1. Variétés de Severi-Brauer

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 387-405

LES GRANDS THÈMES DE FRANÇOIS CHÂTELET [1]

par Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Les travaux mathématiques de F. Châtelet ont porté principalement sur la géométrie diophantienne, et il a contribué de façon significative et très originale à l'arithmétique de trois classes de variétés algébriques: les variétés de Severi-Brauer, les courbes de genre 1 et les surfaces cubiques. Il s'est aussi intéressé aux points exceptionnels (points de torsion) sur les courbes elliptiques, ainsi qu'aux quadriques et hyperquadriques.

Pour rendre compte de ces travaux, j'utiliserai quelques notations usuelles en géométrie algébrique. Etant donnée X/k une variété algébrique définie sur un corps k (i.e. définie par un système d'équations à coefficients dans k) on note $X(k)$ l'ensemble des points k-rationnels de X (solutions à coefficients dans k). Si L est un surcorps de k, on note X_L la variété X considérée sur L et $X(L)$ les points L-rationnels de X. Etant donnée $\bar{k}$ une clôture séparable de k, on note $\bar{X} = X_{\bar{k}}$. On note $\mathbf{P}_k^n$ l'espace projectif de dimension n sur le corps k.

1. VARIÉTÉS DE SEVERI-BRAUER

1.1. AVANT CHÂTELET.

Les variétés de Severi-Brauer sont des généralisations en dimension supérieure des coniques. Voici quelques propriétés bien connues des coniques. Une conique $C \subset \mathbf{P}_k^2$ qui possède un point rationnel est k-isomorphe à $\mathbf{P}_k^1$ (Diophante; c'est la paramétrisation par les droites passant par un point). Si une conique possède un point rationnel dans une extension de degré impair de k, elle possède un point k-rationnel. Si k est un corps fini, toute conique possède un point rationnel. Si k est le corps $\mathbf{R}$ des réels,

[1] François Châtelet, professeur à l'Université de Besançon depuis 1949, est décédé le 19 avril 1987 dans sa 75e année. Il faisait partie de la rédaction de *L'Enseignement Mathématique* depuis 1960. Le présent exposé a été fait à Besançon, le 28 septembre 1987, lors de la réunion à la mémoire de F. Châtelet.

toute conique est **R**-isomorphe soit à $\mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$ soit à $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Si k est le corps **Q** des rationnels, les conditions de congruence (et la condition réelle) suffisent à assurer l'existence d'un point **Q**-rationnel (Legendre). Plus généralement, si k est un corps de nombres, la condition $C(k_v) \neq \emptyset$ pour chaque complété k_v de k en une place v assure $C(k) \neq \emptyset$ (principe de Hasse).

Comme toute courbe (projective et lisse) définie sur k et de genre 0, c'est-à-dire isomorphe, sur $\bar{k}$, à $\mathbf{P}^1_{\bar{k}}$ est k-isomorphe à une conique (Max Noether 1884, Hilbert/Hurwitz 1884, Poincaré 1901), toute telle courbe C satisfait les propriétés ci-dessus. En outre, il existe une extension au plus quadratique K de k telle que $C(K)$ soit non vide. Notons enfin la propriété, qu'on peut attribuer à Hasse (1924): si deux courbes de genre zéro C et D définies sur un corps de nombres k sont isomorphes sur tous les complétés k_v de k, elles sont isomorphes sur k.

D'un point de vue géométrique, les courbes mentionnées ci-dessus admettent deux extensions naturelles en dimension plus grande que 1: les quadriques et les variétés de Severi-Brauer. Pour les quadriques, l'analogue de la plupart des propriétés ci-dessus, et tout spécialement le principe de Hasse, furent établis par Hasse dans ses mémoires sur les formes quadratiques (1923/1924).

Définition. Une variété X de dimension d définie sur le corps k est dite de Severi-Brauer si $\bar{X}$ est *isomorphe* à $\mathbf{P}^d_{\bar{k}}$ (isomorphe sans exceptions).

C'est dans la thèse de François Châtelet que furent développées systématiquement les propriétés de ces variétés. Néanmoins, comme le note B. Segre en 1949, cette notion apparaît pour la première fois chez Severi (1932) qui donne une démonstration géométrique du théorème: si $X(k)$ est non vide, alors X est k-isomorphe à $\mathbf{P}^d_k$. Par ailleurs, dans le cas $d = 1$, Witt (1934) et Hasse (1935) notent la correspondance entre coniques et algèbres de quaternions. Les algèbres de quaternions (Hamilton, Frobenius) sont un cas spécial des algèbres centrales simples (Dickson, Wedderburn, 1905), qui sont les k-algèbres A telles qu'il existe un isomorphisme de $\bar{k}$-algèbres $A \otimes_k \bar{k} \simeq M_n(\bar{k})$ ($M_n(\bar{k})$ est l'algèbre des matrices (n, n) sur le corps $\bar{k}$). Les propriétés des algèbres centrales simples (« systèmes hypercomplexes ») furent dégagées par Brauer, Hasse, E. Noether et Albert entre 1927 et 1934, et Deuring leur consacra son livre *Algebren* en 1935.

Rappelons ici les propriétés principales. Une k-algèbre simple centrale A est k-isomorphe à une k-algèbre $M_r(D)$ où D est un corps gauche de centre k, le degré $[D:k]$ étant un carré i^2. On appelle i l'index de A. Pour $k = \mathbf{R}$, les seuls corps gauches de dimension finie sur leur centre **R** sont **R** lui-même et **H** l'algèbre des quaternions de Hamilton (Frobenius). Si k est un corps fini, toute algèbre simple centrale sur k est de la forme $M_r(k)$ (Wedderburn). Enfin, si k est un corps de nombres, et si $A \otimes_k k_v \simeq M_n(k_v)$ pour toute place v de k, alors $A \simeq M_n(k)$ comme k-algèbre (Brauer/Hasse/Noether, Albert). Par ailleurs, Skolem et Noether identifièrent le groupe des automorphismes d'une k-algèbre simple centrale A au quotient A^*/k^* (le groupe des unités A^* agissant par conjugaison intérieure). De son côté, Brauer organisa les classes d'algèbres simples centrales sur k en un groupe, dit depuis groupe de Brauer de k, via le produit tensoriel des algèbres, les algèbres « déployées » $M_n(k)$ étant considérées comme triviales. Ceci l'amena à introduire les « systèmes de facteurs », qui sont l'un des ancêtres de la cohomologie des groupes.

1.2. La contribution de F. Châtelet [1943*a*] [1943*b*] [1944].

Dans sa thèse [1944], François Châtelet généralisa aux variétés de Severi-Brauer tous les résultats connus pour les coniques :

Théorème. *Soient X et Y deux variétés de Severi-Brauer de dimension d sur le corps k.*

1) *Si $X(k)$ est non vide, alors X est k-isomorphe à $\mathbf{P}_k^d$.*

2) *Il existe un corps K contenant k et de degré $[K:k]$ divisant $(d+1)$ tel que $X(K)$ soit non vide.*

3) *Si L est une extension finie de k, $X(L)$ non vide et $[L:k]$ premier à $(d+1)$, alors X possède un k-point rationnel.*

4) *Si k est fini, X est k-isomorphe à $\mathbf{P}_k^d$.*

5) *Si k est un corps de nombres, et $X_{k_v} \simeq Y_{k_v}$ pour toute place v de k, alors X est k-isomorphe à Y.*

En particulier, si $X(k_v)$ est non vide pour chaque place v de k, alors X possède un k-point rationnel.

Quelle est la méthode de Châtelet ? Pour reprendre le langage de sa thèse, il considère une extension galoisienne finie K/k de groupe G et une variété de (Severi-)Brauer de dimension d « admettant K comme corps de représentation » (les groupes profinis n'avaient pas encore fait leur apparition). A une telle variété est attaché un « système de matrices associées » (« Algèbre de Brauer de degré $d+1$ »). Enfin à une telle algèbre est attaché un « système de scalaires associés ».

En termes d'aujourd'hui, Châtelet s'intéresse aux classes d'isomorphismes de k-variétés X qui deviennent isomorphes à $\mathbf{P}^d_K$ sur K. Un calcul depuis bien connu (chez Châtelet, la relation caractérisant les 1-cocycles apparaît sous le nom de « relation de compatibilité ») associe à une telle k-variété une classe dans l'ensemble de cohomologie $H^1(G, \mathrm{Aut}_K(\mathbf{P}^d_K))$, et montre que deux telles k-variétés X et Y sont k-isomorphes si et seulement si elles ont même classe de cohomologie. En fait, comme $\mathbf{P}^d_k$ est une variété raisonnable, on sait que toute classe de cohomologie provient d'une variété de Severi-Brauer, ce que Châtelet semble avoir vu et qui fut plus tard démontré par Weil (1956).

Ce qui permet alors à Châtelet d'obtenir le théorème ci-dessus, c'est le double isomorphisme :

$\mathrm{Aut}_K(\mathbf{P}^d_K) \simeq PGL_{d+1}(K)$ (tout automorphisme de l'espace projectif est donné par une homographie)

$\mathrm{Aut}_K(M_{d+1}(K)) \simeq PGL_{d+1}(K)$ (Skolem-Noether).

Les « systèmes de matrices associés » ne sont autres que les 1-cocycles à valeurs dans $PGL_{d+1}(K)$; quant aux « systèmes de scalaires associés » à un tel 1-cocycle, c'est un 2-cocycle dont la classe de cohomologie dans le sous-groupe $H^2(G, K^*)$ du groupe de Brauer de k est obtenue à partir du 1-cocycle via la suite exacte G-équivariante de groupes :

$$1 \to K^* \to GL_{d+1}(K) \to PGL_{d+1}(K) \to 1 .$$

Le même principe général que plus haut, et dont, rappelons-le, Châtelet fut l'un des principaux inventeurs, dit que l'ensemble $H^1(G, PGL_{d+1}(K))$ classifie aussi les k-algèbres simples centrales de degré $d + 1$ qui sont déployées par passage au corps K. Châtelet obtient ainsi tous les résultats sur les variétés de Severi-Brauer à partir des résultats connus sur les algèbres centrales simples.

Le mémoire de 1944 contient un autre résultat, oublié jusqu'à sa remise au goût du jour par M. Artin en 1982 : F. Châtelet appelle « sous-variété normale » Y d'une variété de Severi-Brauer X une sous-variété fermée telle que $\bar{Y} \subset \bar{X} \simeq \mathbf{P}^n_{\bar{k}}$ soit un espace linéaire (ce qui ne dépend pas de l'isomorphisme choisi). Définissant $i(X)$ comme étant le plus petit des entiers r tels qu'il existe une sous-variété normale $Y \subset X$ de dimension $(r-1)$, Châtelet montre que $i(X)$ coïncide avec l'index (de la classe) d'une algèbre simple centrale associée à X par la correspondance ci-dessus (ceci généralise le point 1) du théorème).

Glissons ici un mot sur les articles de Châtelet consacrés à l'arithmétique des (hyper)quadriques (1948). Châtelet y examine d'un point de vue géométrique les transformations qui permettent de passer d'une quadrique non-singulière X de $\mathbf{P}^3$ à une conique de $\mathbf{P}^2$ définie sur l'extension discriminant et ainsi en particulier d'obtenir le principe de Hasse pour ces quadriques.

1.3. Après les travaux de Châtelet.

En 1949, B. Segre tout en rendant hommage au travail de Châtelet rappelle l'existence du travail de Severi (1932) qui avait échappé à l'attention de Châtelet, et indique en particulier que Severi par ses méthodes avait obtenu $(d+1)^d$ au point 2) du théorème ci-dessus. C'est dans cet article que Segre transforme les « variétés de Brauer » de Châtelet en « variétés de Severi-Brauer ». Convenons qu'il eut été plus juste de les appeler variétés de Severi-Châtelet.

Alors que la théorie de Châtelet insiste de façon très moderne sur l'isomorphie sans exceptions, Amitsur en 1955 refait la théorie d'un point de vue plus birationnel (corps de décomposition « générique » d'une algèbre centrale simple) et redémontre l'énoncé 2) du théorème ci-dessus. Il établit le résultat intéressant suivant: si X et Y sont deux k-variétés de Severi-Brauer k-birationnellement équivalentes, les classes $a(X)$ et $a(Y)$ qui leurs sont associées dans le groupe de Brauer de k engendrent le même sous-groupe. On ignore si la réciproque vaut. Le point de vue de l'ensemble de cohomologie $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), PGL_{d+1}(K))$ réapparaît dans un article de Roquette (1963). Signalons aussi un article d'Amitsur (1981).

Le point de vue moderne sur les variétés de Severi-Brauer qui a été esquissé plus haut fut dégagé par Serre dans ses livres *Corps locaux* (1962) et *Cohomologie galoisienne* (1965). Après l'introduction des algèbres d'Azumaya, qui généralisent les algèbres simples centrales, le corps de base étant remplacé par un anneau commutatif (Azumaya 1951, Auslander/Goldman 1960), Grothendieck (1965) dans une série magistrale d'exposés sur le groupe de Brauer d'un schéma étudie les schémas de Severi-Brauer relatifs.

1.4. Importance des variétés de Severi-Brauer.

En arithmétique, les variétés de Severi-Brauer servent de référence dans l'étude des variétés rationnelles plus générales (une variété X est dite rationnelle si elle devient birationnellement équivalente (mais non nécessairement isomorphe) à l'espace projectif sur une extension finie de son corps de base.) Pour $d > 1$, aucune des propriétés du théorème ci-dessus ne vaut en général, mais on peut essayer de trouver des substituts. Nous reviendrons là-dessus au paragraphe 3.

En géométrie, i.e. dans l'étude des variétés définies sur le corps des nombres complexes, les variétés de Severi-Brauer jouent un grand rôle comme fibre générique de morphismes $X \to Y$, dans l'étude des variétés qui sont « proches d'être rationnelles »: variétés unirationnelles de divers types. Ainsi, le fameux contre-exemple d'Artin/Mumford (1972) au problème de Lüroth en dimension 3 (une variété qui est dominée par une variété rationnelle n'est pas nécessairement rationnelle) est-il fourni par une telle variété X fibrée au-dessus d'une surface rationnelle Y, la fibre générique étant une conique sans point rationnel. D'autres variétés de Severi-Brauer apparaissent dans l'étude des corps d'invariants d'actions linéaires presque libres de groupes linéaires connexes.

Mais là où les variétés de Severi-Brauer ont sans conteste joué le rôle le plus important, c'est dans la démonstration des théorèmes de Merkur'ev et Suslin (1982) sur le groupe K_2 des corps, ceci via le calcul de Quillen (1973) de la K-théorie des schémas de Severi-Brauer. Ces théorèmes ont eu des applications tant aux algèbres simples centrales sur un corps arbitraire qu'à l'étude des groupes de Chow des variétés algébriques (classes de cycles pour l'équivalence rationnelle).

2. Courbes de genre 1

2.1. Avant Châtelet.

En 1901, Poincaré montre qu'une courbe C de genre 1 définie sur un corps k et qui possède un point k-rationnel est isomorphe sur son corps de définition à une courbe elliptique E de Weierstrass:

$$(E) \qquad y^2 = x^3 + ax + b\,,$$

laquelle admet naturellement une loi de groupe avec élément neutre le point à l'infini. Cette loi de groupe en induit une sur l'ensemble $E(k)$ des points rationnels. Poincaré formule l'hypothèse que pour k le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, le groupe $E(\mathbf{Q})$ est engendré par un nombre fini d'éléments. Ceci fut démontré par Mordell en 1922 et généralisé par Weil en 1928 au cas où k est un corps de nombres, et où E est la jacobienne d'une courbe de genre quelconque. Weil donna aussi une méthode « élémentaire », qui passe par des « factorisations ». On montre ainsi que pour E donnée par

$$y^2 = (x-e_1)\,(x-e_2)\,(x-e_3)$$