# §9. Conclusion

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

L'application $P \mapsto \hat{h}(P)$ de $E(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{R}$ est quadratique et positive, et l'on a $\hat{h}(P) = 0$ si et seulement si $P$ est un point *de torsion* du groupe $E(\mathbf{Q})$.

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème [1]) qui donne *une expression de la dérivée en* 1 *de certaines fonctions* $L$ associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique $E$ de Weil, telle que le signe $\varepsilon_E$ de l'équation fonctionnelle $L_E$ soit $-1$, et notons $f_E$ la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle $c_E$ telle que:

*Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair* $\chi$ *de conducteur* $d \geqslant 7$ *tel que* $\chi(N_E) = 1$, *il existe un point* $P \in E(\mathbf{Q})$ *tel que*

$$L'_E(1)L_E(\chi, 1) = c_E\hat{h}(P)\,.$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si $L'_E(1) = 0$: pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet $\chi$ comme ci-dessus pour lequel $L_E(\chi, 1) \neq 0$ (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel $\chi$ lorsque $E$ est choisie). Comme on dispose de majorations de $L_E(\chi, 1)$, de la valeur approchée de $c_E$ et de minorations des $\hat{h}(P)$ non nuls lorsque $P$ décrit $E(\mathbf{Q})$, il suffit alors pour conclure à la nullité de $L'_E(1)$ de montrer que $L'_E(1)$ est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

## § 9. Conclusion

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante $c_E$ correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$h(-d) = 3 \Rightarrow \log d \leqslant 21\,000$$
$$h(-d) = 4 \Rightarrow \log d \leqslant 336\,000$$
$$h(-d) = 5 \Rightarrow \log d \leqslant 35\,000$$
$$h(-d) = 6 \Rightarrow \log d \leqslant 168\,000$$

etc.

---

[1]) B. H. Gross et D. B. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.

D'autres courbes elliptiques de Weil $E$ telles que $E(\mathbf{Q})$ soit de rang 3, trouvées par Mestre,

$$y^2 + y = x^3 - 7x + 6 \qquad (N_E = 5\,077)$$
$$y^2 + y = x^3 - x + 6 \qquad (N_E = 16\,811)$$
$$y^2 + y = x^3 - 19x + 30 \qquad (N_E = 43\,669),$$

permettent d'obtenir de meilleures majorations:

$$h(-d) = 3 \Rightarrow \log d \leqslant 165$$
$$h(-d) = 4 \Rightarrow \log d \leqslant 2\,640$$
$$h(-d) = 5 \Rightarrow \log d \leqslant 275$$
$$h(-d) = 6 \Rightarrow \log d \leqslant 1\,320$$

etc.

Pour achever complètement de résoudre le problème du nombre de classes, il reste en fait à vérifier qu'en-dessous des bornes précédentes les seuls $d$ pour lesquels $h(-d)$ vaut 3, 4, 5, 6, etc. sont ceux qui figurent dans la table de Buell. Il devrait être possible de le faire en reprenant les calculs de Stark et Montgomery-Weinberger évoqués au § 5. Pour l'instant, cela n'a été fait que pour $h = 3$ (par Montgomery et Weinberger), et pour $h = 4$ (par Arno).

*(Reçu le 30 mars 1987)*

J. Oesterlé

Université Paris VI
UER Mathématiques
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05

vide-leer-empty