1. Invariant Bilinear Forms

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

occasion my gratefulness for his stimulating advices and the interest he constantly showed for this work.

1. Invariant Bilinear Forms

Let $\mathbf{K}$ be a field of characteristic 0, V a finite dimensional vector space over $\mathbf{K}$ and $\rho: G \to GL(V)$ a $\mathbf{K}$-representation of the group G. A $\mathbf{K}$-bilinearform $\alpha: V \times V \to \mathbf{K}$ is called ρ-*invariant* if

$$\alpha(\rho(g)x, \rho(g)y) = \alpha(x, y) \qquad \forall x, y \in V, \quad \forall g \in G.$$

If G is finite, then for any bilinear form γ the form $\bar{\gamma}$ defined by

$$\bar{\gamma}(x, y) := \sum_{g \in G} \gamma(\rho(g)x, \rho(g)y)$$

is ρ-invariant.

(1.1) *Remark.* If α is definit (i.e. $\alpha(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$) and if ρ splits in a direct sum $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, the restriction ρ' of ρ to the orthogonal complement of the invariant space corresponding to ρ_1 is equivalent to ρ_2. Since we always can substitute a representation or a bilinear form by an equivalent one, we can assume that the representation space of a sum is an orthogonal sum of corresponding invariant subspaces.

We call *standard bilinear form* (of dimension m) the map $\beta_m: \mathbf{K}^m \times \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}$ given by

$$\beta_m(x, y) := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \quad \text{with} \quad x = (x_1, \ldots, x_m) \quad \text{and} \quad y = (y_1, \ldots, y_m).$$

The group $O_m(\mathbf{K})$ is the subgroup of $GL_m(\mathbf{K})$ of matrices (a_{ij}) such that $\sum_k a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$ for all i, j. The group $SO_m(\mathbf{K})$ is the subgroup of $O_m(\mathbf{K})$ of matrices (a_{ij}) with $\det(a_{ij}) = 1$. It is therefore evident that a representation $\rho: G \to GL_m(\mathbf{K})$ is realizable over $O_m(\mathbf{K})$ if and only if there is a ρ-invariant symmetric bilinear form which is equivalent to the standard bilinear form.

Let p be a prime number. Up to equivalence, there is a unique irreducible faithful $\mathbf{Q}$-representation σ of $\mathbf{Z}/p$; it is given by

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbf{Z}/p &\to GL_{p-1}(\mathbf{Q}) \\ 1 &\mapsto A := \begin{bmatrix} 0 & . & . & . & -1 \\ 1 & . & . & . & -1 \\ & & . & & \\ . & . & . & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We can identify the irreducible faithful $\mathbf{Q}[\mathbf{Z}/p]$-Module $\mathbf{Q}^{p-1}$ with $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ (ζ_p: primitive p-th root of unity, $1 \in \mathbf{Z}/p$ acts on $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ by multiplication with ζ_p). Any symmetric σ-invariant bilinear form is given by $tr_{\mathbf{Q}(\zeta_p)/\mathbf{Q}}(ax\bar{y}$ with $a \in \mathbf{Q}(\zeta_p+\zeta_p^{-1})$ (cf. [4] or [6]). We write γ_a for the σ-invariant bilinear form corresponding to $a \in \mathbf{Q}(\zeta_p+\zeta_p^{-1})$.

(1.2) LEMMA. *The discriminant of* γ_a *in* $\mathbf{Q}/\mathbf{Q}^{*2}$ *is equal to* p *mod* $\mathbf{Q}^{*2}$.

Proof. Since $a \in \mathbf{L} := \mathbf{Q}(\zeta_p+\zeta_p^{-1})$ we have: $\gamma_a = tr_{\mathbf{L}/\mathbf{Q}}(tr_{\mathbf{Q}(\zeta_p)/\mathbf{L}}ax\bar{y})$. An easy computation shows that $tr_{\mathbf{Q}(\zeta_p)/\mathbf{L}}(ax\bar{y})$ is a 2-dimensional symmetric $\mathbf{L}$-bilinearform with discriminant $4-(\zeta_p+\zeta_p^{-1})^2$ mod $\mathbf{L}^{*2} \in \mathbf{L}/\mathbf{L}^{*2}$. Applying [7, Lemma 2.2] we conclude that the discriminant of γ_a is independant of $a \in \mathbf{L}$. Consider now the matrix representation of σ given before (σ: irreducible faithful $\mathbf{Q}$-representation of $\mathbf{Z}/p$). Let C be the $(p-1) \times (p-1)$-matrix given by:

$$C := \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

It is easy to check that C is the matrix of a σ-invariant symmetric bilinear form. The Lemma follows since the determinant of C is equal to p.

2. ORTHOGONAL REPRESENTATIONS OF p-GROUPS

Let $p > 2$ be an odd prime. The integer $l_{\mathbf{Q}}(p)$ is defined by

$$l_{\mathbf{Q}}(p) := \text{g.c.d.} \left\{ m > 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{the } m\text{-fold direct sum } \sigma \oplus \dots \oplus \sigma \text{ of the irre-} \\ \text{ducible faithful } \mathbf{Q}\text{-representation } \sigma \text{ of } \mathbf{Z}/p \text{ is} \\ \text{equivalent to an orthogonal representation} \end{array} \right\}$$

The importance played by cyclic groups in the investigation of representations of p-groups is given by the following result (cf. [1, Theorem (1.10)]):

(2.1) PROPOSITION. *Let* G *be a finite* p*-group* ($p>2$) *and let* ρ *be an irreducible* $\mathbf{Q}$*-representation of* G. *Then either* ρ *is induced from a representation* θ *of a normal subgroup of index* p, *or* ρ *factors through a* $\mathbf{Q}$*-representation of* $\mathbf{Z}/p$.