Appendice: distribution de la fonction f

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPENDICE: DISTRIBUTION DE LA FONCTION f

THÉORÈME. *Pour qu'une mesure positive* μ *sur* $\mathbf{R}$ *soit la distribution d'une limite de martingale dyadique partout convergente (au sens de (3)) il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_{\mathbf{R}} |y| \, d\mu(y) < \infty \tag{8}$$

ou

$$\int_{\mathbf{R}-} |y| \, d\mu(y) = \int_{\mathbf{R}+} y \, d\mu(y) = \infty . \tag{9}$$

Preuve. Nous identifierons X et l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbf{R}$ où les points dyadiques autres que 0 et 1 sont dédoublés (voir (6) et (7)). Ainsi, une fonction continue sur X est une fonction continue sur $[0, 1]\backslash D$ (D est l'ensemble des points dyadiques) admettant des limites en 0 et en 1, et, en tout point de D autre que 0 et 1, une limite à droite et une limite à gauche. Considérons des cas de difficulté croissante

a) μ est portée par un intervalle $[a, b]$ et charge tout sous-intervalle de $[a, b]$. Soit f la fonction croissante sur $[0, 1]$ dont la distribution est μ. Comme f est continue sur $[0, 1]$, les espérances conditionnelles $f_n = E(f/\mathscr{T}_n)$ ($\mathscr{T}_n$ est la n-ième tribu dyadique) convergent uniformément vers f.

b) μ est portée par un intervalle $[a, b]$, et la fonction de répartition $\bar{\mu}(y) = \mu(-\infty, y)$ est dyadique sur les paliers (intervalles de constance) P_n. Elle est donc strictement croissante sur $[a, b]\backslash \cup P_n$ et applique cet ensemble dans $[0, 1]\backslash \cup \{p_n\}$, où $p_n \in D$. La fonction réciproque se prolonge en une fonction continue f sur X, et les espérances conditionnelles f_n convergent uniformément vers f sur X.

c) μ est portée par un intervalle $[a, b]$, et la fonction de répartition $\bar{\mu}(x)$ admet un palier unique P entre a et b, où sa valeur p n'est pas dyadique. Etant donné $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon < \inf(p, 1-p)$, choisissons $p_1 \in D$ tel que $|p_1 - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ et posons $p' = 2p - p_1$, puis choisissons $p_2 \in D$ tel que $|p_2 - p'| < \frac{\varepsilon}{2^2}$ et posons $p'' = 2p' - p_2$, et ainsi de suite. On obtient une suite $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ contenue dans D, convergente, telle que

$$p = \sum_1^\infty p_n 2^{-n} \tag{10}$$

et

$$|\lim p_n - p| < \varepsilon . \tag{11}$$

Désignons par ψ_n l'application de $[0, 1]$ sur $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ qui applique linéairement $[0, p]$ sur $[2^{-n}, 2^{-n}+p_n 2^{-n}]$ et $[p, 1]$ sur $[2^{-n}+p_n 2^{-n}, 2^{-n+1}]$, et désignons par φ_n l'application réciproque de ψ_n. Soit g la fonction croissante sur $[0, 1]$, définie et continue sauf en p, dont la distribution est μ. Chaque fonction $g \circ \varphi_n$ est prolongeable par continuité sur X, et sa fonction de répartition est $\psi_n(\bar{\mu}(.)-2^{-n})$. D'après (10) et (11) on a

$$\sum_1^\infty \psi_n(\bar{\mu}(.)-2^{-n}) = \bar{\mu}(.) \tag{12}$$

$$\lim 2^n \psi_n(\bar{\mu}(.)) = \psi(\bar{\mu}(.)), \tag{13}$$

où ψ est l'application de $[0, 1]$ sur lui-même qui applique linéairement $[0, p]$ sur $[0, \lim p_n]$ et $[p, 1]$ sur $[\lim p_n, 1]$. Posons

$$f = \sum_1^\infty g \circ \varphi_n \tag{14}$$

et remarquons que les supports des $g \circ \varphi_n$ constituent une partition de $X\backslash\{0\}$. D'après (12) la distribution de f est μ. Pour $m \leqslant n$ l'espérance conditionnelle $f_m = E(f/\mathscr{T}_m)$ est constante sur $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ et égale à la valeur moyenne de $g \circ \varphi_n$, qui est

$$\int y \, d(\psi_n \circ \bar{\mu})(y) .$$

En posant

$$f(0) = \int y \, d(\psi \circ \bar{\mu})(y)$$

f est limite des f_m en tout point, y compris 0.

d) μ est portée par un intervalle $[a, b]$. Choisissons un dénombrable dense dans $[0, 1]$, contenant 0, 1, et toutes les valeurs de la fonction de répartition $\bar{\mu}(.)$ sur les paliers; soit Δ ce dénombrable. Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Ordonnons Δ en commençant par 0 et 1, de façon quelconque ensuite, et définissons par induction suivant cet ordre une fonction γ_1 croissante sur Δ, appliquant Δ dans D, telle que $\gamma_1(0) = 0$, $\gamma_1(1) = 1$, et

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(p-q) \leqslant \gamma_1(p) - \gamma_1(q) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(p-q) \tag{15}$$

pour tout couple (p, q) d'éléments de Δ tels que $p > q$. Soit Δ' l'image de Δ dans l'application $p \to p' = 2p - \gamma_1(p)$, puis γ_2 une fonction croissante sur Δ', appliquant Δ' dans D, avec $\gamma_2(0) = 0$, $\gamma_2(1) = 1$, et

$$(16) \qquad \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(p'-q') < \gamma_2(p') - \gamma_2(q') < \left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)(p'-q')$$

pour tout couple (p', q') d'éléments de Δ' tels que $p' < q'$, et ainsi de suite. Il résulte de (15) (en choisissant $q=0$), que

$$| p' - p | = | \gamma_1(p) - p | < \frac{\varepsilon}{2}$$

et de (16), en posant $p'' = 2p' - \gamma_2(p')$, que

$$| p'' - p' | < \frac{\varepsilon}{4}$$

et ainsi de suite. A chaque $p \in \Delta$ correspondent deux suites $p^{(n)}$ et $p_n = \gamma_n(p^{(n-1)})$, qui convergent vers une même limite $\gamma(p)$ telle que $| \gamma(p) - p | \leqslant \varepsilon$ et telle que (10) ait lieu. A partir de là on construit les fonctions continues ψ_n appliquant $[0, 1]$ sur $[2^{-n}, 2^{n+1}]$ de façon que, pour chaque $p \in \Delta$,

$$\Psi_n(p) = 2^{-n} + p_n 2^{-n},$$

les fonctions réciproques φ_n et la fonction f comme en (14). De nouveau f est limite d'une martingale dyadique et f admet μ pour distribution.

e) μ vérifie (8). Quitte à translater μ, supposons $\int y \, d\mu(y) = 0$. Décomposons μ en une somme

$$(17) \qquad \mu = \sum_1^\infty \mu_n,$$

chaque μ_n étant à support compact $[a_n, b_n]$, avec $\mu_n(\mathbf{R}) = 2^{-n}$ et

$$(18) \qquad \int y \, d\mu_n(y) = 0.$$

A la normalisation près, l'hypothèse d) est vérifiée pour μ_n. Il existe donc une fonction $f^{(n)}$ portée par $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$, limite de martingale dyadique, admettant μ_n pour distribution. Remarquons que la valeur moyenne de $f^{(n)}$ est 0. Posons

$$f = \sum_1^\infty f^{(n)}. \tag{19}$$

Alors f est limite de martingale dyadique et sa distribution est μ.

f) μ vérifie (9). On la décompose encore sous la forme (17), on définit les $f^{(n)}$ et f par (19). La condition est la même, et la totale de f, f_0, est nulle. En remplaçant 0 par α dans le second membre de (18) ce qui est possible à cause de l'hypothèse (9), on obtient $f_0 = \alpha$. Le théorème est démontré.

Remarquons que la totalisation de la fonction f nécessite une seule étape dans les cas a), b), c), d), et qu'elle est pratiquement terminée à l'étape ω (K^ω est réduit à $\{0\}$) dans les cas e) et f).

Dans le cas f) on peut introduire un « arbre de distribution » permettant le calcul de f_0. Il s'agit de l'arbre des mesures $\mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}$ qui sont les distributions de f sur les cellules $C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Ainsi

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 0} + \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, 1} \\ \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(C(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)) = \mu_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}(X) = 2^{-n} \end{cases} \tag{20}$$

($n = 0, 1, \ldots$; $\varepsilon_j = 0$ ou 1). La condition (20) est nécessaire, mais elle n'est pas suffisante. La théorie de la totalisation dyadique montre que se trouve nécessairement dans l'arbre une infinité de mesures à supports compacts; la première étape de la totalisation consiste à remplacer ces mesures par des mesures ponctuelles ayant même masse et même centre de gravité; dans le nouvel arbre, on recommence l'opération, et ainsi de suite, transfiniment au besoin, jusqu'à obtenir un arbre stationnaire. Cet arbre stationnaire décrit alors la martingale dyadique (au niveau n, on obtient la distribution de f_n). Il serait intéressant de connaître la caractérisation des arbres de distributions des limites de martingales dyadiques.

Citations et pastiche

1. Si une part de mon œuvre mathématique vient a sauver mon nom de l'oubli, sans doute resterai-je l'analyste qui le premier a trouvé les moyens d'intégrer toute dérivée et de calculer les coefficients de toute série trigonométrique convergente de somme donnée.

Arnaud Denjoy
Notice sur les travaux scientifiques,
Paris, Hermann, 1934 (p. 5)