EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

Autor(en): **Grivel, Pierre-Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-56590

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 83-105

EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit M et N deux modules à gauche sur un anneau R. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}_R^n(N; M)$ classe, à équivalence près, les n-extensions de M par N.

D'autre part soit G un groupe et A un groupe abélien sur lequel G agit à gauche. On définit le n-ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans A comme étant le groupe $H^n(G; A) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}; A)$ où $\mathbf{Z}$ est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G; A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G; A)$ et $H^2(G; A)$ à partir de l'interprétation de $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^2(\mathbf{Z}; A)$, sans avoir recours au complexe standard.

1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit R un anneau. Soit M et N deux R-modules à gauche. Une n-extension de M par N est une suite exacte de R-modules

$$\xi : 0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \to 0 .$$

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont élémentairement équivalentes s'il existe n morphismes de R-modules $\gamma_i : E_i \to E'_i$ tels que $\gamma_1\alpha = \alpha'$, $\alpha'_i\gamma_i = \gamma_{i+1}\alpha_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha'_n\gamma_n = \alpha_n$, ou n morphismes de R-modules $\gamma'_i : E'_i \to E_i$ tels que $\gamma'_1\alpha' = \alpha$, $\alpha_i\gamma'_i = \gamma'_{i+1}\alpha'_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha_n\gamma'_n = \alpha'_n$.

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont alors équivalentes s'il existe une suite d'équivalences élémentaires reliant ξ à ξ'.

On remarquera que dans le cas $n = 1$ l'équivalence élémentaire est déjà une relation d'équivalence car le morphisme γ est alors un isomorphisme.

On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.2. Soit ξ une n-extension de M par N. Soit $u: M \to M'$ et $v: N' \to N$ deux morphismes de R-modules.

Par produit cofibré on définit l'extension $u\xi$ de M' par N et par produit fibré on définit l'extension ξv de M par N'.

1.3. Soit ξ et ξ' deux n-extensions de M par N. Notons $\nabla: M \oplus M \to M$ l'application codiagonale définie par $\nabla(m_1; m_2) = m_1 + m_2$ et $\Delta: M \to M \oplus M$ l'application diagonale définie par $\Delta(m) = (m; m)$. La somme de Baer de $[\xi]$ et $[\xi']$ est définie en posant $[\xi] + [\xi'] = [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta]$.

Muni de cette opération l'ensemble des classes d'équivalence des n-extensions de M par N est un groupe abélien.

1.4. Il est bien connu que les classes d'équivalence des n-extensions de M par N sont classées par le n-ième foncteur dérivé $\mathrm{Ext}_R^n(N; M)$ du foncteur $\mathrm{Hom}_R(N; M)$.

1.5. Considérons maintenant un groupe G et un groupe abélien A.

Une extension de A par G est une suite exacte de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1 .$$

Si ξ et ξ' sont deux extensions de A par G alors ξ est équivalente à ξ' s'il existe un morphisme de groupe $\gamma: E \to E'$ tel que $\gamma\lambda = \lambda'$ et $\mu'\gamma = \mu$. On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.6. Si ξ est une extension de A par G on définit un morphisme de groupes $\theta: G \to \mathrm{Aut}\,(A)$ en posant, pour tout $g \in G$ et $a \in A$,

$$\lambda\theta(g)\,(a) = s(g)\lambda(a)s(g)^{-1}$$

où $s: G \to E$ est une section ensembliste de μ. Ainsi le groupe abélien A est muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche.

1.7. Si le groupe A est déjà muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche on désignera par $e(G; A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de A par G telles que l'action de G sur A induite par l'extension soit égale à l'action donnée de G sur A.

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g);g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π; on dit que σ_1 est A-conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A-conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de A-conjugaison des sections de π.

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g);g)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

2. Dérivations et extensions

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g\in G} n_g\, g) = \sum_{g\in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G\backslash\{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g)\cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g\cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A.

L'ensemble des dérivations intérieures de G dans A forme un sous-groupe de $\mathrm{Der}(G; A)$ noté $\mathrm{Int}(G; A)$.

2.3. On suppose dorénavant que le groupe G agit à gauche sur le groupe abélien A.

On considère alors A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement à droite sur A. Une dérivation de G dans A est donc une application $f: G \to A$ qui satisfait la condition $f(gh) = g \cdot f(h) + f(g)$. On en déduit que $f(1) = 0$.

De plus, pour tout $a \in A$, la dérivation intérieure $f_a: G \to A$ est définie par $f_a(g) = g \cdot a - a$.

2.4. Lemme. *Le groupe* $\mathrm{Der}(G; A)$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G; A)$ *formé des morphismes de groupes abéliens* $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ *qui satisfont la condition* $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y)$ *pour tous* $x, y \in \mathbf{Z}G$.

Démonstration. Si $f \in \mathrm{Der}(G; A)$ et $x = \sum_{g \in G} n_g g \in \mathbf{Z}G$ on définit $\bar{f}: \mathbf{Z}G \to A$ en posant $\bar{f}(x) = \sum_{g \in G} n_g f(g)$. Inversément si $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}G; A)$ satisfait la condition de l'énoncé et si $j: G \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion évidente, on définit une dérivation f en posant $f = \bar{f} \circ j$.

2.5. Proposition. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$\omega: \mathrm{Der}(G; A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A).$$

Si $f \in \mathrm{Der}(G; A)$ *on a* $\omega(f)(g-1) = f(g)$ *pour tout* $g \in G$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Der}(G; A)$; posons $\omega(f) = \bar{f} \circ i$ où $i: IG \to \mathbf{Z}G$ est l'inclusion. Si $x \in \mathbf{Z}G$ et $y \in IG$ on a, d'après le lemme 2.4,

$$\omega(f)(xy) = \bar{f}(xy) = \bar{f}(x)\varepsilon(y) + x \cdot \bar{f}(y) = x \cdot \omega(f)(y);$$

donc $\omega(f)$ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. De plus, pour tout $g \in G$, on a $\omega(f)(g-1) = \bar{f}(g-1) = f(g) - f(1) = f(g)$.

Définissons maintenant une application

$$\omega': \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A) \to \mathrm{Der}(G; A).$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A)$ et $g \in G$ posons $\omega'(u)(g) = u(g-1)$. Pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned} \omega'(u)(gh) &= u\big(g(h-1)+(g-1)\big) = g \cdot u(h-1) + u(g-1) \\ &= g \cdot \omega'(u)(h) + \omega'(u)(g). \end{aligned}$$

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A. On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\mathrm{Der}(G\,;\,A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG\,;\,A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G\,;A)$ désigne le groupe abélien des classes de A-conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F : h(G\,;A) \to \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma : G \to A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma : G \to A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = (f_\sigma(g)\,;g)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

Si σ' est une section A-conjuguée à σ, il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $(f_{\sigma'}(g)\,;g) = (a + f_\sigma(g) - g\cdot a\,;g)$ donc que $f_\sigma - f_{\sigma'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G\,;A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$-module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$-bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A.

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi : \frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A).$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G\,;A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.

3.2. Théorème. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(G;A) = h(G;A).$$

3.3. Pour construire l'application Φ on commence par considérer l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\theta : 0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Soit $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}(G;A)}{\mathrm{Int}(G;A)}$ représentée par une dérivation $f \in \mathrm{Der}(G;A)$; d'après la proposition 2.5 on peut associer à f un morphisme $\tilde{f} = \omega(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG;A)$.

En faisant le produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ on obtient l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0.$$

Le $\mathbf{Z}G$-module F est le quotient de $\mathbf{Z}G \times A$ par le sous-module engendré par l'ensemble $\{(i(x); -\tilde{f}(x)) \mid x \in IG\}$. Si $\pi : \mathbf{Z}G \times A \to F$ est la projection canonique, les morphismes α et β sont définis en posant $\alpha(a) = \pi(0;a)$ et $\beta\pi(x;a) = \varepsilon(x)$.

Si $f' \in \mathrm{Der}(G;A)$ est un autre représentant de $[f]$ on lui associe de la même façon l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\tilde{f}'\theta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z} \to 0.$$

3.4. Lemme. *Les extensions* $\tilde{f}\theta$ *et* $\tilde{f}'\theta$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : F \to F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & F' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Par hypothèse il existe $b \in A$ tel que $f' - f = f_b$ où $f_b \in \mathrm{Int}(G;A)$.

On définit alors un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\Delta : \mathbf{Z}G \times A \to \mathbf{Z}G \times A$$

en posant $\Delta(x;a) = (x; a - x \cdot b)$.

Si $x \in IG$ on peut écrire $x = \sum_{g\in G} n_g(g-1)$ si bien qu'en utilisant la proposition 2.5 on a

$$\begin{aligned} x \cdot b &= \sum_{g\in G} n_g(g\cdot b - b) = \sum_{g\in G} n_g f_b(g) = \sum_{g\in G} n_g \tilde{f}_b(g-1) \\ &= \tilde{f}_b\Big(\sum_{g\in G} n_g(g-1)\Big) = \tilde{f}_b(x)\,. \end{aligned}$$

On a donc $\Delta(x\,;-\tilde{f}(x)) = (x\,;-\tilde{f}(x)-\tilde{f}_b(x)) = (x\,;-\tilde{f}'(x))$ et on définit δ par la condition $\pi'\Delta = \delta\pi$.

On vérifie immédiatement que $\delta\alpha = \alpha'$ et $\beta'\delta = \beta$.

3.5. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([f]) = [\tilde{f}\theta]$.

3.6. On construit maintenant une application

$$\Psi : \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A) \to \frac{\operatorname{Der}(G\,;A)}{\operatorname{Int}(G\,;A)}\,.$$

Soit $[\xi] \in \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$ et considérons la dérivation $f_e \in \operatorname{Int}(G\,;E)$.

Comme on a $\mu f_e = 0$ on peut définir une application $f^e : G \to A$ par la condition $\lambda f^e = f_e$.

3.7. Lemme. *$f^e \in \operatorname{Der}(G\,;A)$ et $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.*

Démonstration. Pour tous $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda f^e(gh) &= (gh)\cdot e - e = g\cdot(h\cdot e - e) + g\cdot e - e \\ &= g\cdot\lambda f^e(h) + \lambda f^e(g) \\ &= \lambda(g\cdot f^e(h) + f^e(g))\,. \end{aligned}$$

Comme λ est injectif il en résulte que $f^e \in \operatorname{Der}(G\,;A)$. Soit $e' \in E$ tel que $\mu(e') = 1$; puisque $\mu(e-e') = 0$ il existe $b \in A$ tel que $\lambda(b) = e - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \operatorname{Int}(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(f^e - f^{e'})(g) &= (g\cdot e - e) - (g\cdot e' - e') \\ &= g\cdot\lambda(b) - \lambda(b) \\ &= \lambda(g\cdot b - b) = \lambda f_b(g)\,. \end{aligned}$$

Ainsi $f^e - f^{e'} \in \operatorname{Int}(G\,;A)$ et par suite $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e.

3.8. Supposons maintenant que l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} \mathbf{Z} \to 0$$

est un autre représentant de $[\xi]$.

En choisissant un élément $e' \in E'$ tel que $\mu'(e') = 1$ on définit une dérivation $f^{e'} \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$.

3.9. LEMME. $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

Démonstration. Les extensions ξ et ξ' étant équivalentes, il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme $\mu'(\gamma(e)-e') = 0$, il existe $b \in A$ tel que $\lambda'(b) = \gamma(e) - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \gamma\lambda(f^e - f^{e'})\,(g) &= \gamma\lambda f^e(g) - \lambda' f^{e'}(g) \\ &= \gamma(g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot (\gamma(e) - e') - (\gamma(e) - e') \\ &= \lambda'(g \cdot b - b) \\ &= \gamma\lambda f_b(g)\,. \end{aligned}$$

Comme γ est un isomorphisme et λ est injectif il en résulte que $f^e - f^{e'} \in \mathrm{Int}\,(G\,;A)$.

3.10. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\xi]) = [f^e]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

3.11. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{\frac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}}$.

Démonstration. Si $[f] \in \dfrac{\mathrm{Der}\,(G\,;A)}{\mathrm{Int}\,(G\,;A)}$ est représentée par $f \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ alors $\Psi\Phi([f]) = \Psi([\tilde{f}\theta])$ où $\tilde{f}\theta$ est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \to 0$$

décrite au n° 3.3.

Par définition du produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\gamma : \mathbf{Z}G \to F$, défini par $\gamma(x) = \pi(x\,;0)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & IG & \xrightarrow{i} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & \tilde{f}\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

L'élément $e = \pi(1\,;0) \in F$ vérifie la condition $\beta(e) = 1$; donc $\Psi([\tilde{f}\theta])$ est représentée par la dérivation $f^e \in \mathrm{Der}\,(G\,;A)$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\alpha f^e(g) = g \cdot e - e = \pi(g-1\,;0)$.

Or on a $f^e = f$; en effet, compte tenu de la proposition 2.5 on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^e - f)(g) &= \alpha f^e(g) - \alpha\tilde{f}(g-1) \\ &= \alpha f^e(g) - \gamma(g-1) \\ &= \pi(g-1\,;0) - \pi(g-1\,;0) = 0\,. \end{aligned}$$

3.12. LEMME. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;\,A)}$.

Démonstration. Soit $[\xi] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \to 0$$

et choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$; on a alors $\Phi\Psi([\xi]) = [\tilde{f^e}\theta]$.

Il s'agit donc de démontrer que les extensions ξ et $\tilde{f}^e\theta$ sont équivalentes; pour cela il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\delta : E \to F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & F & \underset{\beta}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si $u \in E$ on a $\mu(u - \mu(u)e) = 0$; on peut donc définir un morphisme de groupes abéliens $\upsilon : E \to A$ tel que $\lambda\upsilon(u) = u - \mu(u)e$ pour tout $u \in E$.

Définissons alors δ en posant $\delta(u) = \pi(\mu(u)\,;\upsilon(u))$. Il faut vérifier que δ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules; or si $g \in G$ et $u \in E$ on a

$$g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = \pi(\mu(u)\,(g-1)\,;g \cdot \upsilon(u) - \upsilon(g \cdot u))\,.$$

Mais

$$\begin{aligned}\lambda(g \cdot \upsilon(u) - \upsilon(g \cdot u)) &= g \cdot (u - \mu(u)e) - (g \cdot u - \mu(u)e)\\ &= -\ \mu(u)\,(g \cdot e - e)\\ &= -\ \mu(u)\lambda f^e(g)\\ &= \lambda(-\mu(u)\tilde{f}^e(g-1))\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que $g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = 0$.

Finalement on vérifie immédiatement que $\delta\lambda = \alpha$ et $\beta\delta = \mu$.

3.13. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\xi_i] \in \operatorname{Ext}^1_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A)$ $(i = 1, 2)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\xi_i : 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $e_i \in E_i$ tel que $\mu_i(e_i) = 1$ et on considère la dérivation $f^{e_i} \in \operatorname{Der}(G; A)$ définie par $\lambda_i f^{e_i}(g) = g \cdot e_i - e_i$.

On a alors $\Psi([\xi_1]) + \Psi([\xi_2]) = [f^{e_1}] + [f^{e_2}] = [f^{e_1} + f^{e_2}]$.

Maintenant $[\xi_1] + [\xi_2]$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\xi_0 = \nabla(\xi_1 \oplus \xi_2)\Delta$ et on a le diagramme commutatif suivant

(3.13.1)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A \oplus A & \xrightarrow{\lambda_1 \oplus \lambda_2} & E_1 \oplus E_2 & \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \to & 0\\
 & & \nabla \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \underset{\lambda}{\to} & E & \underset{\mu}{\to} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} & \to & 0\\
 & & 1_A \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow \Delta & & \\
0 & \to & A & \underset{\lambda_0}{\to} & E_0 & \underset{\mu_0}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0\,.
\end{array}$$

On choisit un élément $e_0 \in E_0$ tel que $\mu_0(e_0) = 1$ et on considère la dérivation $f^{e_0} \in \operatorname{Der}(G; A)$ définie par $\lambda_0 f^{e_0}(g) = g \cdot e_0 - e_0$.

On a alors $\Psi([\xi_1] + [\xi_2]) = [f^{e_0}]$.

3.14. LEMME. $f^{e_1} + f^{e_2} - f^{e_0} \in \operatorname{Int}(G; A)$.

Démonstration. Comme $\mu(\gamma(e_1; e_2) - \delta(e_0)) = 0$, il existe un élément $a \in A$ tel que $\lambda(a) = \gamma(e_1; e_2) - \delta(e_0)$. Considérons la dérivation $f_a \in \operatorname{Int}(G; A)$. Pour tout $g \in G$ on a, compte tenu du diagramme (3.13.1),

$$\lambda(f^{e_1}(g) + f^{e_2}(g) - f^{e_0}(g) - f_a(g)) = 0\,.$$

4. Le groupe $H^2(G;A)$

4.1. On reprend les hypothèses de 3.1. On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi: e(G;A) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z};A).$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G;A)$ on obtient alors le résultat classique suivant.

4.2. Théorème. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^2(G;A) = e(G;A).$$

4.3. On va construire l'application Φ.

Soit $[\xi] \in e(G;A)$ représentée par l'extension de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1.$$

Notons F le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $E\backslash\{1\}$; autrement dit $x \in F$ si et seulement si $x = \sum_{e\in E\backslash\{1\}} p_e e$, où $p_e \in \mathbf{Z}G$ et $p_e = 0$ pour presque tous les indices e. On fait la convention que $p_1 1 = 0$ dans F.

Soit L le sous-$\mathbf{Z}G$-module de F engendré par les éléments de F de la forme $e_1e_2 - \mu(e_1)\cdot e_2 - e_1$ où $e_1, e_2 \in E$. On notera en particulier que les éléments de la forme $-\mu(e)e^{-1} - e$ et $-\mu(e^{-1})\cdot e - e^{-1}$, où $e \in E$, sont dans L.

On pose $M = F/L$ et on note $\pi: F \to M$ la projection canonique.

4.4. On considère maintenant la suite de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta: 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0.$$

Le morphisme ε est l'augmentation; on va définir les deux autres morphismes.

Pour tout $a \in A$ on pose $\alpha(a) = \pi(\lambda(a))$, mais il faut vérifier que α est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules. Soit $s: G \to E$ une section ensembliste de μ.

Pour tout $g \in G$ et $a \in A$ on a

$$\begin{aligned}\alpha(g\cdot a) - g\cdot\alpha(a) &= \pi\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - g\cdot\lambda(a)\big)\\ &= \pi\big(\big(s(g)\lambda(a)s(g)^{-1} - \mu(s(g)\lambda(a))s(g)^{-1}\\ &\quad - s(g)\lambda(a)\big) + \big(s(g)\lambda(a) - \mu(s(g))\lambda(a) - s(g)\big) - \big(-\mu(s(g))s(g)^{-1} - s(g)\big)\big) = 0.\end{aligned}$$

Enfin on définit un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\beta}: F \to \mathbf{Z}G$ en posant $\bar{\beta}(e) = \mu(e) - 1$ pour tout $e \in E$ puis en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette application. On vérifie immédiatement que $\bar{\beta}(L) = 0$. On définit alors β par la condition $\beta\pi = \bar{\beta}$.

4.5. LEMME. *La suite* η *est exacte.*

Démonstration. On vérifie immédiatement que $\beta\alpha = 0$ et $\varepsilon\beta = 0$. On peut donc considérer η comme un complexe de $\mathbf{Z}G$-modules et pour démontrer son exactitude il suffit de construire une homotopie contractante

$$0 \to A \underset{\underset{\sigma_2}{\leftarrow}}{\overset{\alpha}{\to}} M \underset{\underset{\sigma_1}{\leftarrow}}{\overset{\beta}{\to}} \mathbf{Z}G \underset{\underset{\sigma_0}{\leftarrow}}{\overset{\varepsilon}{\to}} \mathbf{Z} \to 0 .$$

On définit σ_0 en posant $\sigma_0(1) = 1$.

Soit $s: G \to E$ une section ensembliste de μ telle que $s(1) = 1$; on définit σ_1 en posant $\sigma_1\left[\sum_{g\in G} n_g g\right] = \sum_{g\in G} n_g \pi(s(g))$. Maintenant pour tout $g \in G$ et $e \in E$ on a $\mu(s(g)es(g\mu(e))^{-1}) = 1$; on peut donc définir une application $h: G \times E \to A$ en posant

$$\lambda h(g\,; e) = s(g)es(g\mu(e))^{-1} .$$

On vérifie immédiatement à partir de cette définition que l'on a

$$h(g\,; e_1e_2) = h(g\mu(e_1)\,; e_2) + h(g\,; e_1) . \tag{4.5.1}$$

Comme tout élément $x \in F$ peut s'écrire $x = \sum_{(g\,;\,e)\in G\times(E\setminus\{1\})} n_{g,e}ge$ où $n_{g,e} \in \mathbf{Z}$ et $n_{g,e} = 0$ pour presque tous les indices $(g\,; e)$, on définit une application $\sigma: F \to A$ en posant $\sigma(x) = \sum_{(g\,;\,e)} n_{g,e}h(g\,; e)$.

De la relation (4.5.1) on déduit que $\sigma(L) = 0$; on peut donc définir σ_2 par la condition $\sigma_2\pi = \sigma$.

On vérifie sans peine que $\varepsilon\sigma_0 = 1_{\mathbf{Z}}$ et $\sigma_0\varepsilon + \beta\sigma_1 = 1_{\mathbf{Z}G}$.

Pour vérifier que $\sigma_1\beta + \alpha\sigma_2 = 1_M$ il suffit de vérifier que pour tout $g \in G$ et $e \in E\setminus\{1\}$ on a $(\sigma_1\beta+\alpha\sigma_2)\pi(ge) = \pi(ge)$. Or on a

$$\begin{aligned}
\sigma_1\beta\pi(ge) + \alpha\sigma_2\pi(ge) &= \sigma_1\bar{\beta}(ge)+\alpha h(g\,; e)\\
&= \sigma_1(g\bar{\beta}(e))+\pi\lambda h(g\,; e)\\
&= \sigma_1(g\mu(e)-g)+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g\mu(e))-\pi(s(g))+\pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1})\\
&= \pi(s(g)es(g\mu(e))^{-1}+s(g\mu(e))-s(g)-ge)+\pi(ge)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi((s(g)es(g\mu(e))^{-1} - \mu(s(g)e)s(g\mu(e))^{-1} - s(g)e) \\
&\quad + (s(g)e - \mu(s(g))e - s(g)) - (-\mu(s(g\mu(e))s(g\mu(e))^{-1} \\
&\quad - s(g\mu(e)))) + \pi(ge) \\
&= \pi(ge)\,.
\end{aligned}$$

Finalement pour vérifier que $\sigma_2\alpha = 1_A$ il suffit de se rappeler que $s(1) = 1$.

4.6. Supposons que l'extension de groupes

$$\xi' : 0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

est un autre représentant de $[\xi]$ et soit

$$\eta' : 0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules qui lui est associée.

4.7. LEMME. *Les extensions* η *et* η' *sont équivalentes.*

Démonstration. Par hypothèse il existe un morphisme de groupes $\gamma : E \to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\
 & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1
\end{array}$$

soit commutatif.

Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M \to M'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & 1_{\mathbf{Z}G} \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\
0 & \to & A & \xrightarrow[\alpha']{} & M' & \xrightarrow[\beta']{} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow[\varepsilon]{} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

On peut étendre l'application $\gamma : E \to E'$ en un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\gamma} : F \to F'$ et comme on a $\bar{\gamma}(L) \subset L'$, on définit φ par la condition $\varphi\pi = \pi'\bar{\gamma}$. On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha = \alpha'$ et $\beta'\varphi = \beta$.

4.8. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([\xi]) = [\eta]$.

4.9. On construit maintenant une application

$$\Psi : \operatorname{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,; A) \to e(G\,; A)\,.$$

Soit $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

Choisissons un élément $n \in N$ tel que $\gamma(n) = 1$ et une section ensembliste $\sigma : \mathrm{Im}\,\beta \to M$ de β. La dérivation $d_n \in \mathrm{Int}\,(G\,; N)$ vérifie la condition $\gamma d_n = 0$. On peut donc définir une application $u : G \to M$ en posant $u = \sigma d_n$; autrement dit pour tout $g \in G$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$.

L'application u n'est pas une dérivation, cependant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a $g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2) \in \mathrm{Ker}\,\beta$. On définit alors une application $f : G \times G \to A$ en posant $\alpha f(g_1\,; g_2) = g_1 \cdot u(g_2) + u(g_1) - u(g_1 g_2)$.

Finalement considérons l'ensemble $E = A \times G$ muni de la loi de multiplication donnée par

$$(a_1\,; g_1)\,(a_2\,; g_2) = \big(a_1 + g_1 \cdot a_2 + f(g_1\,; g_2)\,; g_1 g_2\big)\,.$$

4.10. LEMME. *E est un groupe.*

Démonstration. On a $\beta u(1) = 0$; donc il existe un unique élément $e \in A$ tel que $\alpha(e) = -u(1)$. On vérifie facilement que l'élément $(e\,; 1) \in E$ est neutre en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $g \cdot e + f(g\,; 1) = 0$ et $e + f(1\,; g) = 0$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\beta\big(g \cdot u(g^{-1}) + u(g)\big) = 0$; on peut donc définir une application $h : G \to A$ en posant

$$\alpha h(g) = g \cdot u(g^{-1}) + u(g)\,.$$

On vérifie cette fois que l'élément $\big(-g^{-1} \cdot a - g^{-1} \cdot h(g)\,; g^{-1}\big) \in E$ est l'inverse de l'élément $(a\,; g) \in E$ en remarquant que pour tout $g \in G$ on a $f(g\,; g^{-1}) - h(g) = e$ et $f(g^{-1}\,; g) - g^{-1} \cdot h(g) = e$.

Enfin pour vérifier l'associativité de la loi de multiplication, il suffit de remarquer que pour tous $g_1, g_2, g_3 \in G$ on a

$$f(g_1\,; g_2) + f(g_1 g_2\,; g_3) - g_1 \cdot f(g_2\,; g_3) - f(g_1\,; g_2 g_3) = 0\,.$$

4.11. Considérons la suite de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1\,.$$

Puisque $e + f(1\,; 1) = 0$, l'application λ définie en posant $\lambda(a) = (a + e\,; 1)$ est un morphisme de groupes. D'autre part il est immédiat que l'application μ, définie en posant $\mu(a\,; g) = g$, est un morphisme de groupes.

4.12. LEMME. *ξ est une extension de groupes telle que l'action de G sur A induite par l'extension est égale à l'action donnée de G sur A.*

Démonstration. Il est immédiat que la suite est exacte.
L'action de G sur A induite par l'extension est donnée par

$$\begin{aligned}\lambda(\theta(g)(a)) &= (0;g)\lambda(a)(0;g)^{-1}\\ &= \big(g\cdot a+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});gg^{-1}\big)\\ &= \big(g\cdot a+e-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1});1\big)\\ &= (g\cdot a+e;1)\\ &= \lambda(g\cdot a)\end{aligned}$$

car $-e+g\cdot e+f(g;1)-h(g)+f(g;g^{-1})=0$ pour tout $g\in G$.

4.13. On notera avec un $'$ les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'un élément $n'\in N$ tel que $\gamma(n')=1$ et d'une section ensembliste $\sigma'\colon \operatorname{Im}\beta\to M$ de β.

4.14. LEMME. *Les extensions ξ et ξ' sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de groupes $\delta\colon E\to E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1\\ & & 1_A\downarrow & & \delta\downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\lambda']{} & E' & \xrightarrow[\mu']{} & G & \to & 1\end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\gamma(n-n')=0$ on peut trouver un élément $m\in M$ tel que $\beta(m)=n-n'$.

Maintenant pour tout $g\in G$ on a $\beta\big(u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\big)=0$; on peut donc définir une application $k\colon G\to A$ en posant

$$\alpha k(g) = u(g)-u'(g)-g\cdot m+m\,.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2\in G$ on a

$$(f-f')(g_1;g_2) = g_1\cdot k(g_2)+k(g_1)-k(g_1g_2)\,. \qquad (4.14.1)$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a;g) = \big(a+k(g);g\big)$$

et en utilisant la relation (4.14.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \lambda'$ car $e' = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\mu'\delta = \mu$.

4.15. On notera maintenant avec une — les différents éléments de la construction précédente obtenus à partir du choix d'une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\bar{\eta}: 0 \to A \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{M} \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{N} \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathbf{Z} \to 0$$

représentant $[\eta]$.

4.16. LEMME. Les extensions ξ et $\bar{\xi}$ sont équivalentes.

Démonstration. Il suffit de vérifier que s'il existe des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules φ et ψ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha} & M & \xrightarrow{\beta} & N & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & {\scriptstyle \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_{\mathbf{Z}}} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\alpha}]{} & \bar{M} & \xrightarrow[\bar{\beta}]{} & \bar{N} & \xrightarrow[\bar{\gamma}]{} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif, alors il existe un morphisme de groupes $\delta: E \to \bar{E}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & G & \to & 1 \\ & & {\scriptstyle 1_A}\downarrow & & {\scriptstyle \delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \\ 0 & \to & A & \xrightarrow[\bar{\lambda}]{} & \bar{E} & \xrightarrow[\bar{\mu}]{} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme on a $\bar{\gamma}(\psi(n)-\bar{n}) = 0$ on peut trouver un élément $\bar{m} \in \bar{M}$ tel que $\bar{\beta}(\bar{m}) = \psi(n) - \bar{n}$.

Maintenant pour tout $g \in G$ on a $\bar{\beta}(\varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}) = 0$; on peut donc définir une application $k: G \to A$ en posant

$$\bar{\alpha}k(g) = \varphi u(g) - \bar{u}(g) - g \cdot \bar{m} + \bar{m}.$$

Par calcul direct on vérifie que pour tout $g_1, g_2 \in G$ on a

$$(4.16.1) \qquad (f - \bar{f})(g_1; g_2) = g_1 \cdot k(g_2) + k(g_1) - k(g_1 g_2).$$

On définit alors δ en posant

$$\delta(a; g) = (a + k(g); g)$$

et en utilisant la relation (4.16.1) on voit que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda = \bar{\lambda}$ car $\bar{e} = e + k(1)$; enfin il est immédiat que $\bar{\mu}\delta = \mu$.

4.17. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\eta]) = [\xi]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ.

4.18. LEMME. $\Psi\Phi = 1_{e(G\,;\,A)}$.

Démonstration. Si $[\xi] \in e(G\,;A)$ est représentée par l'extension de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

alors $\Psi\Phi([\xi]) = \Psi([\eta]) = [\xi']$ où η est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 1$$

définie aux n^{os} 4.3 et 4.4, et ξ' est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} G \to 1$$

qu'on va obtenir en appliquant la construction des n^{os} 4.9, 4.10 et 4.11.

On peut choisir l'élément $n = 1 \in \mathbf{Z}G$ et définir l'application $u: G \to M$ en composant les applications du diagramme

$$G \xrightarrow{\tau} E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} M\,,$$

où τ est une section ensembliste de μ telle que $\tau(1) = 1$ et i est l'inclusion évidente, car pour tout $g \in G$ on a

$$\beta u(g) = \beta\pi i\tau(g) = \bar{\beta}\tau(g) = \mu\tau(g) - 1 = g - 1\,.$$

L'application $f: G \times G \to A$ qui permet de définir la multiplication du groupe $E' = A \times G$ satisfait donc la condition

$$\alpha f(g_1\,;g_2) = \pi\big(g_1 \cdot \tau(g_2) + \tau(g_1) - \tau(g_1g_2)\big)\,. \tag{4.18.1}$$

De plus comme $i(1) = 0$ dans F on a $u(1) = 0$ donc $(0\,;1)$ est l'élément neutre de E' et le morphisme λ' est donné par $\lambda'(a) = (a\,;1)$.

Maintenant pour tous $g_1, g_2 \in G$ on a

$$\lambda f(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}\,. \tag{4.18.2}$$

En effet comme $\mu\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}\big) = 1$ on peut définir une application $\bar{f}: G \times G \to A$ en posant $\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) = \tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1}$, et en tenant compte de (4.18.1) et de la définition de α dans 4.4 on a

$$\begin{aligned}
\alpha(\bar{f}(g_1\,;g_2) - f(g_1\,;g_2)) &= \pi\lambda\bar{f}(g_1\,;g_2) - \alpha f(g_1\,;g_2)\\
&= \pi\big(\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1} - g_1\tau(g_2) - \tau(g_1) + \tau(g_1g_2)\big)\\
&= \pi\big((\tau(g_1)\tau(g_2)\tau(g_1g_2)^{-1} - \mu(\tau(g_1)\tau(g_2))\tau(g_1g_2)^{-1} - \tau(g_1)\tau(g_2)\big)
\end{aligned}$$

$$+ \big(\tau(g_1)\tau(g_2) - \mu(\tau(g_1))\tau(g_2) - \tau(g_1)\big) - \big(-\mu(\tau(g_1g_2))\tau(g_1g_2)^{-1}$$
$$- \tau(g_1g_2)\big)\big) = 0 .$$

Finalement pour montrer que les extensions de groupes ξ' et ξ sont équivalentes, il faut construire un morphisme de groupes $\delta : E' \to E$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\lambda'} & E' & \xrightarrow{\mu'} & G & \to & 1 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & & \\ 0 & \to & A & \underset{\lambda}{\to} & E & \underset{\mu}{\to} & G & \to & 1 \end{array}$$

soit commutatif.

On pose $\delta(a ; g) = \lambda(a)\tau(g)$.

En utilisant la formule (4.18.2) on vérifie facilement que δ est un morphisme de groupes.

On a $\delta\lambda' = \lambda$ car $\tau(1) = 1$ et il est immédiat que $\mu\delta = \mu'$.

4.19. Lemme. $\Phi\Psi = 1_{\mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;\,A)}$.

Démonstration. Si $[\eta] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta : 0 \to A \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Z} \to 0$$

alors $\Phi\Psi([\eta]) = \Phi([\xi]) = [\eta']$ où ξ est l'extension de groupes

$$0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie aux n^os 4.9, 4.10 et 4.11 et η' est l'extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

définie aux n^os 4.3 et 4.4.

Pour montrer que les extensions de $\mathbf{Z}G$-modules η' et η sont équivalentes il faut construire des morphismes de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi : M' \to M$ et $\psi : \mathbf{Z}G \to N$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{\alpha'} & M' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \to & 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & & \\ 0 & \to & A & \underset{\alpha}{\to} & M & \underset{\beta}{\to} & N & \underset{\gamma}{\to} & \mathbf{Z} & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Soit F' le $\mathbf{Z}G$-module libre engendré par l'ensemble $(A \times G)\backslash\{(e\,;1)\}$ sous-jacent au groupe E et soit $\pi' : F' \to M'$ la projection canonique. Soit encore $u: G \to M$ l'application définie au n° 4.9. En posant $\bar{\varphi}(a\,;g) = \alpha(a)+u(g)$ et en étendant $\mathbf{Z}G$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\bar{\varphi}: F' \to M$ tel que pour tout $(a_1\,;g_1), (a_2\,;g_2) \in E$ on a

$$\bar{\varphi}\big((a_1\,;g_1)\,(a_2\,;g_2)-\mu(a_1\,;g_1)\cdot(a_2\,;g_2)-(a_1\,;g_1)\big) = 0$$

Il existe donc un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\varphi: M' \to M$ tel que $\varphi\pi' = \bar{\varphi}$.

Maintenant en posant $\psi(g) = g\cdot n$, où $n \in N$ est l'élément choisi dans la construction de η, et en étendant $\mathbf{Z}$-linéairement cette définition on obtient un morphisme de $\mathbf{Z}G$-modules $\psi: \mathbf{Z}G \to N$.

On vérifie immédiatement que $\varphi\alpha' = \alpha$, $\beta\varphi = \psi\beta'$ et $\gamma\psi = \varepsilon$.

4.20. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\eta_i] \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}\,;A)$ $(i=1,2)$ représentée pour la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$\eta_i:\ 0 \to A \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} N_i \xrightarrow{\gamma_i} \mathbf{Z} \to 0\,.$$

On choisit un élément $n_i \in N_i$ tel que $\gamma_i(n_i) = 1$. Si $u_i: G \to M_i$ est donnée par la condition $\beta_i u_i(g) = g\cdot n_i - n_i$, on définit $f_i: G\times G \to A$ par la condition $\alpha_i f_i(g_1\,;g_2) = u_i(g_1) + g_1\cdot u_i(g_2) - u_i(g_1 g_2)$. On pose $E_i = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_i.

Alors à l'extension η_i est associée l'extension de groupes

$$\xi_i:\ 0 \to A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} G \to 1$$

où $\lambda_i(a) = (a+e_i\,;1)$, avec $\alpha_i(e_i) = -u_i(1)$, et $\mu_i(a\,;g) = g$.

4.21. La somme $[\eta_1] + [\eta_2] = [\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta]$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{lcccccccccc}
\eta_1\oplus\eta_2 & : 0 \to & A\oplus A & \xrightarrow{\bar\alpha} & M_1\oplus M_2 & \xrightarrow{\bar\beta} & N_1\oplus N_2 & \xrightarrow{\bar\gamma} & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & 1_{A\oplus A}\uparrow & & 1_{M_1\oplus M_2}\uparrow & & \varphi\uparrow & & \uparrow\Delta & \\
(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A\oplus A & \xrightarrow[\bar\alpha]{} & M_1\oplus M_2 & \xrightarrow[\beta_0]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0 \\
 & & \nabla\downarrow & & \psi\downarrow & & 1_N\downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} & \\
\nabla(\eta_1\oplus\eta_2)\Delta & : 0 \to & A & \xrightarrow[\alpha]{} & M & \xrightarrow[\beta]{} & N & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbf{Z} & \to 0
\end{array}$$

où $\bar\alpha = \alpha_1\oplus\alpha_2$, $\bar\beta = \beta_1\oplus\beta_2$, $\bar\gamma = \gamma_1\oplus\gamma_2$, N est le produit fibré de $\bar\gamma$ et Δ et M est le produit cofibré de $\bar\alpha$ et ∇.

4.22. Soit H un groupe. On voit immédiatement que la construction des n^{os} 4.9, 4.10 et 4.11 se généralise en une correspondance entre les 2-extensions d'un $\mathbf{Z}H$-module M par un anneau unitaire commutatif Z sur lequel H agit trivialement, et les extensions de groupes de M par H.

En particulier si on considère $\eta_1 \oplus \eta_2$ comme une 2-extension de $\mathbf{Z}[G \times G]$-modules de $A \oplus A$ par $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, on peut lui associer l'extension de groupes

$$\bar{\xi} : 0 \to A \times A \xrightarrow{\bar{\lambda}} \bar{E} \xrightarrow{\bar{\mu}} G \times G \to 1$$

définie de la façon suivante:

L'élément $\bar{n} = (n_1 ; n_2) \in N_1 \oplus N_2$ satisfait $\bar{\gamma}(\bar{n}) = (1 ; 1)$, donc si on pose $\bar{u} = u_1 \oplus u_2 : G \times G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\bar{\beta}\bar{u}(g ; h) = (g ; h) \cdot \bar{n} - \bar{n}$. On peut alors définir $\bar{f} : (G \times G) \times (G \times G) \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha}\bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = \bar{u}(g_1 ; h_1) + (g_1 ; h_1) \cdot \bar{u}(g_2 ; h_2) - \bar{u}(g_1 g_2 ; h_1 h_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

$$\bar{f}((g_1 ; h_1) ; (g_2 ; h_2)) = (f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(h_1 ; h_2)) . \tag{4.22.1}$$

On pose $\bar{E} = (A \times A) \times (G \times G)$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par $\bar{f}$.

On a $\bar{\lambda}(a ; b) = ((a ; b) + \bar{e} ; (1 ; 1))$, où $\bar{e} = (e_1 ; e_2)$, et $\bar{\mu}((a ; b) ; (g ; h)) = (g ; h)$.

4.23. Lemme. *Les extensions de groupes* $\xi_1 \times \xi_2$ *et* $\bar{\xi}$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Compte tenu de la formule (4.22.1) l'application $\delta : \bar{E} \to E_1 \times E_2$, définie en posant

$$\delta((a ; b) ; (g ; h)) = ((a ; g) ; (b ; h)) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{lccccccccc}
\bar{\xi} & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to 1 \\
& & 1_{A \times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{G \times G} & \\
\xi_1 \times \xi_2 & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow[\lambda_1 \times \lambda_2]{} & E_1 \times E_2 & \xrightarrow[\mu_1 \times \mu_2]{} & G \times G & \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.24. Maintenant à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta$ on associe l'extension de groupes

$$\xi_0 : 0 \to A \times A \xrightarrow{\lambda_0} E_0 \xrightarrow{\mu_0} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Comme $\bar{\gamma}(\bar{n}) = \Delta(1)$ l'élément $n = (\bar{n}; 1) \in N$ et satisfait $\gamma(n) = 1$; donc si on pose $u_0 = u_1 \oplus u_2 : G \to M_1 \oplus M_2$ on a $\beta_0 u_0(g) = g \cdot n - n$. On peut alors définir $f_0 : G \times G \to A \times A$ par la condition

$$\bar{\alpha} f_0(g_1 ; g_2) = u_0(g_1) + g_1 \cdot u_0(g_2) - u_0(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

(4.24.1) $$f_0(g_1 ; g_2) = \big(f_1(g_1 ; g_2) ; f_2(g_1 ; g_2)\big) .$$

On pose $E_0 = (A \times A) \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f_0.

On a $\lambda_0(a ; b) = \big((a ; b) + \bar{e} ; 1\big)$ et $\mu_0\big((a ; b) ; g\big) = g$.

4.25. Lemme. *Les extensions de groupes $\bar{\xi}\Delta$ et ξ_0 sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{rcccccccc}
\bar{\xi} : & 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}} & \bar{E} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & G \times G & \to 1 \\
& & 1_{A\times A} \uparrow & & \omega \uparrow & & \uparrow \Delta & \\
\bar{\xi}\Delta : & 0 \to & A \times A & \xrightarrow[\bar{\lambda}']{} & \bar{E}' & \xrightarrow[\bar{\mu}']{} & G & \to 1
\end{array}$$

où $\bar{E}'$ est le produit fibré de $\bar{\mu}$ et Δ; donc un élément de $\bar{E}'$ est de la forme $\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big)$.

Compte tenu de la formule (4.24.1) l'application $\delta : \bar{E}' \to E_0$, définie en posant

$$\delta\big((a ; b) ; (g ; g) ; g\big) = \big((a ; b) ; g\big) ,$$

est un morphisme de groupes tel que le diagramme

$$\begin{array}{rcccccccc}
\bar{\xi}\Delta : & 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\bar{\lambda}'} & \bar{E}' & \xrightarrow{\bar{\mu}'} & G & \to 1 \\
& & 1_{A\times A} \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\xi_0 : & 0 \to & A \times A & \xrightarrow[\lambda_0]{} & E_0 & \xrightarrow[\mu_0]{} & G & \to 1
\end{array}$$

soit commutatif.

4.26. Finalement à la 2-extension de $\mathbf{Z}G$-modules $\nabla((\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta)$ on associe l'extension de groupes

$$\xi : 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1$$

définie de la façon suivante.

Si on pose $u = \psi u_0 : G \to M$ on a $\beta u(g) = g \cdot n - n$, donc on peut définir $f : G \times G \to A$ par la condition

$$\alpha f(g_1 ; g_2) = u(g_1) + g_1 \cdot u(g_2) - u(g_1 g_2) .$$

On vérifie facilement qu'on a la relation

(4.26.1) $$f(g_1 ; g_2) = f_1(g_1 ; g_2) + f_2(g_1 ; g_2) .$$

On pose $E = A \times G$ et on munit cet ensemble de la loi de groupe induite par f.

On a $\lambda(a) = (a + \nabla\bar{e} ; 1)$ et $\mu(a ; g) = g$.

4.27. Lemme. *Les extensions de groupes* $\nabla\xi_0$ *et* ξ *sont équivalentes.*

Démonstration. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi_0 & : 0 \to & A \times A & \xrightarrow{\lambda_0} & E_0 & \xrightarrow{\mu_0} & G & \to 1 \\
 & & \nabla \downarrow & & \omega_0 \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\nabla\xi_0 & : 0 \to & A & \xrightarrow[\lambda_0']{} & E_0' & \xrightarrow[\mu_0']{} & G & \to 1
\end{array}$$

où E_0' est le produit cofibré de λ_0 et ∇.

Compte tenu de la formule (4.26.1) l'application $\omega : E_0 \to E$, définie en posant $\omega((a ; b) ; g) = (\nabla(a ; b) ; g)$, est un morphisme de groupes tel que $\omega\lambda_0 = \lambda\nabla$ et $\mu\omega = \mu_0$. D'après la propriété universelle du produit cofibré il existe donc un morphisme de groupe $\delta : E_0' \to E$ tel que $\delta\lambda_0' = \lambda$ et $\delta\omega_0 = \omega$.

On peut donc considérer le diagramme

$$\begin{array}{cccccccc}
\nabla\xi_0 : 0 \to & A & \xrightarrow{\lambda_0'} & E_0' & \xrightarrow{\mu_0'} & G & \to 1 \\
 & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_G & \\
\xi \quad : 0 \to & A & \xrightarrow[\lambda]{} & E & \xrightarrow[\mu]{} & G & \to 1
\end{array}$$

dans lequel le premier carré est commutatif. Le deuxième carré est aussi commutatif car on a $\mu\delta\omega_0 = \mu'_0\omega_0$ et ω_0 est surjectif car ∇ est surjectif.

4.28. La relation d'équivalence entre extensions étant stable vis-à-vis des produits fibrés et cofibrés, les résultats précédents donnent

$$\begin{aligned}\Psi([\eta_1]) + \Psi([\eta_2]) &= [\nabla(\xi_1 \times \xi_2)\Delta] = [\nabla\bar{\xi}\Delta] \\ &= [\nabla\xi_0] = [\xi] = \Psi([\nabla(\eta_1 \oplus \eta_2)\Delta]) = \Psi([\eta_1] + [\eta_2]).\end{aligned}$$

(Reçu le 8 juillet 1987)

Pierre-Paul Grivel
Université de Genève
Section de mathématiques
Rue du Lièvre 2-4
CH — 1211 Genève 24

vide-leer-empty