# §5. La trace de Jones-Ocneanu

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Et cela implique

$$f = \sum_{\varphi} \prod_{i} c_{\varphi(i)}(y) x_i^{\varphi(i)} = \prod_{i} \sum_{n>0} c_n(y) x_i^n = \prod_{i} \prod_{j} (1 + x_i y_j).$$

## § 5. La trace de Jones-Ocneanu

On se propose ici de montrer les théorèmes 1-6 et 1-7.

5-1. Soit donc $\equiv$ une relation d'équivalence additive sur $\Lambda$ possédant la propriété suivante:

$$\text{(P)} \quad \forall n > 0, \forall u \in H_n, \quad t_n(u) \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n] \equiv t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}].$$

Comme $\sigma_n^{-1}$ est égal à $\alpha\beta^{-1} - \beta^{-1}\sigma_n$, on a

$$t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n^{-1}] = \alpha\beta^{-1} c_1 t_n(u) - \beta^{-1} t_{n+1}[(u \times 1_1)\sigma_n].$$

D'autre part, l'application de $H_n$ dans $H_{n+1}$ qui à $u$ associe $(ux1_1)\sigma_n$ induit l'application $\theta$ de $E_{n-1}$ dans $E_n$ (voir 3-2). La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \forall u \in E_{n-1}, \quad f(u) \equiv f(\theta u) \equiv \alpha\beta^{-1} c_1 f(u) - \beta^{-1} f(\theta u),$$

c'est-à-dire

$$\forall u \in E, \quad f(u) \equiv f(\theta u) \quad \text{et} \quad (1 + \beta - a c_1) f(u) \equiv 0,$$

$f$ désignant la projection canonique de $E$ sur $\Lambda$.

D'autre part, $E$ est un $\Lambda$-module libre de base $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ et l'on a

$$\forall n > 0, \quad \theta s_n = s_{n+1} \quad \text{et} \quad f(s_n) = c_{n+1}.$$

La propriété (P) est donc équivalente à

$$\forall n > 0, \quad \forall u \in \Lambda, \quad u c_n \equiv u c_{n+1} \quad \text{et} \quad u c_n (1 + \beta - \alpha c_1) \equiv 0,$$

et la plus petite relation $\equiv$ vérifiant la propriété (P) est donc la congruence modulo l'idéal $J$ de $\Lambda$ engendré par les éléments

$$c_n - c_1, \quad n > 1 \quad \text{et} \quad c_1(1 + \beta - \alpha c_1),$$

ce qui achève de démontrer le théorème 1-6.

5-2. Soit $\tau$ une tresse de $B_n, n > 0$. La classe de $t_n(\tau)$ modulo l'idéal $I_0$ de $\Lambda$ engendré par les éléments $c_i - c_1$ est de la forme $cP$, où $c$ représente la classe commune des $c_i$ et $P$ est un polynôme de $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo $J$ est représentée par $cP'$, $P'$ désignant la classe de $P$ dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme $P'$ ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté $E$ un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau $A$. Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par $\alpha$, $\beta$, $\beta^{-1}$ et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si $x$ est un croisement d'un entrelacs $E$ dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de $E$ sans changer le croisement $x$ de façon à obtenir un entrelacs $E'$ isotope à $E$ et de la forme $\hat{\tau}$, où $\tau$ est une tresse de $B_n$. Il en résulte que les trois entrelacs $E_+$, $E_-$ et $E_0$ obtenus par modification de $E$ au voisinage de $x$ sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau'\sigma_i\tau'' , \qquad \tau_- = \tau'\sigma_i^{-1}\tau'' , \qquad \tau_0 = \tau'\tau'' .$$

On a alors dans l'algèbre $H_n$ l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha\tau_0 + \beta\tau_- = 0 ,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0 .$$

Si $E$ est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de $1_1$ dans le quotient de $\Lambda$ par $I_0$ est égal à $c$. On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

## § 6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Soit $n > 0$ un entier. Soit $L$ une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de $L$ est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et $j$ variant de 1 à $n$. On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à $L$ est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbf{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbf{R} \times 0$.