a} = -\xi_0 \omega_l - \xi_G \omega_l$) zu beschleunigen. Das negative Vorzeichen, das die Richtung der Geschwindigkeit angibt, ist im folgenden ohne Bedeutung. Der Impuls Z ist gleich der den fingierten Massen mitgeteilten Bewegungsgrösse:

$$Z = \sum (\kappa m \xi_G) \omega_l \xi_G = \kappa \omega_l \sum m \xi_G^2 \quad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{g \sum m \cdot g}{\sum m \xi_G^2}} \quad (9)$$

$$n_l = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g \sum m \xi_G}{\sum m \xi_G^2}} \quad (9a)$$

$$T_1 = 2 \pi \sqrt{\frac{\sum m \xi_G^2}{g \sum m \xi_G}} \quad (9b)$$

Wenn die Schwingungskurve proportionale Ausschläge mit der statischen Seilkurve hat, dann gilt Gleichung (9) streng. Das trifft z. B. zu, wenn nur eine Masse mit dem Drahtseil schwingt oder wenn zwei gleich grosse Massen symmetrisch zur Mittellage befestigt sind. Im allgemeinen Fall ist eine Abweichung zwischen statischer Seilkurve und Schwingungskurve vorhanden. Die Gleichungen (9) geben aber eine Näherung an das wahre Ergebnis, die in sehr vielen Fällen vollständig befriedigt.

Beispiel:

Wenn wir als Beispiel die Eigenschwingungszahl eines gespannten Seils mit vielen Massen berechnen wollten, so wäre es schwer möglich, den mit der Annäherung verbundenen Fehler zu ermitteln, da die zeichnerische Ungenauigkeit einen Fehler von gleicher Grössenordnung zur Folge hat. Wir behandeln deshalb ein Beispiel, bei dem wir die Gleichung (9) analytisch lösen und dabei feststellen können, welche Abweichungen gegenüber der ebenfalls analytisch genau bestimmaren Eigenschwingungsdauer auftreten. Diese Möglichkeit besteht bei der Berechnung der Saitenschwingung. Eine Saite ist ein gespanntes Seil, das mit sehr vielen sehr kleinen Massen von gleicher Grösse gleichmässig besetzt ist. Wenn H die Saitenspannung, l die Länge, f der Querschnitt und $\mu = \frac{\gamma}{g}$ die bezogene Masse des Baustoffes sind, dann erhalten wir die Schwingungsdauer T_1 nach der genauen Formel zu:

$$T_1 = 2 l \sqrt{\frac{\mu f}{H}} \quad (10)$$

Um die Gleichung (9b) anwenden zu können, bestimmen wir ξ_G an den einzelnen Stellen x unter dem Eigen-gewicht. Die tatsächliche Durchhängung erfolgt nach der Seillinie, die wir angenähert durch eine Parabelersetzen können, was bei den hier in Frage kommenden geringen Durchhängungen nur mit einer ganz geringen Vernachlässigung verbunden ist. Die Gleichung der Parabel bezogen auf den Festpunkt A lautet (Abbildung 2):

$$\xi_G = \frac{\mu f g}{2 H} x (l - x) \quad (11)$$

Den Wert aus Gleichung (11) setzen wir in Gleichung (9b) ein und erhalten:

$$T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{10}} 2 l \sqrt{\frac{\mu f}{H}} \quad (12)$$

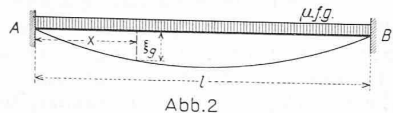


Abb. 2

Der Unterschied im Werte der beiden Ausdrücke für T_1 nach den Gleichungen (10) und (12) ist $(1 - \frac{\pi}{\sqrt{10}}) \cdot 100 = 0,6 \%$. Mit der Anwendung der Annäherungsrechnung ist also in diesem Falle ein Fehler von 0,6 % verbunden.

Uebertragung des Ergebnisses auf anders geartete Schwingungsvorgänge.

In meinem Buch „Grundzüge der technischen Schwingungslehre“ (Berlin 1923) habe ich gezeigt, dass die im vorausgehenden behandelte Seilschwingung den nämlichen Gleichungen gehorcht, wie die Schwingung von Massen m , die zwischen Federn gehalten sind (Abb. 3) oder von Schwungmassen, die auf einer Welle sitzen (Abb. 4). Statt des Seilzuges H (Abb. 1) tritt die Elastizitätszahl c_0^1 der Feder (Abb. 3) bzw. der Welle (Abb. 4) auf. Mit Hilfe der Gleichung (9) können wir deshalb auch zugleich die Schwingungsdauern für Anordnungen nach den Abb. 3 und 4 mit lösen. Da die Anordnung nach Abb. 4 für die Berechnung von Maschinenwellen auf kritische Drehschwingungs-Zahlen grosse praktische Bedeutung hat, wollen wir uns mit diesem Fall eingehender befassen.



Abb. 3

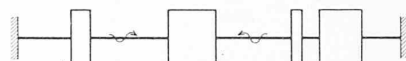


Abb. 4

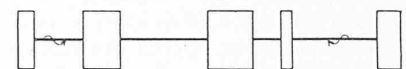


Abb. 5



Abb. 6

Gewöhnlich ist die Welle nicht an den beiden Enden festgehalten, sondern sie kann frei ausschwingen (Abbildung 5). Für die Ausrechnung der Eigenschwingungszahl kommt es aber nur auf die Produkte von Massen mal Längen an. Wir können deshalb die Anordnung nach Abbildung 5 sofort in eine solche nach Abbildung 4 überführen, wenn wir die Schwungmassen durch Wellenstücke von gleichen Zahlenkoeffizienten und umgekehrt die Wellenstücke durch Massen von gleichen Zahlenkoeffizienten ersetzen.

[Wenn die Aufgabe vorliegt, die Eigenschwingungszahl einer Welle zu berechnen, die an einem Ende festgehalten ist und am andern Ende frei ausschwingen kann (Abbildung 6), dann ist zu beachten, dass die Eigenschwingungszahl dieser Anordnung die gleiche ist wie die der gestrichelt ergänzten in Abbildung 6, die durch symmetrische Ausbildung relativ zum ursprünglichen Festpunkt erhalten ist.]

Durchrechnung eines Zahlenbeispiels.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Drehschwingungszahl I. Ordnung der durch Abbildung 7 gegebenen Welle mit zugehörigen Schwungmassen zu berechnen. Die gleiche Aufgabe ist an anderer Stelle behandelt.²⁾

Es ist dort gezeigt, dass die Drehschwingungs-Anordnung nach Abb. 7 mit Schwungmassen und Wellenstücken die gleiche Eigenschwingung hat, wie die geradlinige Schwingungsanordnung nach Abb. 8 mit Massen und Federstücken, wenn die Elastizitätsziffer c_0 der Feder in Abb. 8 mit 10^8 kg angegeben wird. Die Anordnung nach Abb. 8 hat wiederum die gleiche Schwingungszahl wie die nach Abb. 9, die durch Vertauschen der Massen und Federn aus Abb. 8 hervorgeht.

¹⁾ c_0 ist das Tausendfache der Kraft, die (bzw. des Momentes, das) ausgeübt werden muss, um ein Stück Feder (Welle) von der Länge l um $1/1000$ zusammendrücken oder zu dehnen (um den Winkel $1/1000$ zu drehen).

²⁾ O. Föppl „Grundzüge der Technischen Schwingungslehre“ Berlin 1923.

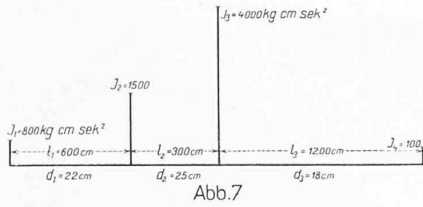


Abb. 7

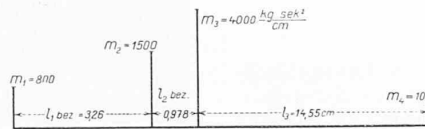


Abb. 8

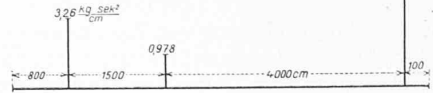


Abb. 9

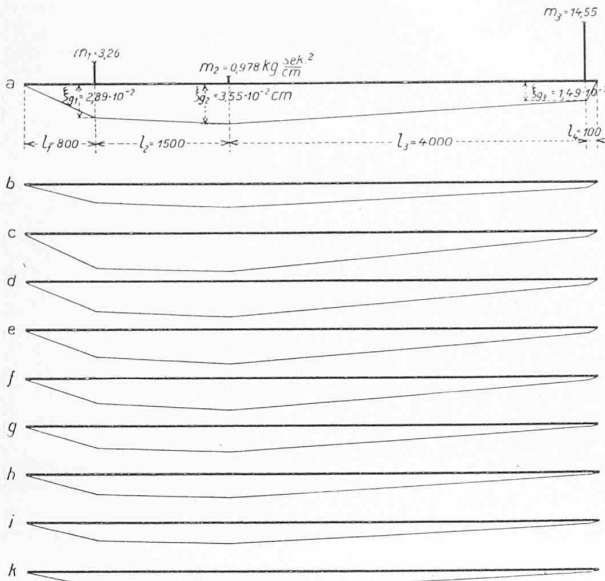


Abb. 10

Wir betrachten nun Abbildung 9 als Darstellung eines mit den Massen m behafteten Seiles, das mit $H = 10^8$ kg gespannt ist, und ziehen in bekannter Weise die Seillinie. Aus Abbildung 10a entnehmen wir die Durchhängung an den Stellen m_1, m_2, m_3 zu $\xi_{G1} = 2,89 \cdot 10^{-2}$, $\xi_{G2} = 3,55 \cdot 10^{-2}$ und $\xi_{G3} = 1,49 \cdot 10^{-2}$ cm. Das Einsetzen der Werte in Gleichung (9b) liefert $n_1 = 2080$ pro min mit einem Fehler von $\sim 15\%$ gegenüber der genauen Rechnung, die 1785 pro min ergibt.

Die Abweichung der Annäherungsrechnung ist im Zahlenbeispiel deshalb besonders gross, weil die Massenverteilung ganz besonders ungleichmässig angenommen worden ist. Wir haben aber jetzt ein Mittel an der Hand, um uns an das wahre Resultat mehr und mehr anzunähern: Wir zeichnen eine neue Seilkurve (Abb. 10b), bei der die Belastungen nicht m_1, m_2, \dots sondern $m_1 \xi_{G1}, m_2 \xi_{G2}, \dots$ sind. Aus der neuen Seilkurve mit den Durchhängungen $\xi'_{G1}, \xi'_{G2}, \dots$ bilden wir neue fingierte Belastungen $m_1 \xi'_{G1}, m_2 \xi'_{G2}, \dots$, die wir abermals zur Konstruktion einer neuen Seilkurve (10c) verwenden und so fort, mit dem Ergebnis, dass zwei aufeinanderfolgende Seilkurven in ihrer Gestaltung immer ähnlicher werden: sie nähern sich der Gestalt an, die das Seil bei der Schwingung annimmt. Die absolute Grösse des Ausschlages ξ ist ohne Einfluss auf die Schwingungsdauer. Wir müssen deshalb eine Gleichung für T suchen, die unabhängig von der absoluten Grösse von ξ ist.

Von der linken Seite wird die lotrechte Auflagekraft $H \frac{\xi}{l_1} = H \frac{\xi_{01}}{l_1} \cos \omega t$ (von rechts $H \frac{\xi}{l_{s+1}} = H \frac{\xi_{os}}{l_{s+1}} \cos \omega t$) vom Fundament auf das schwingende System übertragen. Der während der Viertelschwingung von $t = 0$ bis $t = t_a$ übertragene Impuls Z ist also:

$$Z = \int_0^{t_a} H \left(\frac{\xi_{01}}{l_1} + \frac{\xi_{os}}{l_{s+1}} \right) \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega l} H \left(\frac{\xi_{01}}{l_1} + \frac{\xi_{os}}{l_{s+1}} \right) \quad (13)$$

Aehnlich wie bei Aufstellung der Gleichung (8) können wir den Impuls gleichsetzen der Bewegungsgrösse:

$$Z = \sum m \left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{t=t_a} = \omega l \sum m_n \xi_{on} \quad (14)$$

daraus:

$$\omega l = \sqrt{\frac{H \left(\frac{\xi_{01}}{l_1} + \frac{\xi_{os}}{l_{s+1}} \right)}{\sum m \xi_0}} \quad \text{und} \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\sum m \xi_0}{H \left(\frac{\xi_{01}}{l_1} + \frac{\xi_{os}}{l_{s+1}} \right)}} \quad (15)$$

In dieser Gleichung treten die ξ -Werte sowohl im Nenner als auch im Zähler in der ersten Potenz auf. Eine verhältnismässige Vergrösserung aller Werte ist deshalb ohne Einfluss auf die Schwingungsdauer T . Wir brauchen uns um den Masstab, in dem die ξ -Werte gemessen werden, nicht zu kümmern, sondern wir können ihn so wählen, dass der verfügbare Platz richtig ausgenutzt wird.

In Abbildung 10 haben wir nacheinander die Seilkurven aufgetragen. Die erste Kurve mit den ξ_G -Werten kommt unter der Erdanziehung zustande. Bei der zweiten Kurve mit den ξ'_G -Werten sind die Belastungen $m \xi'_G$ vorausgesetzt, bei der dritten Kurve $m \xi''_G$ usw. Die Annäherung ist für Schwingungen I. Ordnung immer konvergent. In unserem Fall, bei dem durch die ungleichmässige Lastverteilung ganz besonders ungünstige Verhältnisse angenommen sind, beträgt die Abweichung der Annäherungsrechnung (15) nach fünfmaliger Umzeichnung noch 1% . Man kann aber wesentlich rascher zum Ziel kommen, wenn man die erste Umzeichnung statt mit Belastungen $m \xi_G$ mit $m \xi_G^2$ oder bei sehr ungleichmässiger Lastverteilung sogar mit $m \xi_G^3$ durchführt. Die weiteren Annäherungsschritte müssen dann natürlich wieder mit Belastungen $m \xi_G$ fortgeführt werden. In Abbildung 11 ist die Annäherung eingetragen, die mit den einzelnen Schritten verbunden ist. Die Kurve mit den Kreuzen (Dreiecken)

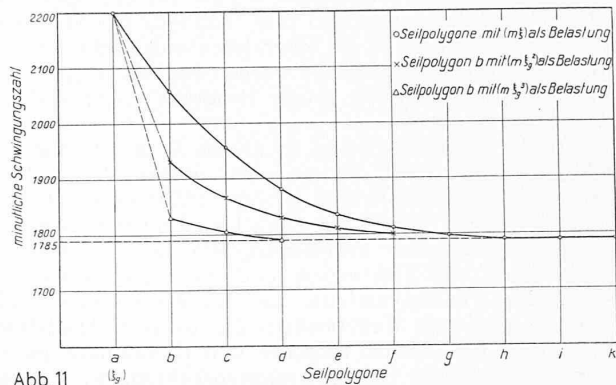


Abb. 11

bezieht sich darauf, dass der erste Schritt mit $m \xi_G^2$ (mit $m \xi_G^3$) zurückgelegt ist. Wie man sieht, hat man infolge dieses Kunstgriffes ($m \xi_G^3$) schon bei der ersten Umzeichnung nur noch eine Abweichung von $2,5\%$ von der wahren Schwingungszahl $n = 1785$ pro min. Die zweite Umzeichnung, bei der die Ordinaten ξ'_G der ersten Umzeichnung mit den zugehörigen m multipliziert die Belastungen des Seiles angeben, nähert sich dem wahren Ergebnis auf 1% an.

Der Vorteil der Verwendung der Gleichung (15) liegt darin, dass die mit ihrer Hilfe bestimmte Schwingungsdauer nicht von der Grösse der Ordinaten, sondern nur von der Form der Seilkurve abhängt. Man kann deshalb auch die erste Seilkurve schätzungsweise aufzeichnen, und die so erhaltenen Ordinaten für die weitere Annäherung verwenden. Wenn nur eine rohe Schätzung ohne weitere Annäherungsschritte gewünscht ist, dann hat Gleichung (9) den Vorzug vor Gleichung (15).