Problèmes isopérimétriques, suite

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

il introduit l'idée du «multiplicateur de Lagrange» (voir [16], première partie, Section IV, § 1) en remplaçant (22) par

$$\int_a^b \mathscr{L}(\lambda, x, y, y')dx = \min!\,(\text{vel max}!) \tag{23}$$

où $\mathscr{L}$ est «la fonction de Lagrange»

$$\mathscr{L}(\lambda, x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')\,.$$

Problèmes isopérimétriques, suite

Avec ces formules, introduites dans (21), le problème isopérimétrique de Jacob Bernoulli devient

$$y' = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{(K+y^m)^2} - 1}\,. \tag{24}$$

La solution est donc décrite par quadratures

$$\int \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = x + C\,. \tag{25}$$

Les constantes C, K et λ sont à ajuster aux conditions aux bords et à la longueur L. Ce n'est que pour $m = 1$ que cette intégrale est résoluble avec efforts raisonnables (voir Euler [11], Caput V, Exemplum II; «quae est aequatio generalis pro Circulo»).

Pour $m > 1$ il s'agit d'intégrales «elliptiques» ou «hyperelliptiques» et on a besoin de méthodes numériques. Par exemple, si on pose $A = 0$, $B = 1$ et $L = 4$, les constantes K et λ dans (25) doivent satisfaire (puisque la courbe est symétrique il suffit de ne considérer que sa moitié ascendante)

$$\int_0^{y_{max}} \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 0.5\,, \quad \text{et} \quad \int_0^{y_{max}} \frac{\sqrt{\lambda}dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 2\,. \tag{26}$$

où

$$y_{max} = (\sqrt{\lambda} - K)^{1/m}$$

est la valeur de y pour laquelle le dénominateur devient zéro. Un processus itératif (méthode de Newton) combiné avec le calcul numérique des intégrales

(méthode de Gauss avec traitement spécial de la singularité en y_{max}) donne alors les valeurs suivantes:

m	K	λ
1	−0.634994	0.653218
2	−0.632487	3.825194
3	−0.607747	17.505763
4	−0.442476	73.491858
5	0.105432	296.416889

Les solutions correspondantes de l'équation (24) sont représentées dans la figure 15.

Johann obtient une solution particulière

$$\int \frac{y^m dy}{\sqrt{a^{2m} - y^{2m}}} = x + C,$$

laquelle s'avère correcte (cf. (25)). Toutefois, sa solution générale est fausse, comme le constate Jacob avec satisfaction («...ou du moins nous dire, s'il n'y a point de faute d'impression dans son égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$. & ... si elle est fausse, comme je le soutiens, à moins qu'il ne veuille se désister de ses prétentions»).

EPILOGUE

Les lecteurs que plus de détails intéressent sont invités à consulter le petit livre de J.E. Hofmann [14], extrêmement bien documenté. Les travaux des Frères Bernoulli, d'Euler et de Lagrange sont accessibles dans leurs «Opera Omnia» et «Œuvres». Une description de la suite de la théorie (Cauchy, Peano, Poincaré, Gronwall) et des méthodes numériques (Adams, Runge, Kutta) est donnée dans notre monographie [13] (cf. Sections I.4-I.16, II.1 et III.1 en particulier).

Remerciement. Je tiens à remercier M. P. de la Harpe pour son intérêt et pour ses observations pertinentes.