

Grundlagen zur Beurteilung von Aussenwänden für den sommerlichen Wärmeschutz

Autor(en): **Sagelsdorff, R. / Stähli, U.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **95 (1977)**

Heft 10

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-73346>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Grundlagen zur Beurteilung von Aussenwänden für den sommerlichen Wärmeschutz

Von R. Sagelsdorff und U. Stähli, EMPA Dübendorf

1. Zusammenfassung

Die Verfasser erläutern zwei verschiedene instationäre Kennwerte von Wänden. Es zeigt sich, dass solche Kennwerte allein keine Aussagen über das Raumklima ermöglichen können. Sie dienen lediglich dem Vergleich verschiedener Wandtypen.

Die Unterschiede zwischen den Rechenverfahren nach Eichler und nach Heindl werden aufgezeigt. Die Dämpfung, die nach dem Eichler-Verfahren errechnet wird, eignet sich nicht als Kennwert für die Charakterisierung einer Wand. Das Heindl-Verfahren hingegen liefert Kennwerte, die für den Variantenvergleich von Wandkonstruktionen empfohlen werden können. Die Grenzwerte, die für eine bestimmte Bauweise und Gebäudeorientierung einzuhalten sind, werden im Verlaufe unserer weiteren Arbeit vorgeschlagen. Es bestätigt sich aber, dass Aussenwände mit raumseitigen, massiven Schichten das Raumklima günstig beeinflussen.

2. Einleitung

Es ist heute modern, über die Trägheit, d.h. die Wärmespeicherfähigkeit der Gebäudehülle zu sprechen und entsprechende Kennwerte zu fordern oder anzugeben. Leider ist man sich dabei meistens nicht bewusst, was solche Begriffe bedeuten, für welche Zustände sie aussagefähig und für welche Bedingungen sie überhaupt nicht massgebend sind.

Im folgenden sollen deshalb einige Begriffe erläutert und zwei heute übliche «Berechnungsverfahren» einander gegenübergestellt und Vergleiche gezogen werden. Die Formeln sind im Anhang zusammengestellt, der für die mathematisch interessierten Leser gedacht ist. Für eine eingehendere Darstellung verweisen wir auf die Literaturquellen [1] und [2].

Von einem «trägen» Verhalten der Gebäudehülle verspricht man sich allgemein:

– grössere Behaglichkeit

Äussere Klimaschwankungen wirken sich im Raum weniger aus. Das kann sich beispielsweise darin äussern, dass die Raumlufttemperatur nur wenig schwankt (also kein «Barackenklima») oder dass die innere Oberflächentemperatur sich nur geringfügig ändert (also kein «Backofen»);

– Heizenergieeinsparungen

Die von der Gebäudehülle im Laufe des Tages aufgenommene Sonnenenergie trägt nachts zur Heizung bei. Da die Sonnenstrahlung in einer Zeit auftritt, in der es ohnehin warm ist, kann sie nur dann genutzt werden, wenn sie bis in die kühlen Abendstunden gespeichert wird. Heizenergieeinsparungen sind daher vor allem in Übergangszeiten mit schon erheblichen Strahlungsintensitäten zu erwarten.

– kleinere Dimensionierung der Kühlanlage

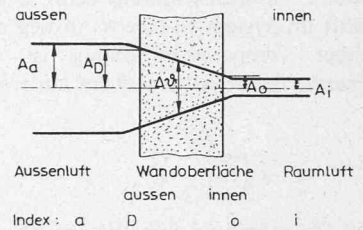
Äussere Belastungsspitzen werden vermindert und verzögert im Gebäudeinnern wirksam.

Wie träge eine Gebäudehülle nun ist, wird mit Hilfe von instationären Kennwerten angegeben.

3. Instationäre Kennwerte

Betrachten wir die Verhältnisse bei einer Aussenwand. Wir wollen dabei periodische Vorgänge voraussetzen, also z. B.

Tagesschwankungen, die alle 24 h wiederkehren. Es entstehen folgende Schwankungen der Temperatur:



Wovon hängen diese Temperaturamplituden nun ab?

Aussentemperaturamplituden A_a

Damit ist nicht nur die eigentliche Lufttemperatur gemeint, sondern es wird oft auch der Einfluss der Sonnenstrahlung berücksichtigt. Man spricht dann von einer «Sonnenlufttemperatur». Diese wird so bestimmt, dass sich mit dem normalen Wärmeübergangskoeffizienten α_a die richtige Oberflächentemperatur der Wand ergibt. Die Amplitude einer solchen fiktiven Aussenlufttemperatur A_a ist damit eine Funktion von:

- Schwankung der reinen Lufttemperatur ($\Delta \vartheta_a$)
- Farbe und Material der Wandoberfläche (ε)
- Intensität der Sonnenstrahlung (G)
- Orientierung der Wand (γ)

Innentemperaturamplituden A_i

Hier wirken sich neben dem Betrieb des Gebäudes die Wandeigenschaften und vor allem die Sonnenstrahlung aus, die durch Fenster direkt in den Raum gelangt. Die Amplitude der Innentemperatur steht also in Abhängigkeit von:

- Heizung (H) oder Kühlung (K)
- Luftwechselzahl (n)
- Speicherfähigkeit (S) der Innenbauteile sowie des Mobiliars
- Fensterflächenanteil (f) und Sonnenschutz (SF)
- Wandeigenschaften (W) und Wärmeübergangskoeffizient (α_i)

Diese Einflüsse sind natürlich auch für die Oberflächentemperaturschwankungen A_o bestimmend.

Das Verhältnis der Aussentemperatur- zur Innentemperaturamplitude kann durchaus als aussagekräftiger Kennwert für das instationäre Verhalten angesehen werden. Soll nun im speziellen Fall ein Amplitudenverhältnis

$$v = \frac{A_a}{A_o} = \frac{\text{fiktive Aussenlufttemperatur-Amplitude}}{\text{innere Wandoberflächentemperatur-Amplitude}}$$

berechnet werden, so wird dieses von vielen Faktoren abhängig, nämlich:

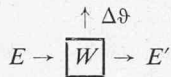
$$v = f(\Delta \vartheta_a, \varepsilon, G, \gamma, K, n, S, f, SF, W, \alpha_i)$$

Eine derartige Rechnung für einen gegebenen Raum bedingt den Einsatz eines Grosscomputers mit entsprechenden finanziellen Konsequenzen und kommt für die Praxis kaum in

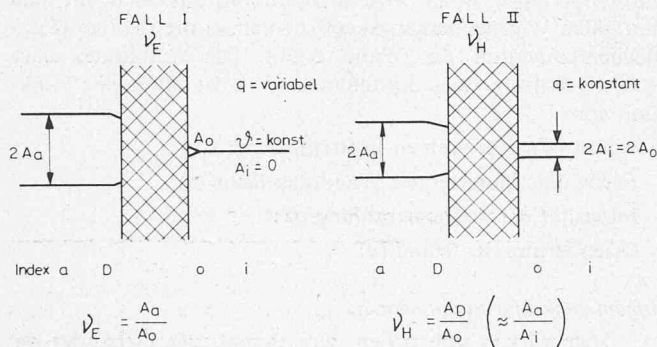
Frage. Eine Beschränkung auf spezifische Wandeigenschaften wird notwendig. Als eigentlicher Wandkennwert kommt nur ein

$$v = f(W)$$

in Betracht. Aber auch in diesem Fall ist es unumgänglich, die Randbedingungen zu berücksichtigen. Ein kleines Beispiel soll die Problematik um die Randbedingungen aufzeigen. Denken wir uns eine Wand mit dahinter liegender Luft als Teil einer Regelstrecke. Von aussen kommt Energie auf das System zu. Dies kann in natura z.B. eine höhere Lufttemperatur oder direkte Sonnenstrahlung sein. Diese ankommende Energie führt im System zu einem Anstieg der Temperatur. Das Mass dieser Temperaturerhöhung ist davon abhängig, wieviel Energie dem System auf der anderen Seite entzogen wird.



Je grösser dieser Wärmeabfluss, desto kleiner sind die Temperaturschwankungen und umgekehrt. Es liegt somit auf der Hand, dass die Temperaturschwankungen von der Randbedingung, d.h. von der Grösse des Wärmeabflusses, abhängig sind. Temperaturänderungen sind ja immer mit Wärmeabflussänderungen gekoppelt. So stehen heute zwei *Grenzfälle* im Vordergrund, die auch zu zwei verschiedenen Temperaturamplituden-Verhältnissen führen:



Die beiden Fälle entstehen durch verschiedene Randbedingungen. Im *Fall I* macht sich die Wärmebelastung von aussen nur in einer Änderung des Wärmeflusses q innen bemerkbar. Die Innentemperatur wird als konstant vorausgesetzt (also z.B. klimatisierte Räume). Die Amplitude der Innentemperatur ist somit gleich Null und das Amplitudenverhältnis aussen—innen geht gegen unendlich. Um realistische Werte zu erhalten, muss man das Verhältnis, oder wie man auch sagen kann, die Dämpfung der Amplitude äussere—innere Oberfläche bilden. Im *Fall II* führt die äussere Energiezufuhr lediglich zu einer Temperaturänderung. Die Wärmeflussamplitude innen ist Null, d.h. es wird mit konstanter Leistung geheizt oder gekühlt. Die genaue Herleitung der beiden Temperaturamplituden-Verhältnisse oder Dämpfungen ist im Anhang aufgeführt.

Die Praxis liegt meistens zwischen diesen beiden mathematischen Grenzfällen. Der Fall I mit einer konstanten Temperatur im Raum entspricht, wie erwähnt, am ehesten einem klimatisierten Gebäude, wo ja der anfallende Wärmefluss von der Klimaanlage «geschluckt» wird. Auch für Wohnungen mit massiven Innenbauteilen und schwerem Mobiliar, das den Wärmefluss auch «aufsaugt», dürfte Fall I noch zutreffen. Fall II, ohne Änderung des Wärmeflusses, hingegen gilt am ehesten für ein modernes Verwaltungsgebäude ohne grosse Möblierung und leichten Trennwänden. Wie man sieht, spielt somit der *Raum* hinter der Wand mit eine entscheidende Rolle.

4. Berechnung der instationären Kenngrössen

Ausgangspunkt der Rechnung bildet die Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung. Sie ist explizit nur lösbar, wenn man sich auf periodische Lösungen beschränkt. Das Resultat gilt also exakt nur für den eingeschwungenen Zustand, was nach einigen Tagen gleicher Wetterlage der Fall sein dürfte. Abrupte Wetterumstürze können nicht erfasst werden. Dies ist allerdings nicht so schlimm, dienen doch «Kennwerte» lediglich dem Vergleich verschiedener Wandtypen, für die dieselben Bedingungen gelten.

Heute stehen zwei Verfahren zur Berechnung instationärer Kenngrössen im Vordergrund. Einmal ist das *Eichler*-Verfahren zu nennen, das auf eine Theorie von Sklover zurückgeht [1]. Die Arbeit von Sklover war uns leider nicht zugänglich. Wir mussten uns daher mit den etwas undurchsichtigen Näherungsformeln Eichlers begnügen. Die Eichler-Rechnung liefert aber *nur* die Temperaturamplitudendämpfung v_E gemäss Fall I. Nähere Einzelheiten sind aus dem Anhang ersichtlich.

Mathematisch sauber, mit exakt definierten Randbedingungen bietet sich das Verfahren nach *Heindl* als zweite Möglichkeit an. Heindls Verfahren ist allgemein gehalten. Er bezieht im Gegensatz zu Eichler auch den Wärmefluss in seine Rechnung ein und erhält neben Verhältnissen von Temperaturamplituden auch Beziehungen zwischen Wärmeflussamplituden. Heindl fasst die Wandkennwerte in einer sogenannten Wandmatrix zusammen, was bei der Berechnung mehrschichtiger Wände von Vorteil ist. Genauere Angaben müssen dem Anhang oder der Originalarbeit Heindls entnommen werden [2].

Beiden Verfahren eigen ist der relativ grosse Rechenaufwand, der vor allem bei mehrschichtigem Aufbau betrieben werden muss. Die notwendigen Matrizenmultiplikationen sind zeitaufwendig. An der EMPA wurde deshalb ein kleines Rechenprogramm zur Ermittlung instationärer Kennwerte entwickelt. Die Möglichkeit zur Benützung des EMPA-Programms steht allen interessierten Kreisen offen.

5. Gegenüberstellung

Bei der Beurteilung der beiden Verfahren muss man sich bewusst sein, welche Randbedingungen der Rechnung zugrunde liegen. Das Eichler-Verfahren gilt *nur* für Randbedingungen gemäss Fall I. Das allgemeinere Verfahren von Heindl liefert Dämpfungen bei Randbedingungen gemäss Fall II, obwohl man, wie im Anhang gezeigt, auch mit den Eichlerschen Randbedingungen rechnen kann. Welches Verfahren im speziellen Fall relevantere Ergebnisse liefert, hängt daher weitgehend vom vorhandenen Raum und seiner Ausstattung ab. Dem Eichler-Verfahren sind jedoch einige Besonderheiten eigen, die noch der Erläuterung bedürfen.

Eichler setzt eine konstante Raumlufttemperatur voraus. Offensichtlich sind die Schwankungen der inneren Oberflächentemperatur somit sehr stark vom Wärmedurchgangswiderstand, mithin vom k -Wert der Wand abhängig. Je besser der k -Wert, desto kleiner werden die möglichen Temperaturschwankungen auf der inneren Oberfläche. Besonders deutlich wird dies bei extrem leichten Wandaufbauten, die in der Regel eine vorzügliche Wärmeisolation besitzen. Die Dämpfungen v_E , die sich für derartige Leichtbauten errechnen lassen, sind wenig sinnvoll für eine allgemeine Beurteilung. Des weiteren errechnet Eichler die Oberflächentemperatur aus dem Wärmefluss mit Hilfe des Wärmeübergangskoeffizienten α_i . Es spielt deshalb (siehe Bild 1) eine grosse Rolle, wie gross man den Koeffizienten α_i annehmen will.

In Tabelle 1 sind verschiedene Wandkonstruktionen nach Eichler (v_E für Fall I) sowie nach Heindl (v_H für Fall II) durchgerechnet. Die Werte nach Eichler wurden mit seiner Nähe-

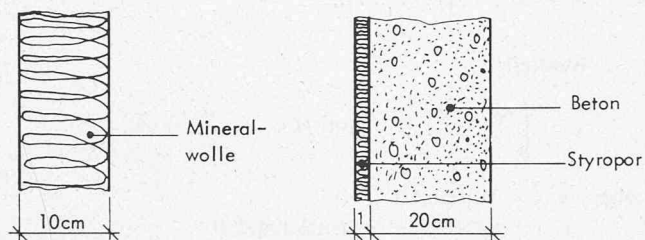
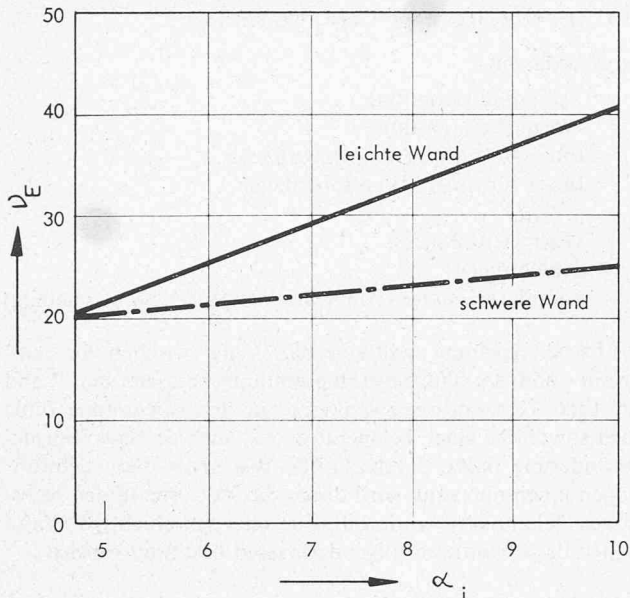


Bild 1. Dämpfung v_E in Funktion von α_i ; Querschnitt links: leichte Wand; Querschnitt rechts: schwere Wand

rungsmethode, die ja viel angewendet wird, berechnet. Um die beiden Werte miteinander vergleichen zu können, wurden die Heindl-Werte in den Beispielen als Dämpfung A_a/A_0 unter Berücksichtigung von α_a bestimmt. Wie erwartet, liegen die Dämpfungen v_E nach Eichler bedeutend über den Amplitudenverhältnissen v_H nach Heindl. Gewaltige Differenzen stellen sich bei den extrem leichten, gut isolierenden Konstruktionen ein. Versuche, die gegenwärtig im Rahmen einer Forschungsarbeit im Auftrag der Stiftung für wissenschaftliche und systematische Forschung der Zementindustrie an der EMPA durchgeführt werden, zeigen aber, dass derart leichte Bauelemente keine eigentliche Dämpfung bringen.

Die Rechenbeispiele demonstrieren sehr deutlich die Abhängigkeit der Dämpfung von der Wandmasse. Wie Bild 2 zeigt, existiert praktisch ein linearer Zusammenhang bei aussenliegender Wärmedämmung und bei annähernd gleichem k -Wert.

Für diesen Fall gilt:

$$v_H \approx 0,16 \cdot G \quad k \approx 0,4 \text{ kcal/m}^2 \text{ h K}$$

Wärmedämmung aussen

wobei G die Masse der Wand in kg/m^2 bezeichnet. Um den Einfluss der Schichtanordnung zu verdeutlichen, wurden einige Wände auch mit innenliegender Dämmschicht durchgerechnet. Die Dämpfung v_H nach Heindl sinkt nun auf einen unbedeutenden Wert, während die Eichler-Werte nur in bescheidenem Umfang abnehmen. Hier ist die grosse Abhängigkeit der Eichler-Rechnung vom k -Wert spürbar.

Immerhin, es muss beeindruckend, wie wichtig die Anordnung der Dämmschicht auf der Aussenseite für ein behagliches Wohnklima im Sommer ist. Nur die «isolierte Masse» bringt

Tabelle 1. Beispiele

Wandkonstruktion	Masse (kg/m ²)	Amplitudendämpfung		k-Wert	
		v_E	v_H	(kcal/m ² hK)	(W/m ² K)
AUSSEN 10cm PS-Hartschaum INNEN	3	22,7	1,1	0,28	0,33
0,1cm Stahl 8cm PS-Hartschaum 0,1cm Stahl	18	18,7	1,3	0,34	0,40
2cm Holzwanneplatte 8cm PS-Hartschaum 2cm Holzwanneplatte	18	23,1	3,7	0,30	0,35
1cm Putz 5cm PS-Hartschaum 10cm Holzwanneplatte 2cm Gips	78	58,1	19,0	0,32	0,37
1cm Putz 20cm Gasbeton 2cm Gips	146	24,1	7,2	0,62	0,72
20cm Backstein 5cm PS-Hartschaum	270	60,6	5,6	0,42	0,49
5cm PS-Hartschaum 20cm Backstein	270	68,7	44,0	0,42	0,49
30cm Leccabeton	300	53,5	20,4	0,69	0,80
20cm Kalksandstein 6cm PS-Hartschaum	362	60,7	4,8	0,41	0,47
6cm PS-Hartschaum 20cm Kalksandstein	362	72,0	59,0	0,41	0,47
20cm Beton	490	7,5	5,3	2,6	3,0
20cm Beton 6cm PS-Hartschaum	492	75,5	5,4	0,42	0,49
6cm PS-Hartschaum 20cm Beton	492	93,0	77,0	0,42	0,49
5cm Beton 6cm PS-Hartschaum 20cm Beton	615	157,6	103,0	0,41	0,48

Tabelle 2. Rechenwerte der Materialien in Tabelle 1

Material	Rohdichte kg/m ³	Wärmeleitfähigkeit W/m K	Wärmeleitfähigkeit kcal/h m K	spez. Wärmekapazität c	
				k J/kg K	kcal/kg k
PS-Hartschaum	30	0,035	0,03	1,47	0,35
Stahl	7850	58	50	0,42	0,1
Holzwanneplatte	400	0,1	0,09	2,10	0,5
Putz	1800	1,05	0,9	1,05	0,25
Gips	900	0,23	0,2	0,84	0,2
Gasbeton	550	0,19	0,16	1,05	0,25
Backstein	1350	0,52	0,45	0,92	0,22
Kalksandstein	1800	1,05	0,9	0,92	0,22
Lecabeton	1000	0,29	0,25	1,05	0,25
Beton	2450	1,63	1,4	1,05	0,25

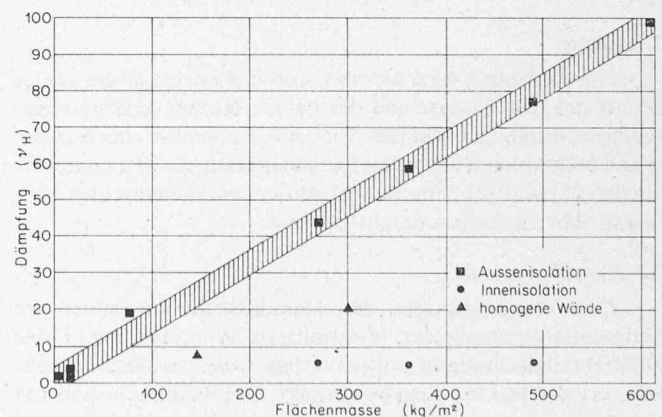


Bild 2. Dämpfung v_H in Funktion der Wandmasse

einen Zuwachs an Dämpfung. Diese Tatsache geht auch aus Bild 2 hervor. v_H -Werte für Bauteile, die sowohl isolieren wie auch Masse besitzen, liegen unter dem schraffierten Bereich. Die «isolierte Masse» beträgt bei Backsteinmauerwerken und Gasbetonwänden nur einen Teil der Gesamtmasse. Anders die aussen isolierten Betonwände; hier steht die ganze Masse hinter der Wärmedämmschicht. Die Dämpfung kommt damit in den schraffierten Bereich zu liegen. Wird vor die Isolation noch eine massive Sichtbetonfassade gehängt, so bringt diese unisolierte Masse keinen wesentlichen Gewinn an Dämpfung mehr.

6. Schlussfolgerungen

Das Raumklima hängt nur zu einem Teil von der Aussenwandkonstruktion ab. Andere Einflüsse, wie Sonnenschutz und Fensterfläche beeinflussen das Innenklima mindestens ebenso sehr. Instationäre Kennwerte können aber nicht zum Ziele haben, das Raumklima vorauszusagen, sondern sie dienen nur dem Vergleich verschiedener Wandkonstruktionen.

Welches Verfahren angewendet werden soll, hängt grundsätzlich von den Randbedingungen ab, die im konkreten Fall vorherrschen. Wir möchten aber davon abraten, mit der Näherungsformel von Eichler zu rechnen. Zum einen ist sie ziemlich ungenau und täuscht zu grosse Dämpfungen vor. Zum anderen wird das Resultat stark beeinflussbar durch den Übergangskoeffizienten α_i . Die hohen Dämpfungswerte nach Eichler ($v_E = A_a/A_0$ für Fall I) ergeben sich nicht aufgrund einer Wandeigenschaft, sondern sind eine Folge der «günstigen» Randbedingungen. Solche Kennwerte sind aber für eine Beurteilung kaum geeignet.

Will man das instationäre Verhalten einer Wand durch einen einzigen Kennwert charakterisieren, so steht dafür das Amplitudenverhältnis nach Heindl ($v_H = A_D/A_0 \simeq A_a/A_0$ für Fall II) im Vordergrund. Es gibt das eigentliche Wärmespeichervermögen der Wand besser wieder und lässt sich mathematisch auch sauberer berechnen.

Für den Planenden ergibt sich nun das Problem, wie gross denn die Dämpfung sein soll, um ein angenehmes Sommerklima zu gewährleisten. Die heute in der Literatur angegebenen Grenzwerte basieren meist auf der Randbedingung gemäss Fall I, beziehen sich also auf v_E . Zulässige bzw. empfohlene Werte für v_H nach Heindl müssen erst noch festgelegt werden. Beim jetzigen Stand unserer Kenntnisse ist es aber verfrüht, irgendwelche Dämpfungswerte zu empfehlen. Dies wird Ziel unserer künftigen Arbeit sein. Wir schlagen dazu vor, dass für eine bestimmte Gebäudeart (Bauweise) und Orientierung der Wand, die erforderliche Dämpfung in Funktion der Fensterfläche und des Sonnenschutzes angegeben wird:

$$v_{erf} = f(SF, f)$$

7. Anhang

Die Rechnung wird hier nur soweit wiedergegeben, wie es bedarf um den Unterschied der beiden Rechenverfahren aufzuzeigen. Einfachheitshalber wird auch nur eine *einschichtige* Wand betrachtet. Genauere Angaben müssen aus den Literaturquellen [1] und [2] entnommen werden, wo die einzelnen Verfahren sehr viel besser dargestellt sind.

7.1 Heindl-Methode

Den Ausgangspunkt der Heindl-Rechnung bildet die Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung. Diese Differentialgleichung ist explizit lösbar, wenn man sich auf zeitlich periodische Lösungen beschränkt. Das Resultat präsentiert sich sehr einfach, falls nur Schwankungsgrössen (Amplituden) von Interesse sind:

$$(1) \quad A_D = A_0 [\cosh w] + A_0' [1/G \sinh w]$$

Dabei bedeuten:

- A = Temperaturamplitude
- A' = Wärmeflussamplitude
- D = Index für äussere Wandoberfläche
- 0 = Index für innere Wandoberfläche
- $G = w \cdot \lambda / d$
- λ = Wärmeleitfähigkeit
- d = Schichtdicke
- w = komplexer Faktor (von Materialeigenschaften abhängig)

Diese Gleichung stellt eine Beziehung zwischen der Temperatur- und der Wärmestromamplitude beidseits der Wand dar. Eine Temperaturschwankung auf der Aussenseite führt innen sowohl zu einer Temperatur- wie auch zu einer Wärmeflussänderung (siehe 3. Abschnitt). Wie gross diese Schwankungen innen nun sind, wird durch die Faktoren in den rechteckigen Klammern bestimmt. Für eine einschichtige Wand können diese Faktoren folgendermassen bestimmt werden:

$$(2) \quad w = (1 + i) \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho \cdot c \cdot d^2}{2l \cdot \lambda}}$$

Realteil:

$$x = \sqrt{\frac{\pi \cdot \rho \cdot c \cdot d^2}{2l \cdot \lambda}} \quad \text{und} \quad H = x \cdot \frac{d}{\lambda}$$

- wobei: ρ = Rohdichte
- c = spezifische Wärmekapazität
- $2l$ = Periodendauer (24 h)

Für die Rechnung mit einem Taschenrechner, der die hyperbolischen Funktionen nicht enthält, verwendet man folgende Beziehung:

$$(3) \quad \cosh x = 1/2 (e^x + e^{-x})$$

$$(4) \quad \sinh x = 1/2 (e^x - e^{-x})$$

Jetzt können wir zur Gleichung (1) zurückkehren. Wir suchen ja das Verhältnis der Aussen- zur Innentemperaturamplitude. Dies ist aber nur möglich, falls wir Randbedingungen einführen. Die Randbedingung gemäss Fall II besagt, dass der Wärmefluss an der inneren Oberfläche konstant ist, die Wärmeflussamplitude mithin verschwindet. Damit geht Gleichung (1) für die Randbedingung II über in

$$(5) \quad A_D = A_0 [\cosh w] + 0$$

Das Temperaturamplituden-Verhältnis wird somit:

$$(6) \quad \frac{A_D}{A_0} = \cosh w$$

Diese Dämpfung ist komplexer Natur; sie beinhaltet neben dem Betrag der Dämpfung auch noch Informationen über die zeitliche Verzögerung. Wenn wir uns hier nur für die Grösse der Dämpfung interessieren, können wir schreiben:

$$(7) \quad \left| \frac{A_D}{A_0} \right| = |\cosh w|$$

Der absolute Betrag einer komplexen Zahl ist wieder eine reelle Zahl. Gleichung (7) wird reell zu:

$$(8) \quad \left| \frac{A_D}{A_0} \right| = \sqrt{\cosh^2 x \cdot \cos^2 x + \sinh^2 x \cdot \sin^2 x}$$

Für grosse x (reelle Zahl), z. B. $x > 1$ gilt näherungsweise

$$(9) \quad \cosh x = \sinh x \simeq \frac{1}{2} e^x$$

so dass Gleichung (8) durch die einfache Formel

$$(10) \quad \left| \frac{A_D}{A_0} \right| \simeq \frac{1}{2} e^x$$

ersetzt werden kann. Das ist nun die Temperaturamplitudendämpfung nach Heindl für eine einschichtige Wand unter Randbedingung II.

7.2 Eichler-Methode

Eichler gibt in seinem Buch (S. 76) nur die Formel für die Temperaturamplitudendämpfung an:

$$(11) \quad v = 0,9 \cdot e^x \frac{(S + \alpha_i)(S + \alpha_a)}{2 S \alpha_a}$$

wobei $S = \sqrt{2} H$ entspricht.

Es wird weder die Randbedingung erwähnt, die zu diesem Ergebnis führt, noch wird der Rechengang dargelegt. Man erfährt bloss, dass diese Formel eine starke Vereinfachung darstellt und einige Eigenheiten habe.

Im Bericht haben wir erklärt, die Dämpfung v_E nach Eichler gelte nur für die Randbedingung einer konstanten Innentemperatur (Fall I). Diese Behauptung wollen wir nun beweisen. Wir führen die Rechnung mit der Heindl-Methode auch für den Fall I durch. Gehen wir wieder zu Gleichung (1) zurück. In diesem Fall einer konstanten Innentemperatur werden die Innentemperaturschwankungen natürlich zu Null und von Gleichung (1) verbleibt noch:

$$(12) \quad A_D = A_0' \left[\frac{1}{G} \sinh w \right]$$

Eine Temperaturamplitudendämpfung lässt sich jetzt nicht mehr errechnen, wohl aber das Verhältnis der Temperaturamplitude aussen zur Wärmestromamplitude innen:

$$(13) \quad \frac{A_D}{A_0'} = \frac{1}{G} \sinh w$$

Dieses Verhältnis zeigt, wie sich der Wärmestrom (Leistung der Klimaanlage) ändert, wenn an der Aussenseite die Temperatur erhöht wird.

Ein kleiner Kunstgriff ermöglicht es aber auch, die Temperaturamplitudendämpfung aus (12) zu ermitteln. Man benützt dazu die Definition des Wärmeübergangskoeffizienten α_i , die besagt:

$$(14) \quad A_0 = \frac{1}{\alpha_i} A_0'$$

Einsetzen von (14) in (13) liefert:

$$(15) \quad \frac{A_D}{A_0} = \alpha_i \left[\frac{1}{G} \sinh w \right]$$

Wenn wir das Resultat dieser Rechnung mit der Heindl-Methode mit dem Ergebnis der Eichler-Rechnung vergleichen wollen, müssen wir aber auch den Einfluss der Übergangskoeffizienten α_a und α_i in Rechnung stellen. Die Berücksichtigung mittels Matrizenrechnung ergibt:

$$(16) \quad \frac{A_a}{A_0} = \alpha_i \left[\frac{1}{G} \sinh w + \frac{1}{\alpha_i} \cosh w + \frac{1}{\alpha_a} \cosh w + \frac{G}{\alpha_i \alpha_a} \sinh w \right]$$

Dies ist das Ergebnis der Heindl-Rechnung für den Fall einer konstanten Innentemperatur (mit Einbezug der Wärmeübergangskoeffizienten). Wie im 1. Beispiel lässt sich die Rechnung vereinfachen, wenn man sich nur für den Betrag dieser komplexen Grösse interessiert.

Für grosse x gilt nämlich näherungsweise:

$$(17) \quad \cosh x \simeq \frac{1}{2} l^x$$

$$(18) \quad \frac{1}{H} \sinh x \simeq \frac{1}{\sqrt{2} H} \cdot \frac{1}{2} e^x$$

$$(19) \quad H \sinh x \simeq \sqrt{2} H \cdot \frac{1}{2} e^x$$

Einsetzen in (16) und Bildung des Absolutbetrages liefert nach einiger Umformung die Dämpfung:

$$(20) \quad v_E = \left| \frac{A_a}{A_0} \right| \simeq \frac{1}{2} e^x \left[\frac{\alpha_i}{\sqrt{2} H} + 1 + \frac{\alpha_i}{\alpha_a} + \frac{\sqrt{2} H}{\alpha_a} \right]$$

Dabei wurde allerdings ein negatives Glied vernachlässigt. Eichler verwendet anstelle von H den sogenannten Wärmespeicherkennwert S , der aber mit $\sqrt{2} \cdot H$ identisch ist. Gleichung (20) geht damit über in:

$$(21) \quad v_E = \frac{1}{2} e^x \left[\frac{\alpha_i}{S} + 1 + \frac{\alpha_i}{\alpha_a} + \frac{S}{\alpha_a} \right]$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite muss nun noch umgeformt werden, soll man ihn mit der Eichler-Formel vergleichen können. Wir ziehen den Faktor $\alpha_a \cdot S$ vor die Klammer und erhalten:

$$(22) \quad v_E = e^x \frac{1}{2 \alpha_a S} [\alpha_a \alpha_i + \alpha_a S + \alpha_i S + S^2]$$

Die Summe in der Klammer ist identisch mit dem Produkt

$$(23) \quad v_E = e^x \frac{1}{2 \alpha_a S} [(S + \alpha_i)(S + \alpha_a)]$$

was durch Nachrechnen leicht verifiziert werden kann.

Bei der Bildung des Betrags von (16) haben wir in (20) ein Glied weggelassen. Zur Kompensation stellen wir einen Korrekturfaktor 0,9 in Rechnung, womit die Dämpfung schliesslich zu

$$(24) \quad v_E = 0,9 e^x \frac{1}{2 \alpha_a S} [(S + \alpha_i)(S + \alpha_a)]$$

wird, also genau der Näherungsformel von Eichler (11) entspricht. Damit ist nachgewiesen, dass Eichler bei seiner Rechnung Randbedingungen gemäss Fall I vorausgesetzt hat.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Eichler: Bauphysikalische Entwurfslehre, Band 1, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin (1968).
- [2] W. Heindl: Der Wärmeschutz einer ebenen Wand bei periodischen Wärmebelastungen, Ziegelindustrie, Heft 18 ff. (1966).

Adresse der Verfasser: R. Sagelsdorff, dipl. Bauing. ETH, und U. Stähli, dipl. Bauing. ETH, Abteilung Bauphysik EMPA, Dübendorf.