

Ueber Kräfte in der Ebene und im Raum

Autor(en): **Kiefer, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **53/54 (1909)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28091>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ueber Kräfte in der Ebene und im Raum.

Von A. Kieffer in Zürich.

I.

Sind AP, BQ zwei Kräfte mit der Resultierenden CR ¹⁾, so gelten folgende Proportionen (Schweiz. Bauzeitung, Bd. LI, Seite 65):

$$\frac{AU}{UB} = -\frac{QT}{TP}$$

$$\frac{PV}{VQ} = -\frac{BT}{TA},$$

wobei U, V die Schnittpunkte der Resultierenden mit den Geraden AB und PQ bezeichnen (Abb. 1).

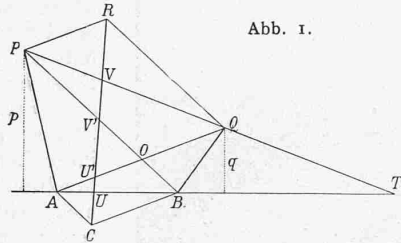


Abb. 1.

Zum Beweise kann man für den Punkt U den Momentensatz anwenden

$$\Delta UAP = UBQ,$$

oder wenn p, q die Lote von P, Q auf die Gerade AB bedeuten

$$AU \cdot p = UB \cdot q,$$

also $\frac{AU}{UB} = \frac{q}{p} = -\frac{QT}{TP}.$

Auf dieselbe Weise kann man die zweite Proportion für den Punkt V beweisen.

Durch Anwendung des Momentensatzes auf die Schnittpunkte U', V' der Resultierenden mit den Geraden AQ, BP , oder mit Hülfe des Proportionalgesetzes direkt aus der Abbildung folgt ferner

$$\frac{AU'}{U'Q} = \frac{CU'}{U'R} = \frac{BO}{OP},$$

$$\frac{BV'}{V'P} = \frac{CV'}{V'R} = \frac{AO}{OQ}.$$

Die Resultierende von zwei Kräften teilt also jede der zwei Linien, welche die beiden Anfangspunkte und ebenso die beiden Endpunkte der Kräfte verbinden, im umgekehrten und entgegengesetzten Verhältnis, in welchem die betreffende Linie die andere teilt, und die Resultierende teilt jede der zwei Linien, welche den Anfangspunkt der einen Kraft mit dem Endpunkt der andern verbindet, im umgekehrten aber dem Vorzeichen nach gleichen Verhältnis, in welchem die betreffende Linie die andere teilt.

Man denke sich nun die Anfangspunkte A, B der zwei Kräfte fest, die Kräfte AP, BQ aber in Richtung und Grösse veränderlich; wählt man dabei die Endpunkte P, Q so, dass das Verhältnis $\frac{p}{q}$ ihrer Abstände von der Geraden AB konstant bleibt, so bleibt $\frac{AU}{UB} = \frac{q}{p}$ konstant und die Resultierende geht durch einen festen Punkt U . Dasselbe gilt insbesondere dann, wenn P auf irgend einer parallelen Geraden zu AB und Q auf irgend einer andern Parallelen zu AB gewählt wird. (Analog wenn P, Q fest gehalten A, B bewegt, oder wenn A, Q fest gehalten B, P bewegt werden.) Denkt man sich in dem Falle, wo P, Q auf parallelen Geraden zu AB liegen, den festen Punkt U als Anfangspunkt der Resultierenden gewählt, so kann man die Kräfte AP, BQ parallel nach U verschieben und zusammensetzen und erkennt, dass die Mitte der Resultierenden, das ist die Mitte der verschobenen Endpunkte auf der Mittelparallelen der beiden zu AB parallelen Geraden und dass der End-

¹⁾ Die Resultierende CR ist dadurch konstruiert, dass BC, PR parallel AQ und AC, QR parallel BP gezogen und die Schnittpunkte C, R verbunden sind (Schweiz. Bauztg. Bd. XLIII, Seite 68).

punkt der Resultierenden auf der symmetrischen Geraden zu AB in Bezug auf jene Mittelparallele liegen muss.

In etwas anderer Bezeichnung mögen die zwei Kräfte mit gemeinschaftlichem Anfangspunkt AP_1, AP_2 heissen und die Endpunkte P_1, P_2 fest sein. Wo der Anfangspunkt auch liegen mag, immer geht die Resultierende AR_2 der zwei Kräfte durch die Mitte S_2 der Punkte P_1, P_2 und es ist $AR_2 = 2 \cdot AS_2$ (Abb. 2). Es sei AP_3 eine dritte Kraft mit festem Endpunkt P_3 und die Resultierende von AP_1, AP_2, AP_3 oder von AR_2 und AP_3 sei AR_3 und schneide $S_2 P_3$ in S_3 . Aus der Figur folgt

$$\frac{AS_2}{R_3 P_3} = \frac{1}{2} = \frac{AS_3}{S_3 R_3},$$

also $\frac{S_2 S_3}{S_3 P_3} = \frac{1}{2}, \frac{AS_3}{AR_3} = \frac{1}{3}.$

Der Punkt S_3 ist der Schwerpunkt der gleich schweren Punkte P_1, P_2, P_3 und man hat:

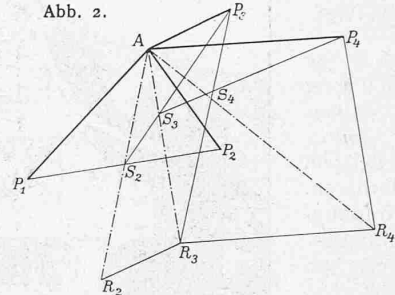


Abb. 2.

Betrachtet man die Linien von einem beliebigen Punkte A nach drei festen Punkten P_1, P_2, P_3 als Kräfte, so geht die Resultierende der drei Kräfte durch den Schwerpunkt der drei Punkte P_1, P_2, P_3 und die Grösse der Resultierenden ist drei mal so gross als die Strecke von A nach dem Schwerpunkt. Grösse und Lage der Resultierenden sind also bei gewähltem A nur abhängig von dem Schwerpunkt der drei Punkte, aber nicht von der Lage der drei Punkte. Die drei Kräfte sind nur dann im Gleichgewicht, wenn A nach dem Schwerpunkt S_3 fällt. Bewegt sich A auf einem Kreis um den Schwerpunkt als Mittelpunkt, so behält die Resultierende konstante Länge. Bewegt sich A auf einer Geraden durch den Schwerpunkt, so fällt die Resultierende stets auf diese Gerade. Beschreibt A eine beliebige Gerade, so wird die Resultierende ein Minimum, wenn A in den Fusspunkt des Lotes vom Schwerpunkt auf die Gerade fällt, nämlich gleich der dreifachen Länge des Lotes AS_3 . Beschreibt A eine beliebige Kurve, so wird die Resultierende für diejenigen Punkte A der Kurve ein Minimum, oder ein Maximum für welche die Strecke AS_3 ein solches wird, also für die Fusspunkte der Normalen von dem Schwerpunkte S_3 auf die Kurve. Es tritt ein Minimum oder ein Maximum ein, je nachdem der Kreis mit S_3 als Mittelpunkt und der Normalen als Radius die Kurve an der Berührungsstelle ausschliesst oder einschliesst; liegt S_3 zufällig auf der Evolute der Kurve, so liefert der zugehörige Krümmungsradius auf der Kurve einen Punkt, für den ein Minimum und ein Maximum zu einem uneigentlichen Minimum oder Maximum der Resultierenden zusammenfallen.

Angenommen AP_4 sei eine vierte Kraft mit festem Endpunkt P_4 und die Resultierende der vier Kräfte AP_1, AP_2, AP_3, AP_4 , oder was dasselbe ist, der zwei Kräfte AR_3, AP_4 sei AR_4 und schneide $S_3 P_4$ in S_4 , so folgt

$$\frac{AS_3}{R_4 P_4} = \frac{1}{3} = \frac{AS_4}{S_4 R_4},$$

also $\frac{S_3 S_4}{S_4 P_4} = \frac{1}{3}, \frac{AS_4}{AR_4} = \frac{1}{4},$ d. h.

S_4 ist der Schwerpunkt der vier gleich schweren Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und die Resultierende der vier Kräfte AP_1, AP_2, AP_3, AP_4 geht, wo auch A gewählt sein mag, durch S_4 und die Länge der Resultierenden ist $AR_4 = 4 \cdot AS_4$. Für die vier festen Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und die Kräfte

AP_1, AP_2, AP_3, AP_4 gelten also dieselben Sätze wie für die drei festen Punkte P_1, P_2, P_3 und die Kräfte AP_1, AP_2, AP_3 .

Ganz dieselben Beziehungen wiederholen sich, wenn man eine fünfte Kraft AP_5 mit festem Endpunkt hinzufügt und so fort für beliebig viele Kräfte, d. h.:

Hat man n Kräfte AP_1, AP_2, \dots, AP_n mit festen Endpunkten P_1, P_2, \dots, P_n , so geht, wo auch A gewählt sein mag, die Resultierende dieser n Kräfte stets durch den Schwerpunkt der gleich schweren Punkte P_1, P_2, \dots, P_n und die Länge der Resultierenden ist $AR_n = n \cdot AS_n$. Ihre Lage und Grösse ist bei gewähltem A abhängig von der Lage des Schwerpunktes und der Anzahl der Punkte; sie bleibt von konstanter Grösse, wenn A sich auf einem Kreis um den Punkt S_n als Mittelpunkt bewegt. Beschreibt A eine beliebige Kurve, so wird die Resultierende für die Fusspunkte der Normalen von S_n auf die Kurve ein Minimum oder ein Maximum.

Diese Beziehungen lassen sich sofort auf den Raum übertragen. Man kann in der Abbildung 2 sich vorstellen, der Punkt A liege nicht in der Ebene des Dreiecks P_1, P_2, P_3 und auch P_4 sei beliebig im Raum, ebenso jeder folgende Punkt, ohne dass sich etwas ändert, d. h.:

Hat man beliebig viele feste Punkte im Raum P_1, P_2, \dots, P_n und einen beweglichen Punkt A und betrachtet man AP_1, AP_2, \dots, AP_n als Kräfte, so geht ihre Resultierende stets durch den Schwerpunkt S_n der gleich schweren Punkte P_1, P_2, \dots, P_n und die Grösse der Resultierenden ist gleich der n fachen Länge von AS_n . Lage und Grösse der Resultierenden sind bei gewähltem A abhängig vom Schwerpunkt und von der Anzahl der Punkte. Bewegt sich A auf einer Kugel um den Schwerpunkt als Mittelpunkt, so behält die Resultierende konstante Länge; bewegt sich A auf einer beliebigen Kurve oder Fläche im Raum, so wird für diejenigen Lagen von A die Resultierende ein Minimum oder ein Maximum, welche die Fusspunkte der Normalen vom Punkt S_n nach der Kurve oder Fläche sind. Für A in S_n wird die Resultierende null.

Man kann auf die gefundenen Ergebnisse folgenden Satz anwenden (Schweiz. Bauzeitung, Bd. L, Seite 48, Spezialfall):

Hat man im Raume n feste Punkte P_1, P_2, \dots, P_n und einen beweglichen Punkt A , der sich auf einer Kurve oder Fläche bewegt, so wird die Summe $\overline{AP_1^2} + \overline{AP_2^2} + \dots + \overline{AP_n^2}$ ein Minimum oder ein Maximum, wenn die Strecken AP_1, AP_2, \dots, AP_n , als Kräfte betrachtet, eine Resultierende haben, die auf der Kurve oder Fläche senkrecht steht. Nun geht aber im vorliegenden Fall die Resultierende stets durch den Schwerpunkt S_n der Punkte P_1, P_2, \dots, P_n ; folglich sind die Punkte auf der Kurve oder Fläche, für welche die Summe $\overline{AP_1^2} + \overline{AP_2^2} + \dots + \overline{AP_n^2}$ ein Minimum oder ein Maximum wird, die Fusspunkte der Normalen von S_n auf die Kurve oder Fläche. Der Wert der Quadratsumme für den Punkt S_n und auch für einen beliebigen Punkt A kann folgendermassen bestimmt werden:

Bekanntlich hat man für die Resultierende AR_n der Kräfte AP_1, AP_2, \dots, AP_n die Formel

$$\overline{AR_n^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{AP_i^2} + 2 \sum_{i,k=1}^{i,k=n} AP_i \cdot AP_k \cdot \cos(AP_i, AP_k) \quad (1)$$

Für A in S_n wird die Resultierende gleich null, also

$$0 = \sum \overline{S_n P_i^2} + 2 \sum S_n P_i \cdot S_n P_k \cdot \cos(S_n P_i, S_n P_k) \quad (2)$$

Aus dem Dreieck $P_i S_n P_k$ folgt

$$\overline{P_i P_k^2} = \overline{S_n P_i^2} + \overline{S_n P_k^2} - 2 \cdot S_n P_i \cdot S_n P_k \cdot \cos(S_n P_i, S_n P_k) \quad (3)$$

Diese Gleichung für jede der $\frac{n(n-1)}{2}$ Strecken $P_i P_k$ aufgestellt und alle diese Gleichungen addiert, gibt

$$\sum \overline{P_i P_k^2} = (n-1) \sum \overline{S_n P_i^2} - 2 \sum S_n P_i \cdot S_n P_k \cdot \cos(S_n P_i, S_n P_k) \quad (4)$$

Durch Addition der Gleichungen 2 und 4

$$\sum \overline{P_i P_k^2} = n \sum \overline{S_n P_i^2}; \quad (5)$$

also die Quadratsumme für den Schwerpunkt

$$\sum \overline{S_n P_i^2} = \frac{1}{n} \sum \overline{P_i P_k^2}, \quad (6)$$

d. i. der n te Teil von der Quadratsumme der $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien der n -Punkte P_1, P_2, \dots, P_n zu zweien.

Ist jetzt A ein Punkt, dessen Abstand von S_n gleich s ist, so folgt aus dem Dreieck $AP_i S_n$

$$\overline{AP_i^2} = \overline{S_n P_i^2} + s^2 - 2 \cdot s \cdot S_n P_i \cos(s, S_n P_i) \quad (7)$$

und wenn diese Gleichung für alle Dreiecke $AP_i S_n$ aufgestellt wird und die entstehenden n -Gleichungen addiert werden

$$\sum \overline{AP_i^2} = \sum \overline{S_n P_i^2} + n \cdot s^2 - 2s \sum S_n P_i \cdot \cos(s, S_n P_i) \quad (8)$$

Nun ist $\sum S_n P_i \cdot \cos(s, S_n P_i)$ die Summe der Projektionen der Kräfte $S_n P_1, S_n P_2, \dots, S_n P_n$ auf die Gerade $S_n A$; aber diese Kräfte sind, wie gesehen, im Gleichgewicht und somit

$$\sum S_n P_i \cdot \cos(s, S_n P_i) = 0 \quad (9)$$

$$\sum \overline{AP_i^2} = \sum \overline{S_n P_i^2} + n \cdot s^2. \quad (10)$$

Durch Addition der Gleichungen 6 und 10

$$\sum \overline{AP_i^2} = \frac{1}{n} \sum \overline{P_i P_k^2} + n \cdot s^2. \quad (11)$$

Hierin kann man für s noch setzen $\frac{1}{n} AR_n$

$$\sum \overline{AP_i^2} = \frac{1}{n} \sum \overline{P_i P_k^2} + \frac{1}{n} \cdot \overline{AR_n^2}. \quad (12)$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dass die Quadratsumme $\overline{AP_1^2} + \overline{AP_2^2} + \dots + \overline{AP_n^2}$ bei der Bewegung von A ein Minimum oder ein Maximum wird, wenn $\overline{AR_n^2}$, d. h. wenn die Länge der Resultierenden ein solches wird, für A auf einer Kurve oder Fläche, also in den Fusspunkten der Normalen von dem Schwerpunkt S_n der Punkte P_1, P_2, \dots, P_n auf die Kurve oder Fläche; das kleinste Minimum tritt ein, wenn A in den Punkt S_n fällt, für den die Resultierende null ist. Die Quadratsumme bleibt konstant, wenn AR_n konstant ist.

Die angestellten Betrachtungen lassen eine Erweiterung zu, die neben andern zu Ergebnissen führt, welche von Steiner auf andere Weise gefunden wurden und sich angeben finden in den Ges. Werken, Bd. II, S. 98, „Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Kurven“.

Abbild. 3. P_1, P_2 seien zwei feste Punkte, A sei irgend ein Punkt; auf AP_1 wirke in der Richtung nach P_1 die Kraft

$$AP_1' = \lambda_1 \cdot AP_1$$

und auf AP_2 wirke in der Richtung nach P_2 die Kraft

$$AP_2' = \lambda_2 \cdot AP_2,$$

wo λ_1, λ_2 konstante positive Faktoren sind. Die Resultierende AR_2 der zwei Kräfte möge $P_1 P_2$ in S_2 schneiden; dann folgt aus der Abbildung, in der noch $S_2 Q_2$ parallel $P_1 A$ und $S_2 Q_1$ parallel $P_2 A$ gezogen sind, nach dem Proportionalitätssatz

$$P_1 S_2 : P_1 P_2 = A Q_2 : AP_2$$

$$S_2 P_2 : P_1 P_2 = A Q_1 : AP_1, \text{ durch Division}$$

$$\frac{P_1 S_2}{S_2 P_2} = \frac{A Q_2}{A Q_1} : \frac{AP_2}{AP_1} = \frac{AP_2'}{AP_1'} : \frac{AP_2}{AP_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Der Punkt S_2 ist also der Schwerpunkt der Punkte P_1, P_2 , wenn ihnen die Gewichte λ_1 beziehungsweise λ_2 beigelegt sind.

$$\text{Ferner } \frac{AR_2}{AS_2} = \frac{AP_1'}{AQ_1} = \frac{\lambda_1 \cdot AP_1}{AQ_1} = \lambda_1 \cdot \frac{P_1 P_2}{S_2 P_2};$$

$$\text{aber } \frac{P_1 P_2}{S_2 P_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\text{also } \frac{AR_2}{AS_2} = \lambda_1 + \lambda_2; AR_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot AS_2,$$

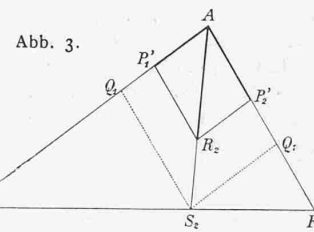


Abb. 3.

d. h. die Resultierende AR_2 der zwei Kräfte AP_1', AP_2' wird der Grösse nach gefunden, indem man AS_2 mit $\lambda_1 + \lambda_2$ multipliziert. Zusammengefasst:

Sind A, P_1, P_2 drei Punkte, von denen die beiden letzten fest sind und wirkt von A nach P_1 die Kraft $\lambda_1 \cdot AP_1$, von A nach P_2 die Kraft $\lambda_2 \cdot AP_2$, wo λ_1, λ_2 konstante positive Faktoren sind, so geht, wo auch A gelegen sein mag, die Resultierende der zwei Kräfte durch den Schwerpunkt der Punkte P_1, P_2 , denen die Gewichte λ_1, λ_2 beigelegt sind und die Grösse der Resultierenden ist $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot AS_2$.

Es sei nun P_3 ein weiterer fester Punkt des Raumes und $\lambda_3 \cdot AP_3$, wo λ_3 ein konstanter positiver Faktor ist, eine von A gegen P_3 wirkende Kraft, so geht die Resultierende der drei Kräfte $\lambda_1 \cdot AP_1, \lambda_2 \cdot AP_2, \lambda_3 \cdot AP_3$, d. h. die Resultierende der zwei Kräfte $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot AR_2$ und $\lambda_3 \cdot AP_3$ durch den Schwerpunkt S_3 der zwei Punkte S_2, P_3 mit den Gewichten $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3$ d. h. durch den Schwerpunkt der drei Punkte P_1, P_2, P_3 mit den bezüglichen Gewichten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die Grösse der Resultierenden der drei Kräfte ist $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot AS_3$. Ganz gleich für den vierten Punkt P_4 des Raumes und die von A in der Richtung nach P_4 wirkende Kraft $\lambda_4 \cdot AP_4$ und so fort für beliebig viele feste Punkte des Raumes und zugehörige Kräfte.

Ist A ein beliebiger Punkt und sind P_1, P_2, \dots, P_n feste Punkte des Raumes und bedeuten $\lambda_1 \cdot AP_1, \lambda_2 \cdot AP_2, \dots, \lambda_n \cdot AP_n$, wo die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ positive konstante Faktoren sind, Kräfte, die von A gegen die einzelnen Punkte gerichtet sind, so geht die Resultierende dieser Kräfte, wo auch A gelegen sein mag, stets durch den Schwerpunkt S_n der Punkte P_1, P_2, \dots, P_n mit den Gewichten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und die Grösse der Resultierenden ist das $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ -fache der Strecke von A nach dem Schwerpunkt S_n der Punkte, $AR_n = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \cdot AS_n$.

Die Resultierende ist also null, wenn A in den Schwerpunkt fällt; sie bleibt von konstanter Länge, wenn A sich auf einer Kugel um den Schwerpunkt als Mittelpunkt bewegt. Bei der Bewegung von A auf einer beliebigen Kurve oder Fläche des Raumes wird die Resultierende für diejenigen Lagen des Punktes A ein Minimum oder Maximum, welche die Fusspunkte der Normalen von dem Schwerpunkt S_n auf die Kurve oder Fläche sind. Diese Fusspunkte haben die weitere Eigenschaft, dass für sie der Ausdruck

$$\lambda_1 \cdot \overline{AP_1^2} + \lambda_2 \cdot \overline{AP_2^2} + \dots + \lambda_n \cdot \overline{AP_n^2}$$

ein Minimum oder ein Maximum ist; denn es gilt der Satz (Schweiz. Bauzeitung, Bd. L, Seite 48, Spezialfall):

Sind P_1, P_2, \dots, P_n feste Punkte und ist A ein beweglicher Punkt des Raumes, der auf einer Kurve oder Fläche läuft, so wird der Ausdruck

$$\lambda_1 \cdot \overline{AP_1^2} + \lambda_2 \cdot \overline{AP_2^2} + \dots + \lambda_n \cdot \overline{AP_n^2}$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ beliebige Faktoren sind, ein Minimum oder ein Maximum, wenn $\lambda_1 \cdot AP_1, \lambda_2 \cdot AP_2, \dots, \lambda_n \cdot AP_n$ als Kräfte

aufgefasst, ein System von Kräften darstellen, dessen Resultierende auf der Kurve oder Fläche senkrecht steht. Aber im vorliegenden Falle geht die Resultierende stets durch den festen Schwerpunkt S_n und daher geben die Normalen von S_n in ihren Fusspunkten auf der Kurve oder Fläche die fraglichen Punkte. Die Ausmittlung der Quadratsummen für den beliebigen Punkt A und den ausgezeichneten Punkt S_n , die in der erwähnten Steiner'schen Abhandlung gemacht ist, mag hier unterbleiben.

Aus „Unsere Heimstätten, wie sie waren und wurden.“

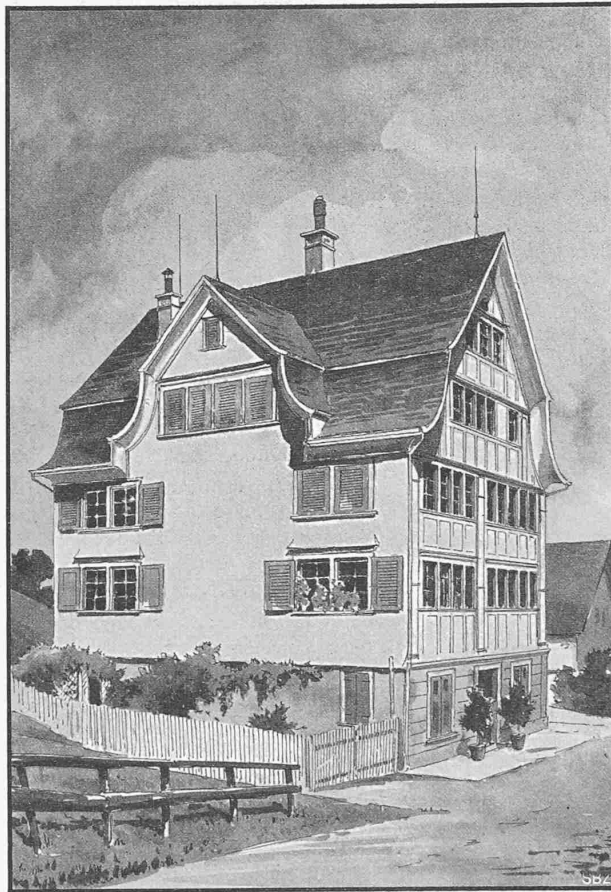


Abb. 4. Fabrikantenhaus in Speicher.

Nach einer Tuschzeichnung von Sal. Schlatter in St. Gallen.

Bis jetzt wurde angenommen, die Kräfte wirken von dem Punkte A in den Richtungen gegen die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n hin und die Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seien positiv. Man kann sich vorstellen, dass einzelne Kräfte die Richtung in die entgegengesetzte ändern und festsetzen, dass die bezüglichen Faktoren das negative Vorzeichen haben sollen. Hat man zwei Kräfte $\lambda_1 \cdot AP_1$ und $-\lambda_2 \cdot AP_2$ mit den Wirkungslinien AP_1, AP_2 , so dass die erste Kraft die Richtung von A gegen P_1 und die zweite die entgegengesetzte Richtung von AP_2 hat, so schneidet die Resultierende der zwei Kräfte die Gerade $P_1 P_2$ auf der Verlängerung; durch ganz dieselben Proportionen wie früher findet man, dass der Schnittpunkt die Strecke $P_1 P_2$ im umgekehrten Verhältnis der Faktoren von aussen teilt, d. h. dass er der Schwerpunkt der beiden Punkte P_1, P_2 mit den Gewichten $\lambda_1, -\lambda_2$ ist. Ferner zeigt sich, dass die Resultierende die Grösse $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot AS_2$ hat. Analog, wenn ein dritter Punkt mit einem positiven oder negativen Faktor hinzugefügt wird usw. für beliebig viele Punkte und bezügliche positive oder negative konstante Faktoren.

Die Ergebnisse, die daraus folgen, lauten wie früher, aber ohne die Einschränkung, dass die konstanten Faktoren alle positiv seien, und mit der Festsetzung, dass die Punkte, deren Schwerpunkt zu bestimmen ist, positive oder negative Gewichte bekommen, entsprechend den Vorzeichen der Faktoren. (Schluss folgt.)

Miscellanea.

Gordon-Bennet-Wettfliegen 1909. In der Generalversammlung des schweizerischen Aeroklubs vom 24. Januar zu Zürich, beschloss dieser, dass das diesjährige Gordon-Bennet-Wettfliegen, das infolge des Sieges der «Helvetia» von der Schweiz zu übernehmen ist, in Zürich abgehalten werden solle. Keine andere Schweizerstadt bietet die Möglichkeit, das erforderliche Gas zur gleichzeitigen Füllung von 30 bis 40 Ballons zu durchschnittlich 2200 m³ Inhalt zu liefern, wie das städtische Gaswerk in Schlieren. Ausserdem sind daselbst die Platzverhältnisse die zu einer geordneten Durchführung der Wettfahrt denkbar günstigsten. Die Art, wie die Ortsgruppe Zürich des schweizerischen Aeroklubs unter Leitung des Ingenieurs H. v. Gugelberg bisher die Vorarbeiten eingeleitet und geführt hat, lässt erwarten, dass die Schweiz in der Durchführung hinter andern Ländern nicht zurückstehen wird. Regierung und Stadtrat von Zürich, sowie die Verkehrs- und sportlichen Vereinigungen haben ihre Unterstützung zugesagt. Die Wettfahrt soll anfangs Oktober stattfinden.