1.1. Avant Châtelet.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 387-405

LES GRANDS THÈMES DE FRANÇOIS CHÂTELET [1])

par Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Les travaux mathématiques de F. Châtelet ont porté principalement sur la géométrie diophantienne, et il a contribué de façon significative et très originale à l'arithmétique de trois classes de variétés algébriques: les variétés de Severi-Brauer, les courbes de genre 1 et les surfaces cubiques. Il s'est aussi intéressé aux points exceptionnels (points de torsion) sur les courbes elliptiques, ainsi qu'aux quadriques et hyperquadriques.

Pour rendre compte de ces travaux, j'utiliserai quelques notations usuelles en géométrie algébrique. Etant donnée X/k une variété algébrique définie sur un corps k (i.e. définie par un système d'équations à coefficients dans k) on note $X(k)$ l'ensemble des points k-rationnels de X (solutions à coefficients dans k). Si L est un surcorps de k, on note X_L la variété X considérée sur L et $X(L)$ les points L-rationnels de X. Etant donnée $\bar{k}$ une clôture séparable de k, on note $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. On note $\mathbf{P}^n_k$ l'espace projectif de dimension n sur le corps k.

1. VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

1.1. AVANT CHÂTELET.

Les variétés de Severi-Brauer sont des généralisations en dimension supérieure des coniques. Voici quelques propriétés bien connues des coniques. Une conique $C \subset \mathbf{P}^2_k$ qui possède un point rationnel est k-isomorphe à $\mathbf{P}^1_k$ (Diophante; c'est la paramétrisation par les droites passant par un point). Si une conique possède un point rationnel dans une extension de degré impair de k, elle possède un point k-rationnel. Si k est un corps fini, toute conique possède un point rationnel. Si k est le corps $\mathbf{R}$ des réels,

[1]) François Châtelet, professeur à l'Université de Besançon depuis 1949, est décédé le 19 avril 1987 dans sa 75e année. Il faisait partie de la rédaction de *L'Enseignement Mathématique* depuis 1960. Le présent exposé a été fait à Besançon, le 28 septembre 1987, lors de la réunion à la mémoire de F. Châtelet.

toute conique est $\mathbf{R}$-isomorphe soit à $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ soit à $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Si k est le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, les conditions de congruence (et la condition réelle) suffisent à assurer l'existence d'un point $\mathbf{Q}$-rationnel (Legendre). Plus généralement, si k est un corps de nombres, la condition $C(k_v) \neq \emptyset$ pour chaque complété k_v de k en une place v assure $C(k) \neq \emptyset$ (principe de Hasse).

Comme toute courbe (projective et lisse) définie sur k et de genre 0, c'est-à-dire isomorphe, sur $\bar{k}$, à $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ est k-isomorphe à une conique (Max Noether 1884, Hilbert/Hurwitz 1884, Poincaré 1901), toute telle courbe C satisfait les propriétés ci-dessus. En outre, il existe une extension au plus quadratique K de k telle que $C(K)$ soit non vide. Notons enfin la propriété, qu'on peut attribuer à Hasse (1924): si deux courbes de genre zéro C et D définies sur un corps de nombres k sont isomorphes sur tous les complétés k_v de k, elles sont isomorphes sur k.

D'un point de vue géométrique, les courbes mentionnées ci-dessus admettent deux extensions naturelles en dimension plus grande que 1: les quadriques et les variétés de Severi-Brauer. Pour les quadriques, l'analogue de la plupart des propriétés ci-dessus, et tout spécialement le principe de Hasse, furent établis par Hasse dans ses mémoires sur les formes quadratiques (1923/1924).

Définition. Une variété X de dimension d définie sur le corps k est dite de Severi-Brauer si $\bar{X}$ est *isomorphe* à $\mathbf{P}^d_{\bar{k}}$ (isomorphe sans exceptions).

C'est dans la thèse de François Châtelet que furent développées systématiquement les propriétés de ces variétés. Néanmoins, comme le note B. Segre en 1949, cette notion apparaît pour la première fois chez Severi (1932) qui donne une démonstration géométrique du théorème: si $X(k)$ est non vide, alors X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^d_k$. Par ailleurs, dans le cas $d = 1$, Witt (1934) et Hasse (1935) notent la correspondance entre coniques et algèbres de quaternions. Les algèbres de quaternions (Hamilton, Frobenius) sont un cas spécial des algèbres centrales simples (Dickson, Wedderburn, 1905), qui sont les k-algèbres A telles qu'il existe un isomorphisme de $\bar{k}$-algèbres $A \otimes_k \bar{k} \simeq M_n(\bar{k})$ ($M_n(\bar{k})$ est l'algèbre des matrices (n, n) sur le corps $\bar{k}$). Les propriétés des algèbres centrales simples (« systèmes hypercomplexes ») furent dégagées par Brauer, Hasse, E. Noether et Albert entre 1927 et 1934, et Deuring leur consacra son livre *Algebren* en 1935.

Rappelons ici les propriétés principales. Une k-algèbre simple centrale A est k-isomorphe à une k-algèbre $M_r(D)$ où D est un corps gauche de centre k, le degré $[D : k]$ étant un carré i^2. On appelle i l'index de A. Pour $k = \mathbf{R}$, les seuls corps gauches de dimension finie sur leur centre $\mathbf{R}$ sont $\mathbf{R}$

lui-même et **H** l'algèbre des quaternions de Hamilton (Frobenius). Si k est un corps fini, toute algèbre simple centrale sur k est de la forme $M_r(k)$ (Wedderburn). Enfin, si k est un corps de nombres, et si $A \otimes_k k_v \simeq M_n(k_v)$ pour toute place v de k, alors $A \simeq M_n(k)$ comme k-algèbre (Brauer/Hasse/Noether, Albert). Par ailleurs, Skolem et Noether identifièrent le groupe des automorphismes d'une k-algèbre simple centrale A au quotient A^*/k^* (le groupe des unités A^* agissant par conjugaison intérieure). De son côté, Brauer organisa les classes d'algèbres simples centrales sur k en un groupe, dit depuis groupe de Brauer de k, via le produit tensoriel des algèbres, les algèbres « déployées » $M_n(k)$ étant considérées comme triviales. Ceci l'amena à introduire les « systèmes de facteurs », qui sont l'un des ancêtres de la cohomologie des groupes.

1.2. La contribution de F. Châtelet [1943*a*] [1943*b*] [1944].

Dans sa thèse [1944], François Châtelet généralisa aux variétés de Severi-Brauer tous les résultats connus pour les coniques:

Théorème. *Soient X et Y deux variétés de Severi-Brauer de dimension d sur le corps k.*

1) *Si $X(k)$ est non vide, alors X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^d_k$.*

2) *Il existe un corps K contenant k et de degré $[K:k]$ divisant $(d+1)$ tel que $X(K)$ soit non vide.*

3) *Si L est une extension finie de k, $X(L)$ non vide et $[L:k]$ premier à $(d+1)$, alors X possède un k-point rationnel.*

4) *Si k est fini, X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^d_k$.*

5) *Si k est un corps de nombres, et $X_{k_v} \simeq Y_{k_v}$ pour toute place v de k, alors X est k-isomorphe à Y.*

En particulier, si $X(k_v)$ est non vide pour chaque place v de k, alors X possède un k-point rationnel.

Quelle est la méthode de Châtelet? Pour reprendre le langage de sa thèse, il considère une extension galoisienne finie K/k de groupe G et une variété de (Severi-)Brauer de dimension d « admettant K comme corps de représentation » (les groupes profinis n'avaient pas encore fait leur apparition). A une telle variété est attaché un « système de matrices associées » (« Algèbre de Brauer de degré $d+1$ »). Enfin à une telle algèbre est attaché un « système de scalaires associés ».