§2. Représentations des algèbres de Hecke

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 2. Représentations des algèbres de Hecke

Dans toute la suite, on désignera par K l'extension quadratique de l'anneau k définie par

$$K = k[\lambda]/_{\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta}.$$

On posera également $\mu = \alpha - \lambda$. On a donc

$$\alpha = \lambda + \mu, \quad \beta = \lambda\mu,$$

et K est l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers en les variables λ et μ.

Soit n un entier positif. On désignera par X_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et l'on notera M le K-module librement engendré par l'ensemble F_n des fonctions de X_n dans $\mathbf{Z}$. Soit i un entier compris strictement entre 0 et n. On notera s_i l'application linéaire de M dans lui-même définie par:

$$\forall f \in F_n,\ s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{si} \quad f(i) = f(i+1) \\ (\lambda+\mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{si} \quad f(i) > f(i+1) \end{cases}$$

où ε_i désigne la permutation de X_n qui échange i et $i+1$.

Lemme 2-1. *Les endomorphismes s_i vérifient les formules suivantes:*

$$s_i^2 - \alpha s_i + \beta = 0,$$
$$\forall i, j < n,\ j > i+1 \Rightarrow s_i s_j = s_j s_i$$
$$j = i+1 \Rightarrow s_i s_j s_i = s_j s_i s_j.$$

Démonstration. La deuxième formule est évidente car les supports des permutations ε_i et ε_j sont disjoints. La première formule à vérifier sur une fonction f est évidente si f prend les mêmes valeurs en i et en $i+1$. Il y a donc essentiellement les cas $f(i) > f(i+1)$ et $f(i) < f(i+1)$ et chacun de ces cas se montre aisément. Quant à la dernière formule, il faut considérer, pour une fonction f de F_n, les différentes positions respectives de $f(i)$, $f(i+1)$, $f(i+2)$. Lorsque deux de ces nombres sont égaux, la formule est facile à vérifier. Sinon il reste à priori six cas à examiner. A ce stade il est plus facile de poser:

$$\forall a, b \in \mathbf{Z},\ a < b \Rightarrow [a, b] = 0 \quad <a, b> = \lambda$$
$$a > b \Rightarrow [a, b] = \lambda + \mu \quad <a, b> = -\mu.$$

On a alors, si $f(i)$ est différent de $f(i+1)$,

$$s_i(f) = [f(i), f(i+1)]f + <f(i), f(i+1)> f \circ \varepsilon_i .$$

Désignons par a, b et c les trois nombres $f(i)$, $f(i+1)$ et $f(i+2)$ que l'on suppose distincts. On vérifie les formules suivantes:

$$\begin{aligned} s_i s_j s_i(f) = {} & \big([a,b]^2[b,a] + [a,c] <a,b> <b,a>\big)f \\ & + \big([a,b]\,[b,c] <a,b> + [a,c]\,[b,a] <a,b>\big)f \circ \varepsilon_i \\ & + [a,b]\,[a,c] <b,c> f \circ \varepsilon_j + [a,b] <a,c> <b,c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b,c] <a,b> <a,c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a,b> <a,c> <b,c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \varepsilon_i , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j s_i s_j(f) = {} & \big([a,b]\,[b,c]^2 + [a,c] <b,c> <c,b>\big)f \\ & + \big([a,b]\,[b,c] <b,c> + [a,c]\,[c,b] <b,c>\big)f \circ \varepsilon_j \\ & + [a,c]\,[b,c] <a,b> f \circ \varepsilon_i + [a,b] <a,c> <b,c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \\ & + [b,c] <a,b> <a,c> f \circ \varepsilon_i \varepsilon_j \\ & + <a,b> <a,c> <b,c> f \circ \varepsilon_j \varepsilon_i \varepsilon_j . \end{aligned}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que les deux expressions sont égales quelles que soient les positions respectives des trois nombres a, b et c.

COROLLAIRE 2-2. *Il existe une représentation de l'algèbre H_n dans l'algèbre des endomorphismes de M, qui envoie les générateurs σ_i de H_n en l'endomorphisme s_i. De ce fait M devient un H_n-module.*

Soit φ une application à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. On appellera poids de φ le nombre $\sum_{p \in \mathbf{Z}} \varphi(p)$. Soit $M(\varphi)$ le sous-module de M (n étant égal au poids de φ) engendré par les fonctions f de F_n telles que

$$\forall p \in \mathbf{Z}, \quad \varphi(p) = \operatorname{card}\left(f^{-1}(p)\right).$$

PROPOSITION 2-3. *Pour toute fonction φ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, à support fini, le sous-module $M(\varphi)$ de M est un H_n-module.*

Démonstration. Evidente.

Soient $p < n$ des entiers strictement positifs. On notera Σ_p l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \ldots \sigma_i$, avec $1 \leqslant i \leqslant p$. Si i est égal à 1, cet élément est égal à 1. On notera S_n l'ensemble des éléments de H_n de la forme: $\tau_1\tau_2 \ldots \tau_n$, chaque élément τ_i appartenant à Σ_i. L'ensemble S_n possède $p!$ éléments. L'importance de cet ensemble provient du résultat classique suivant:

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre H_n est un k-module libre de base S_n.*

Démonstration. Soit $p \leqslant n$ un entier strictement positif. Notons, pour tout i compris entre 1 et p (au sens large), τ_i l'élément $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2} \dots \sigma_i$. Il est facile de vérifier les formules suivantes:

$$\forall i \leqslant p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si} \quad j < i-1 \\ \tau_j & \text{si} \quad j = i-1 \\ \alpha\tau_i - \beta\tau_{i-1} & \text{si} \quad j = i \\ \sigma_{j-1}\tau_i & \text{si} \quad j > i\,. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de H_n engendré par S_n est stable par multiplication à droite par tous les générateurs σ_i de H_n, ce qui prouve que H_n est engendré linéairement par S_n.

Soit maintenant φ l'application de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, de support $\{1, 2, ..., n\}$ et qui vaut 1 sur son support. Le K-module $M(\varphi)$ est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique $K[\mathfrak{S}_n]$. Soit f_0 l'inclusion de $\{1, ..., n\}$ dans $\mathbf{Z}$. La multiplication à droite par f_0 induit une application K-linéaire γ de $H_n \otimes K$ dans $M(\varphi)$. Si l'on tensorise ces modules par $\mathbf{Z}$ au-dessus de K, via le morphisme de K dans $\mathbf{Z}$ qui envoie λ et μ en 1 et -1, $H_n \otimes \mathbf{Z}$ devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$ ainsi que $M(\varphi)$ et γ devient l'identité. On en déduit que $\gamma(S_n)$ est une base de $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$ et un système libre de $M(\varphi)$. Ce qui prouve que S_n est une base de H_n.

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier $n > 0$, H_n est un H_{n-1}-module à gauche libre de base $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_{n-1}\sigma_{n-2} \dots \sigma_1\}$.*

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout $n > 0$, H_{n+1} est un H_n-bimodule isomorphe à $H_n \oplus H_n \underset{H_{n-1}}{\otimes} H_n$.*

Démonstration. L'isomorphisme provient de la stabilisation i de H_n dans H_{n+1} et de l'application de $H_n \times H_n$ dans H_{n+1} qui à (u, v) associe $i(u)\sigma_n i(v)$. L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le H_n-module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

§ 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit $n > 0$ un entier. Via la stabilisation i de H_n dans H_{n+1}, H_{n+1} est un H_n-bimodule. On peut donc considérer le module $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$, quotient de H_{n+1} par le sous-module engendré par les éléments de la forme: