Das Messen des Flächeninhalts von ebenen Figuren: zum Verständnis des Planimeters

Autor(en): **Zwahlen, Robert**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **95 (1977)**

Heft 32

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-73430

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Das Messen des Flächeninhaltes von ebenen Figuren

Zum Verständnis des Planimeters

Von **R. Zwahlen**, Zürich

Das Planimeter (Bild 1) ist ein Gerät, mit dessen Hilfe man mechanisch den Flächeninhalt von ebenen, allseitig begrenzten Figuren messen kann. Die folgende Betrachtung will erklären, *weshalb* das Planimeter den Flächeninhalt von Figuren zu messen gestattet.

Es gibt verschiedene Typen von Planimetern. Der folgenden Betrachtung ist das Kompensations-Polar-Planimeter der Firma *Coradi AG*, Zürich, zugrunde gelegt. Das Gerät besteht im wesentlichen aus zwei Teilen, nämlich dem *Polarm* und dem *Fahrarm* (Bild 2).

An einem Ende des Polarmes befindet sich der Pol P. Der Pol wird von zwei Zylindern gebildet, die so zusammengebaut sind, dass sich der innere Zylinder konzentrisch zum äusseren frei drehen kann. Der innere Zylinder ist mit dem eigentlichen Polarm durch eine Schraube fest verbunden. Der äussere Zylinder ist mit Blei beschwert, weil sich der *Pol während der Messung nicht verschieben* darf. Die Länge des Polarmes wird vom Hersteller justiert. Sie erhält nur, wie man später sehen wird, bei der Messweise «Pol innerhalb der zu messenden Figur» eine Bedeutung. Auf der dem Pol entgegengesetzten Seite des eigentlichen Polarmes ist ein Stift mit kugeligem Ende angewinkelt.

Anderseits besteht das Planimeter aus einem *Fahrarm* mit *Fahrlupe* oder wahlweise auch mit einem *Fahrstift*. Die Fahrlupe gestattet, einer Umrandung sehr genau nachzufahren. Auf ihrer der Unterlage zugekehrten Seite ist nämlich ein kleiner Kreis mit schwarzer Farbe eingraviert. Man braucht bei der Umfahrung einer Berandung nur darauf zu achten, dass der Kreismittelpunkt genau der Randlinie folgt. Mit dem Fahrstift misst man rascher, mit der Fahrlupe misst man genauer. Um in der Folge nicht immer zwischen Fahrstift und Fahrlupe unterscheiden zu müssen, wird in der Folge nur noch vom Fahrstift die Rede sein. Wenn man es vorzieht, so kann man sich anstelle der Fahrstift-Spitze das Zentrum des Kreisleins aut der Unterseite der Fahrlupe denken.

Auf der der Fahrlupe entgegengesetzten Seite des Fahrarmes ist an diesem noch das *Messgehäuse* angebracht. Das Messgehäuse enthält das *Messwerk*, die *Ergebnisanzeige*, ein *Fenster* zur Kontrolle der Fahrarmlänge und einen *Nullstellknopf* für die Ergebnisanzeige sowie einige Feststellschrauben.

Das Messwerk umfasst insbesondere die *Fahrrolle*, auf welcher konzentrisch die *Messtrommel* aufgesetzt ist. Die Messrolle hat einen etwas kleineren Durchmesser als die Fahrrolle. Die Fahrrolle liegt während der Messung auf der Unterlage auf und treibt das Messwerk an. Fahrrolle und Messtrommel haben dieselbe Achse, die parallel zum Fahrarm verläuft. Diese Achse ist nahezu reibungsfrei auf Spitzen gelagert. Die Fahrrolle zerlegt jede Bewegung der Unterlage in zwei Komponenten, wovon die eine parallel zur Achsenrichtung, die andere senkrecht dazu, d.h. tangential zur Drehrichtung der Fahrrolle verläuft. Bei tangentialen Bewegungen der Unterlage wickelt sie sich auf dieser ab, so dass sie die tangentiale Bewegung mit grosser Genauigkeit mitmacht. Bei rein axialen Bewegungen dagegen bleibt sie stehen.

Auf der Achse der Messtrommel bzw. der Fahrrolle sitzt eine Schnecke, welche die vorderste Ziffer der Messanzeige auf die Scheibe übermittelt, wo sie abgelesen wird. Die folgenden Ziffern der Messanzeige können von der Skala auf der Messtrommel abgelesen werden. Durch Druck auf den Nullstellknopf werden alle Skalen auf null zurückgestellt.

Im Fenster am oberen Teil des Messwerks kann man jederzeit die Länge des Fahrarmes auf Zehntelsmillimeter genau ablesen. Das Messgehäuse besitzt ausserdem eine zylindrische Öffnung für die Aufnahme des Kugelkopfes am angewinkelten Stift des Polarmes. Für die Messung wird dieser da hineingesteckt, womit das Gerät einsatzbereit ist.

Die Fahrarmlänge l ist der Abstand des Zentrums des Kreisleins bis zum Zentrum der zylindrischen Öffnung am Messgehäuse zur Aufnahme des Kugelkopfes.

Die Fahrrolle bleibt bei einer Drehung des Polarmes immer dann stehen, wenn die Tangente an die Fahrrolle in der Unterlage durch den Pol P geht. Das ist bei einem bestimmten Winkel α zwischen Fahrarm und Polarm der Fall. Es gibt mithin einen zu P konzentrischen Kreis, bei welchem, wenn der Fahrstift der Peripherie des Kreises nachgeführt wird, die Messrolle stehen bleibt. Wir nennen diesen Kreis den *äusseren Nullkreis*. Der *innere Nullkreis*, mit Radius R_i, wird vom Berührungspunkt zwischen Fahrrolle und Unterlage auf dieser

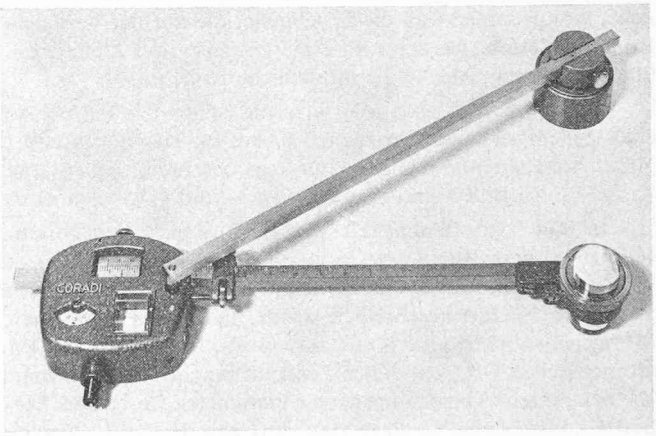


Bild 1. Gesamtansicht eines Kompensations-Planimeters in betriebsbereitem Zustand

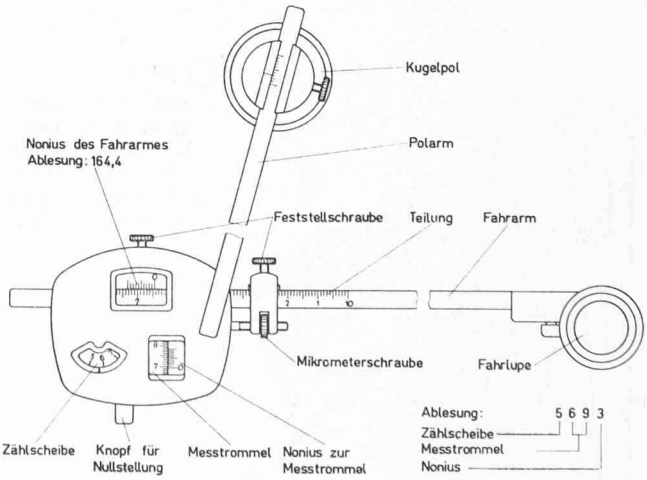


Bild 2. Die Benennung der verschiedenen Teile des Planimeters. Am Polarm ist (in obiger Darstellung nicht sichtbar) ein Stift mit kugeligem Köpfchen angewinkelt, das im Messgehäuse steckt, vgl. Bild 1. Die Feststellschrauben am Messgehäuse erlauben, die Fahrarmlänge dem Massstab eines Planes oder einer Karte anzupassen. Die Schraube am Kugelpol erlaubt, die Polarmlänge zu wählen

beschrieben, wenn der Fahrstift dem äusseren Nullkreis nachgeführt wird. Durch grobe Messung bzw. Schätzung findet man für den Radius R_a des äusseren Nullkreises bei der Fahrarmlänge von 166,5 mm ungefähr 280 mm. Verlängert man den Polarm um v mm, so ändern sich auch die Nullkreisradien. Sie betragen dann $R_a + v$ bzw. $R_i + v$. Das gibt die Möglichkeit, den äusseren Nullkreisradius durch passende Einstellung der Polarmlänge so zu wählen, dass bei der Messung mit «Pol innerhalb der zu messenden Figur» die sich ergebende notwendige Addition am Ende der Messung im Kopf ausgeführt werden kann. Am Ende dieser Art von Messung muss nämlich die Fläche des äusseren Nullkreises zum Messergebnis addiert werden, wie noch erklärt wird.

Parallel zum Fahrarm des Instrumentes verläuft ein nicht wirklich vorhandener «virtueller» Fahrarm, bestimmt durch die Verbindungsstrecke vom kugeligen Ende am Stift des Polarmes bis zur Spitze des Fahrstiftes. Diese Distanz ist die *Fahrarmlänge,* welche am oberen Fenster des Messgehäuses abgelesen werden kann. Man sollte sich ferner davon Rechenschaft geben, weshalb man eigentlich richtig messen kann, wenn die Achse der Fahrrolle nicht in die Verbindungsstrecke der beiden erwähnten Punkte fällt, sondern zu ihr nur parallel ist. Denkt man sich eine «virtuelle» Fahrrolle mit der erwähnten Achse neben der tatsächlich vorhandenen, so wird sich diese – wegen der Parallelität der Achse – im gleichen Sinne und um den gleichen Winkel drehen, wie die tatsächliche, womit schliesslich die Ergebnisse, die mit der virtuellen Rolle gemessen werden, notwendigerweise mit denjenigen übereinstimmen, welche die tatsächliche Rolle misst.

Beim Planimetrieren folgt also die Spitze des Fahrstiftes einer beliebigen vorgeschriebenen Kurve k_1. Der Berührungspunkt der Fahrrolle mit der Unterlage beschreibt eine zweite Kurve k_2. Zu Bild 3 sind zwei Kurven k_1 und k_2 gezeichnet.

In Bild 3 ist offenbar das Messgehäuse nicht von Polarm geführt worden. Zur Kurve k_2 könnte man leicht eine Kurve k_3 konstruieren, welche das Zentrum des kugeligen Endes des Stiftes am Polarm beschreiben würde, falls der Polarm dem Messgehäuse, ohne eine Kraft auszuüben, folgen würde. Den geometrischen Ort, den dieses Zentrum beschreibt, kann man bei bekannten Abmessungen des Planimeters aufgrund von Bild 3 konstruieren, so dass man dort eine Kurve k_3 hineinzeichnen könnte. Übt der Polarm bzw. der Stift am einen Ende seine Kraft auf das Messgehäuse aus, indem der Pol an Ort und Stelle bleibt, so reduziert sich die Kurve k_3 auf einen Kreis oder sogar auf einen Kreisbogen, je nachdem ob mit der Messweise «Pol innerhalb der zu messenden Figur» bzw. «Pol ausserhalb der zu messenden Figur» gearbeitet wird.

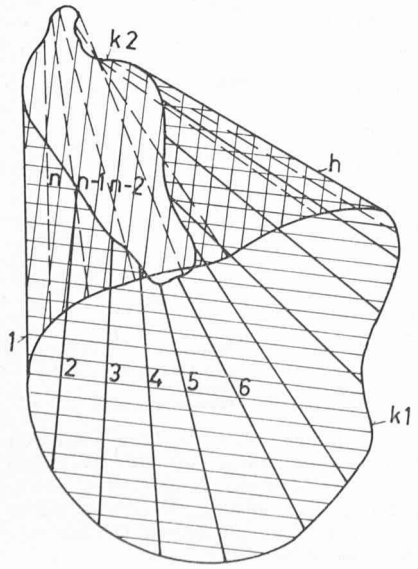
Dreht sich beim Durchfahren der Kurve k_1 (Bild 3) die Messrolle im positiven Sinne, wenn der Fahrarm sich immer in der gleichen Richtung bewegend in den Stellungen 1, 2, ...h befindet, so dreht sich die Messrolle im negativen Sinne, wenn der Fahrarm die Stellungen $h + 1$, $h + 2 \ldots n$ durchläuft. Wenn also die Messanzeige, wie behauptet, die vom Fahrarm überstrichene Fläche angibt, was noch zu beweisen sein wird, so registriert das Planimeter die Differenz zwischen der horizontal und vertikal schraffierten Fläche, was auf die Differenz des Inhaltes von Kurve k_1 und k_2 hinausläuft. Wenn also die virtuelle Messrolle im Messgehäuse da angebracht wäre, wo das kugelige Ende des Stiftes vom Polarm eingreift, so reduziert sich Kurve k_2 auf einen Kreis bzw. einen Kreisbogen. Der Flächeninhalt des Kreises ist durch die Polarmlänge gegeben. Der Flächeninhalt der Kurve k_2 im Falle des Kreisbogens ist null, so dass man in diesem Falle vom Instrument den Inhalt der von der Kurve k_1 begrenzten Fläche erhält.

Bei einer kleinen Bewegung des Fahrstiftes überstreicht der virtuelle Fahrarm eine gewisse Fläche ΔF (Bild 4).

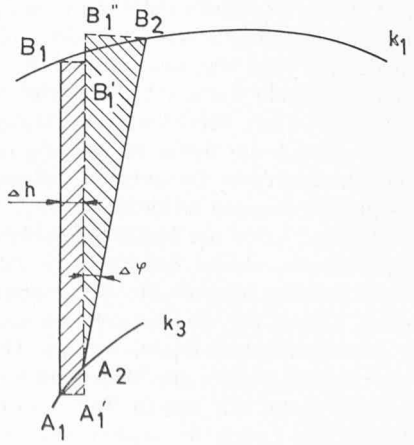
Während der Fahrstift von B_1 bis B_2 läuft, geht die Fahrrolle von A_1 nach A_2. Die Fläche ΔF kann genähert dargestellt werden durch ein Rechteck der Höhe Δh und der Länge l und einen Kreissektor mit Radius l und Zentrierwinkel $\Delta \varphi$. Ruft man sich in Erinnerung, dass die Achse der Fahrrolle parallel zur Seite $A_1 B_1$ verläuft, so wickelt sie auf der Unterlage gerade die Länge Δh ab. Angelangt im Punkte A_1' bzw. beim Fahrstift in B_1', verschiebe man den Fahrarm in sich selber, bis sich die Fahrrolle im Punkte A_2 befindet. Bei dieser axialen Verschiebung dreht sie sich überhaupt nicht. Sie bleibt auch stehen, wenn der Fahrstift von B_1'' nach B_2 fährt. Wenn ΔF gegen 0 strebt, so streben offenbar auch Δh und $\Delta \varphi$ nach 0. Der Punkt B_1'' bzw. B_1' kommt der Kurve um so näher, je kleiner Δh bzw. $\Delta \varphi$, d.h. ΔF wird. Die Länge des Fahrarmes ist bekannt. Daher kann man ΔF berechnen:

$$(1) \qquad \Delta F = \Delta h \cdot l + l \cdot \frac{l \Delta \varphi}{2}$$

$$= \Delta h\, l + l^2 \frac{\Delta \varphi}{2}$$



Links:
Bild 3. Vorgegebene Kurve k_1, welche die Spitze des Fahrstiftes beschreibt und Kurve k_2, welche der Berührungspunkt der Fahrrolle auf der Unterlage beschreibt, sowie verschiedene Stellungen des Fahrarmes, gekennzeichnet durch die Ziffern 1, 2, 3, ... n, ... n



Rechts
Bild 4. Zerlegung einer Fläche ΔF, wenn der Fahrstift auf der Kurve k_1 vom Punkt B_1 und Punkt B_2 geht

Die gesamte vom Fahrarm überstrichene Fläche wird damit

$$(2) \qquad F = \Sigma \left(\Delta h \cdot l + l^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

oder, wenn man lieber will,

$$(3) \qquad F = \lim_{\Delta h \to 0} \Sigma \left(\Delta h \cdot l + l^2 \frac{\Delta \varphi}{2} \right)$$

$$= \lim_{\Delta h \to 0} l \Sigma \Delta h + l^2 \lim_{\Delta h \to 0} \Sigma \frac{\Delta \varphi}{2} .$$

Vom Planimeter wird, wiederholen wir es, nur der erste Summand der in der Ergebnisanzeige erscheint, registriert. Für den verbleibenden Summanden müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1.) Pol innerhalb der zu messenden Figur

2.) Pol ausserhalb der zu messenden Figur.

Die Summe $\sum \Delta \varphi$ ist offensichtlich der Unterschied des Winkels in der Endlage gegen jenen in der Anfangslage. Im Falle 1 ist dies der Winkel 2π, im Falle 2 ist es der Winkel 0. Man erhält also im Falle 1

$$F = \lim l \Sigma \Delta h + \pi l^2$$

und im Falle 2

$$F = \lim l \Sigma \Delta h ,$$

wobei das Planimeter den ersten Summanden anzeigt:

1. $F =$ Anzeige $+ \pi l^2$
2. $F =$ Anzeige.

Bei geeigneter Eichung der Messrolle zeigt also das Planimeter – wenn der Pol ausserhalb der zu messenden Figur liegt – unmittelbar die Fläche F an.

Nach dem, was bereits erklärt wurde, ist – um das richtige Ergebnis zu erhalten – zu der Fläche F der von der Kurve k_3 eingeschlossene Flächeninhalt zu addieren. Bezeichnet man die Polarmlänge mit p, so beträgt der von der Kurve k_3 umschlossene Flächeninhalt πp^2.

Damit wird im Falle 1

$$F = \text{Anzeige} + \pi \cdot l^2 + \pi p^2$$
$$= \text{Anzeige} + \pi (l^2 + p^2)$$

Beim Umfahren des äusseren Nullkreises mit dem Fahrstift schliesst der Fahrarm mit der Ebene durch die virtuelle Fahrrolle (im Zentrum des kugeligen Endes am Polarm) einen rechten Winkel ein. Daher ist wegen des Satzes von Pythagoras

$$p^2 + l^2 = R_a^2$$
$$F = \text{Anzeige} + \pi R_a^2$$
$$F = \text{Anzeige} + \text{Fläche des äusseren Nullkreises.}$$

Adresse des Verfassers: *Robert Zwahlen*, dipl. Math. ETH, Ottenbergstrasse 48, 8049 Zürich.

Schweizerische Strahlflugzeuge und Strahltriebwerke

Von **Georges Bridel**, Luzern und Zürich

Fortsetzung von H. 10, 1977, S. 140, und Schluss

6. Teil: Triebwerkprojekte von Escher Wyss

Von den Arbeiten der Firma Escher Wyss auf dem flugtechnischen Gebiet ist in der Öffentlichkeit vor allem die Entwicklung leistungsfähiger Verstellpropeller bekannt. Im Jahre 1936 wurde in der Forschungsabteilung dieser Firma der erste auch zur Bremsung bei der Landung verwendbare Verstellpropeller der Welt für das Kampfflugzeug C-36 des Flugzeugwerkes Emmen entwickelt [11].

In der Anfangsphase der Entwicklung schweizerischer Strahlflugzeuge war Escher Wyss jedoch auch massgeblich mit der Erarbeitung von Vorschlägen für Zweistromtriebwerke beschäftigt. Ausserdem wurden Projekte für Antriebsanlagen von verschiedenen, auch zivilen Flugzeugentwicklungen unterbreitet. Alle diese Studien wurden von der Escher-Wyss-Forschungsabteilung durchgeführt, deren Leiter Dr. C. Keller war. Entsprechend der Erfahrung und der Tradition des Werkes wurden im allgemeinen fortschrittliche Projekte vorgeschlagen.

Eine interessante Begebenheit darf einleitend nicht unerwähnt bleiben: Am 25. April 1945 landete in Dübendorf ein deutsches Strahlflugzeug vom Typ Messerschmitt Me-262. Die neuartige Maschine versetzte die militärischen Fachleute in nicht geringes Erstaunen; in der Industrie und Hochschule war dieses Erstaunen jedoch weniger gross, waren doch entsprechende Projekte bereits seit längerer Zeit in Bearbeitung. Zudem war die Möglichkeit der Verwendung des offenen Gasturbinenprozesses als Flugzeugantrieb schon vor dem Krieg bekannt [12].

Im Auftrage der KTA wurde in den Versuchswerkstätten von Escher Wyss gemeinsam mit den Firmen BBC und Sulzer eines der Triebwerke des Typs Junkers Jumo-004 eingehend untersucht. Dabei gewannen die Firmen Einblick in verschiedene, neuartige Techniken; auch konnte ein Vergleich mit den damaligen in der Schweiz laufenden Arbeiten hergestellt werden. Der Vergleich der Axialverdichter zum Beispiel zeigte, dass unsere bisherigen Entwicklungen den ausländischen teilweise überlegen waren.

Da der Bau von leistungsfähigen Verdichter- und Turbinenstufen ein wesentliches Element für Strahltriebwerke darstellt, kann nochmals auf die verhältnismässig günstigen Bedingungen für die Entwicklung derartiger Antriebe in der Schweiz hingewiesen werden. Betreffend Axial-Turbomaschinen sind wesentliche Elemente der Theorie in der Schweiz entwickelt worden (vgl. beispielsweise die Dissertation von Dr. C. Keller).

Die Arbeiten in der Forschungsabteilung von Escher Wyss betrafen im wesentlichen die folgenden Projekte:

- Strahltriebwerk mit Verbrennungsmotor (System Campini)
- Untersuchung verschiedener Kreisprozesse für Strahltriebwerke (normaler Einstrom-Prozess, Prozess mit intermittierender Verbrennung, Prozesse mit Wärmeaustausch usw.).
- Strahltriebwerkanlage für mehrmotorige Flugzeuge (ähnliches System wie beim früheren N-20-Antrieb A)
- Allgemeiner Vorschlag für das Zweistromtriebwerk EW (Antrieb N-11)
- 10000-PS-Propellerturbinentriebwerk
- Turboliner, Vorschlag für ein Verkehrsflugzeug.