caténaire

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

(«GALILAEO primitus introductam & demonstratam»). Puisque l'on désire $\frac{dy}{dt} = -b$ on obtient par division et par Pythagore ($ds^2 = dx^2 + dy^2$)

$$dx = -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}\,dy\,. \tag{6}$$

Il en résulte que les deux surfaces «infiniment petites » hachurées en figure 7 sont égales pour chaque x. C'est le moment pour Jacob d'écrire la phrase célèbre «Ergo & horum Integralia aequantur», dans laquelle le mot «Intégrale» apparaît pour la première fois dans l'histoire des mathématiques. En d'autres termes, les deux surfaces S_1 et S_2 indiquées en figure 7 doivent aussi être égales. Après intégration, on trouve la solution

$$x = \frac{b^2}{3g}\left(-1 - \frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2} \tag{7}$$

et la «Solutio sit linea paraboloeides quadrato cubica...» (Leibniz).

Le problème de l'isochrone fournit donc la première équation différentielle résolue «par quadratures».

La caténaire

> «Je ne mets point ici la démonstration, parce que ceux qui entendent ces matiéres, la trouveront aisément, & qu'il faudroit trop de discours pour la faire comprendre aux autres.»
>
> (Johann Bernoulli, 1692)

A la fin de son article [1] des A.E. 1690, Jacob propose aux lecteurs savants de résoudre le problème de la caténaire, i.e., de la position d'un fil (ou d'une chaîne) flexible. Le problème est résolu dans le courant de 1690 par Leibniz, Huygens et Johann Bernoulli, le jeune frère de Jacob. Les publications de Leibniz (A.E. 1691) [18] et de Johann Bernoulli [4] dans les Acta Eruditorum contiennent des solutions et quelques propriétés de cette courbe (longueur, centre de gravité, utilité pour le calcul des logarithmes, etc.), mais pas un mot sur la manière dont elle a été trouvée. Heureusement, Johann Bernoulli est plus explicite dans ses leçons pour l'Hospital [5]: Considérons en un point P de la courbe les forces horizontale H et verticale V (fig. 8).

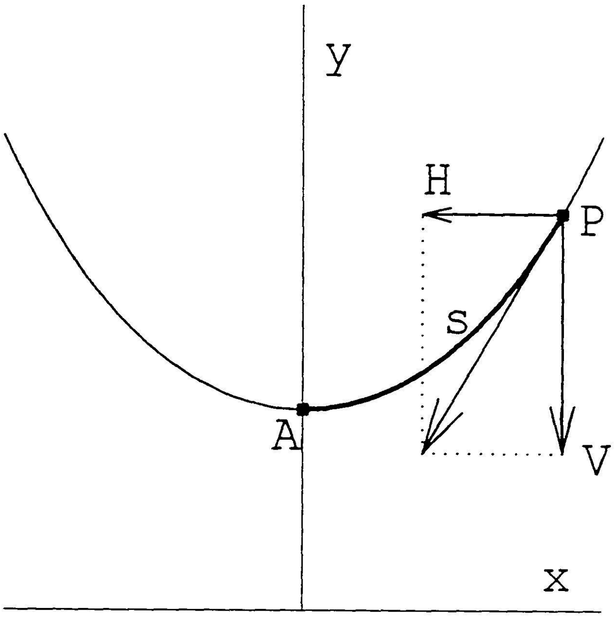

FIGURE 8.
La caténaire.

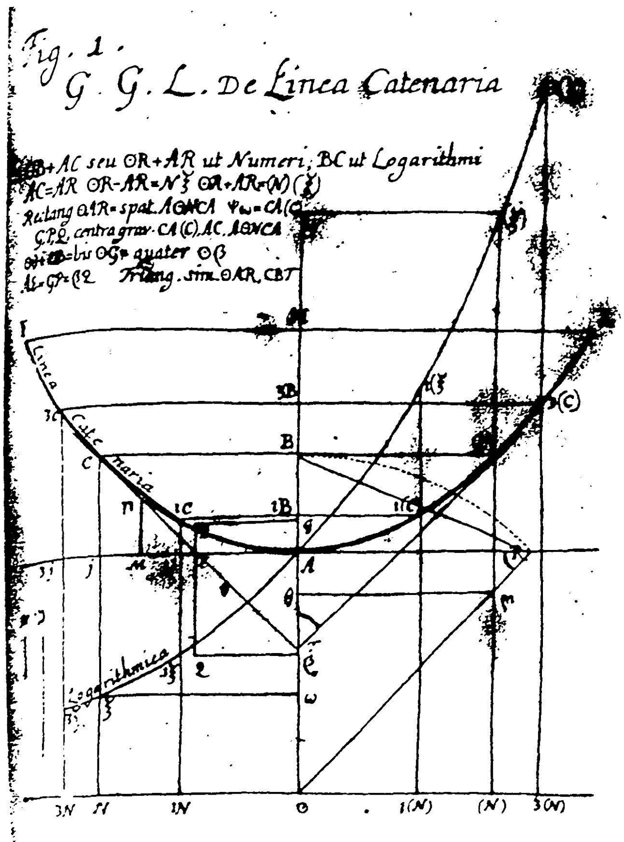

FIGURE 9.
La caténaire (dessin de Leibniz).

Alors

$$H = a, \qquad V = q \cdot s$$

avec a et q constants, car il n'y a pas de force horizontale extérieure et V représente le poids de la chaîne AP. On trouve (si on dénote la pente y' par p)

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} = \frac{qs}{a}$$

ou après différentiation

$$cdp = ds = \sqrt{1 + p^2}\, dx\,. \tag{8}$$

A partir d'ici, les calculs de Johann sont assez compliqués. Nous connaissons aujourd'hui les fonctions hyperboliques et trouvons immédiatement («ergo & horum...»)

$$c \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}(p) = \frac{x - x_0}{c}$$

donc

$$p = \sinh\left(\frac{x - x_0}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad y = K + c\cosh\left(\frac{x - x_0}{c}\right). \tag{9}$$

LE DEUXIÈME PROBLÈME DE DEBEAUNE

> Cette piéce a été faite en commun par Mr. le Marquis de l'Hospital & par Mr. Bernoulli. C'est pourquoi l'un & l'autre a cru être en droit de se l'attribuer...
>
> (Cramer 1742)

Johann passe l'année 1692 à Paris où il fait la connaissance de Guillaume François Marquis de l'Hospital (1661-1704). Ce dernier lui verse de fortes sommes d'argent en échange de leçons de mathématiques. Pour impressionner son élève, Johann commence aussitôt à résoudre le deuxième problème de Debeaune. Il trouve ([6])

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x}, \tag{10}$$

pose $z = y - x$ et obtient

$$\frac{zdz}{a - z} = dx\,. \tag{11}$$

La solution est donc déterminée par la surface de l'hyperbole $\dfrac{z}{a - z}$. Donc, si on veut que $z(0) = 0$, on trouve

$$x = -z + a\log\frac{a}{a - z}\,. \tag{12}$$

LA TRACTRICE

> Claudius Perraltus Medicus Parisinus insignis, tum & Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius, & Vitruvii editione notus, idemque in Regia scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi & aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur...
>
> (Leibniz, 1693)

Lors du séjour de Leibniz à Paris (1672-1676), le célèbre anatomiste et architecte Claude Perrault lui pose le problème suivant: pour quelle courbe en