1.2. La contribution de F. Châtelet [1943a] [1943b] [1944].

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

lui-même et **H** l'algèbre des quaternions de Hamilton (Frobenius). Si k est un corps fini, toute algèbre simple centrale sur k est de la forme $M_r(k)$ (Wedderburn). Enfin, si k est un corps de nombres, et si $A \otimes_k k_v \simeq M_n(k_v)$ pour toute place v de k, alors $A \simeq M_n(k)$ comme k-algèbre (Brauer/Hasse/Noether, Albert). Par ailleurs, Skolem et Noether identifièrent le groupe des automorphismes d'une k-algèbre simple centrale A au quotient A^*/k^* (le groupe des unités A^* agissant par conjugaison intérieure). De son côté, Brauer organisa les classes d'algèbres simples centrales sur k en un groupe, dit depuis groupe de Brauer de k, via le produit tensoriel des algèbres, les algèbres « déployées » $M_n(k)$ étant considérées comme triviales. Ceci l'amena à introduire les « systèmes de facteurs », qui sont l'un des ancêtres de la cohomologie des groupes.

1.2. La contribution de F. Châtelet [1943*a*] [1943*b*] [1944].

Dans sa thèse [1944], François Châtelet généralisa aux variétés de Severi-Brauer tous les résultats connus pour les coniques :

Théorème. *Soient X et Y deux variétés de Severi-Brauer de dimension d sur le corps k.*

1) *Si $X(k)$ est non vide, alors X est k-isomorphe à $\mathbf{P}_k^d$.*

2) *Il existe un corps K contenant k et de degré $[K:k]$ divisant $(d+1)$ tel que $X(K)$ soit non vide.*

3) *Si L est une extension finie de k, $X(L)$ non vide et $[L:k]$ premier à $(d+1)$, alors X possède un k-point rationnel.*

4) *Si k est fini, X est k-isomorphe à $\mathbf{P}_k^d$.*

5) *Si k est un corps de nombres, et $X_{k_v} \simeq Y_{k_v}$ pour toute place v de k, alors X est k-isomorphe à Y.*

En particulier, si $X(k_v)$ est non vide pour chaque place v de k, alors X possède un k-point rationnel.

Quelle est la méthode de Châtelet? Pour reprendre le langage de sa thèse, il considère une extension galoisienne finie K/k de groupe G et une variété de (Severi-)Brauer de dimension d « admettant K comme corps de représentation » (les groupes profinis n'avaient pas encore fait leur apparition). A une telle variété est attaché un « système de matrices associées » (« Algèbre de Brauer de degré $d+1$ »). Enfin à une telle algèbre est attaché un « système de scalaires associés ».

En termes d'aujourd'hui, Châtelet s'intéresse aux classes d'isomorphismes de k-variétés X qui deviennent isomorphes à $\mathbf{P}_K^d$ sur K. Un calcul depuis bien connu (chez Châtelet, la relation caractérisant les 1-cocycles apparaît sous le nom de « relation de compatibilité ») associe à une telle k-variété une classe dans l'ensemble de cohomologie $H^1(G, \mathrm{Aut}_K(\mathbf{P}_K^d))$, et montre que deux telles k-variétés X et Y sont k-isomorphes si et seulement si elles ont même classe de cohomologie. En fait, comme $\mathbf{P}_k^d$ est une variété raisonnable, on sait que toute classe de cohomologie provient d'une variété de Severi-Brauer, ce que Châtelet semble avoir vu et qui fut plus tard démontré par Weil (1956).

Ce qui permet alors à Châtelet d'obtenir le théorème ci-dessus, c'est le double isomorphisme :

$\mathrm{Aut}_K(\mathbf{P}_K^d) \simeq PGL_{d+1}(K)$ (tout automorphisme de l'espace projectif est donné par une homographie)

$\mathrm{Aut}_K(M_{d+1}(K)) \simeq PGL_{d+1}(K)$ (Skolem-Noether).

Les « systèmes de matrices associés » ne sont autres que les 1-cocycles à valeurs dans $PGL_{d+1}(K)$; quant aux « systèmes de scalaires associés » à un tel 1-cocycle, c'est un 2-cocycle dont la classe de cohomologie dans le sous-groupe $H^2(G, K^*)$ du groupe de Brauer de k est obtenue à partir du 1-cocycle via la suite exacte G-équivariante de groupes :

$$1 \to K^* \to GL_{d+1}(K) \to PGL_{d+1}(K) \to 1 .$$

Le même principe général que plus haut, et dont, rappelons-le, Châtelet fut l'un des principaux inventeurs, dit que l'ensemble $H^1(G, PGL_{d+1}(K))$ classifie aussi les k-algèbres simples centrales de degré $d + 1$ qui sont déployées par passage au corps K. Châtelet obtient ainsi tous les résultats sur les variétés de Severi-Brauer à partir des résultats connus sur les algèbres centrales simples.

Le mémoire de 1944 contient un autre résultat, oublié jusqu'à sa remise au goût du jour par M. Artin en 1982 : F. Châtelet appelle « sous-variété normale » Y d'une variété de Severi-Brauer X une sous-variété fermée telle que $\bar{Y} \subset \bar{X} \simeq \mathbf{P}_{\bar{k}}^n$ soit un espace linéaire (ce qui ne dépend pas de l'isomorphisme choisi). Définissant $i(X)$ comme étant le plus petit des entiers r tels qu'il existe une sous-variété normale $Y \subset X$ de dimension $(r-1)$, Châtelet montre que $i(X)$ coïncide avec l'index (de la classe) d'une algèbre simple centrale associée à X par la correspondance ci-dessus (ceci généralise le point 1) du théorème).

Glissons ici un mot sur les articles de Châtelet consacrés à l'arithmétique des (hyper)quadriques (1948). Châtelet y examine d'un point de vue géométrique les transformations qui permettent de passer d'une quadrique non-singulière X de $\mathbf{P}^3$ à une conique de $\mathbf{P}^2$ définie sur l'extension discriminant et ainsi en particulier d'obtenir le principe de Hasse pour ces quadriques.

1.3. Après les travaux de Châtelet.

En 1949, B. Segre tout en rendant hommage au travail de Châtelet rappelle l'existence du travail de Severi (1932) qui avait échappé à l'attention de Châtelet, et indique en particulier que Severi par ses méthodes avait obtenu $(d+1)^d$ au point 2) du théorème ci-dessus. C'est dans cet article que Segre transforme les « variétés de Brauer » de Châtelet en « variétés de Severi-Brauer ». Convenons qu'il eut été plus juste de les appeler variétés de Severi-Châtelet.

Alors que la théorie de Châtelet insiste de façon très moderne sur l'isomorphie sans exceptions, Amitsur en 1955 refait la théorie d'un point de vue plus birationnel (corps de décomposition « générique » d'une algèbre centrale simple) et redémontre l'énoncé 2) du théorème ci-dessus. Il établit le résultat intéressant suivant: si X et Y sont deux k-variétés de Severi-Brauer k-birationnellement équivalentes, les classes $a(X)$ et $a(Y)$ qui leurs sont associées dans le groupe de Brauer de k engendrent le même sous-groupe. On ignore si la réciproque vaut. Le point de vue de l'ensemble de cohomologie $H^1(\mathrm{Gal}\,(K/k), PGL_{d+1}(K))$ réapparaît dans un article de Roquette (1963). Signalons aussi un article d'Amitsur (1981).

Le point de vue moderne sur les variétés de Severi-Brauer qui a été esquissé plus haut fut dégagé par Serre dans ses livres *Corps locaux* (1962) et *Cohomologie galoisienne* (1965). Après l'introduction des algèbres d'Azumaya, qui généralisent les algèbres simples centrales, le corps de base étant remplacé par un anneau commutatif (Azumaya 1951, Auslander/Goldman 1960), Grothendieck (1965) dans une série magistrale d'exposés sur le groupe de Brauer d'un schéma étudie les schémas de Severi-Brauer relatifs.

1.4. Importance des variétés de Severi-Brauer.

En arithmétique, les variétés de Severi-Brauer servent de référence dans l'étude des variétés rationnelles plus générales (une variété X est dite rationnelle si elle devient birationnellement équivalente (mais non nécessairement isomorphe) à l'espace projectif sur une extension finie de son corps de base.) Pour $d > 1$, aucune des propriétés du théorème ci-dessus ne vaut en général, mais on peut essayer de trouver des substituts. Nous reviendrons là-dessus au paragraphe 3.