Bemerkung zu einer Arbeit von M. Vignati

Autor(en): **Unger, Georg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **48 (1993)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-44631

El. Math. 48 (1993)

0013-6018/93/030120-03$1.50 + 0.20/0

Bemerkung zu einer Arbeit von M. Vignati

Georg Unger

Georg Unger wurde 1909 in Stuttgart geboren. Nach Studien in Deutschland und in Zürich promovierte er 1941 bei P. Finsler über ein Thema aus der Differentialgeometrie. Nach 10jähriger Lehrtätigkeit an einem Privatgymnasium war er während 25 Jahren Leiter der Mathematisch-Astronomischen Sektion am Goetheanum in Dornach. Georg Unger ist Autor und Herausgeber von mehreren Büchern.

In der Arbeit von M. Vignati [1] ergab sich aus einer Überlegung über harmonische Funktionen das folgende rein geometrische **Resultat** (siehe Figur 1):

Man betrachte zu einem gegebenen Kreis Γ und einem inneren Punkt A die Kreise k durch A, welche Γ orthogonal schneiden. Dann gehen die zu den Schnittpunkten von k und Γ gehörigen Sehnen alle durch einen gemeinsamen Punkt A''.

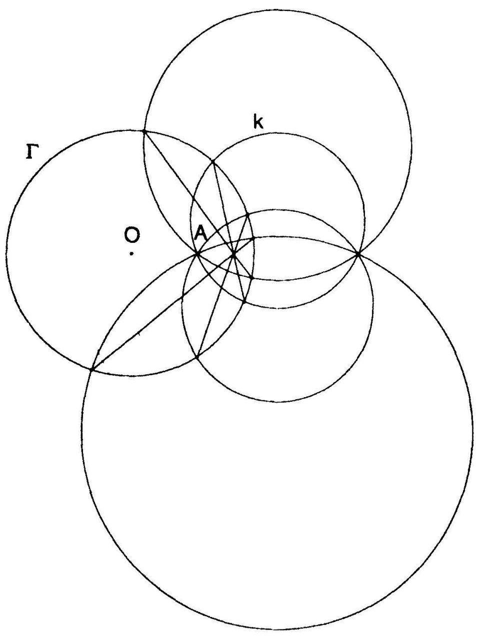

Fig. 1

Die kleine Arbeit von Georg Unger zeigt wieder einmal in aller Deutlichkeit, dass die kraftvollen Sätze der synthetischen Elementargeometrie, die schon wieder in Vergessenheit zu fallen drohen, einen grossen analytischen Rechenaufwand sehr elegant kompensieren können. Die zentrale Aussage, um die es hier geht, lässt sich auf einen Blick in einer Schliessungsfigur erfassen (siehe Figur 1): Das elliptische Kreisbüschel k wird vom Kreis Γ senkrecht geschnitten und alle von Γ erzeugten Sehnen laufen durch einen festen Punkt. *pg*

Es wurde in jener Arbeit die Frage nach einem elementargeometrischen Beweis dieses Resultates aufgeworfen. In der vorliegenden Note geben wir einen solchen Beweis und schliessen einige Bemerkungen zu den bekannten Modellen der hyperbolischen Ebene von Poincaré und Klein an.

Beweis Man projiziert Γ und A stereographisch auf die Kugel mit dem Äquator Γ aus dem Pol N (siehe Figur 2). Das Bild k' des Orthogonalkreises k von Γ durch A schneidet — wegen der Winkeltreue der Abbildung — Γ orthogonal. Der Kreis k' liegt also in einer vertikalen Ebene durch den Bildpunkt A' von A. Durchläuft k alle Orthogonalkreise von Γ durch A, so erhält man auf diese Weise ein Ebenenbüschel, dessen Schnitt mit der Ebene von Γ das fragliche Strahlenbüschel durch A'' erzeugt.

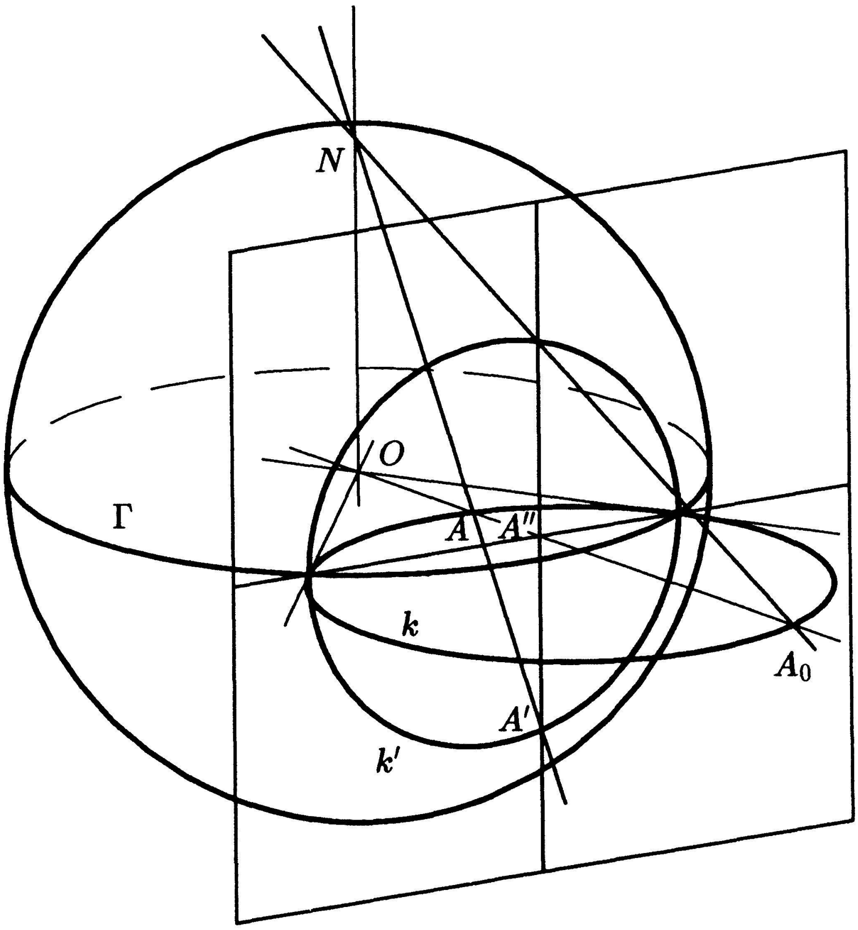

Fig. 2

Bemerkung 1 Die hier verwendete stereographische Projektion, gefolgt von einer orthogonalen Parallelprojektion zurück auf die Äquatorebene, wird verwendet bei der Umwandlung eines kreisförmigen Modells der hyperbolischen Ebene nach Poincaré, in welchem die in Γ liegenden Bögen von Orthogonalkreisen die nicht-euklidischen Geraden sind, in ein Modell nach Klein mit den offenen Strecken im Innern des Kreises als Bilder der nicht-euklidischen Geraden.

Die Figur bestehend aus Γ, A und dem orthogonalen Bild A'' von A', stellt also die Superposition eines ebenen Strahlenbüschels der hyperbolischen Geometrie in den Modellen von Poincaré und Klein dar.

Bemerkung 2 Der planimetrische Beweis kann so geführt werden: Die Sehnen der Orthogonalkreise k von Γ sind die Polaren von O bezüglich der Kreise k. Die Orthogonalkreise bilden ein Kreisbüschel durch A und seinen bezüglichen Γ inversen Punkt A_0. Der Schnittpunkt einer Polare mit der Geraden O, A, A_0 ist daher der vierte harmonische Punkt zu O bezüglich A, A_0 und somit fest.

Literatur

[1] Vignati, M.: A geometric property of functions harmonic in a disk, El. Math. 47 (1992) 33–38.

Georg Unger
Mathematisch-Physikalisches Institut
Dorneckstrasse 15
CH-4143 Dornach