§6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

la classe commune des c_i et P est un polynôme de $k[c] = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]$. Il en résulte que la classe de $t_n(\tau)$ modulo J est représentée par cP', P' désignant la classe de P dans l'anneau $A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c}$. D'après les théorèmes d'Alexander et Markov, le polynôme P' ne dépend que de l'entrelacs $\hat{\tau}$. On a ainsi associé à tout entrelacs orienté E un polynôme $P_E = P'$ de l'anneau A. Cet anneau est en fait le sous-anneau de $k[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}]$ engendré par α, β, β^{-1} et $(1+\beta)\alpha^{-1}$.

Si x est un croisement d'un entrelacs E dessiné dans le plan, la méthode d'Alexander permet de modifier le dessin de E sans changer le croisement x de façon à obtenir un entrelacs E' isotope à E et de la forme $\hat{\tau}$, où τ est une tresse de B_n. Il en résulte que les trois entrelacs E_+, E_- et E_0 obtenus par modification de E au voisinage de x sont isotopes à des entrelacs de la forme $\hat{\tau}_+$, $\hat{\tau}_-$ et $\hat{\tau}_0$ où l'on a

$$\tau_+ = \tau'\sigma_i\tau'', \qquad \tau_- = \tau'\sigma_i^{-1}\tau'', \qquad \tau_0 = \tau'\tau''.$$

On a alors dans l'algèbre H_n l'égalité suivante:

$$\tau_+ - \alpha\tau_0 + \beta\tau_- = 0,$$

ce qui implique

$$P_{E_+} - \alpha P_{E_0} + \beta P_{E_-} = 0.$$

Si E est le nœud trivial il est de la forme $\hat{1}_1$ et la classe de 1_1 dans le quotient de Λ par I_0 est égal à c. On a donc

$$P_E = 1$$

et le théorème 1-7 est alors clair.

§ 6. Une généralisation du polynôme de Jones-Conway

Soit $n > 0$ un entier. Soit L une sous-variété différentiable compacte orientée de dimension 1 de l'espace usuel $\mathbf{R}^3$ entièrement contenue dans la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$. On suppose que le bord de L est standard. C'est-à-dire qu'il est formé des $2n$ points de coordonnées $(i, j, 0)$ avec $i = 0, 1$ et j variant de 1 à n. On suppose de plus qu'en chacun de ces points, le vecteur tangent à L est vertical descendant, c'est-à-dire à projection nulle sur le plan horizontal $0 \times \mathbf{R}^2$ et à projection négative sur l'axe vertical $\mathbf{R} \times 0$.

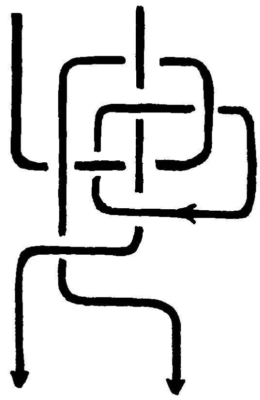
Définition. Une telle variété L sera appelée semi-tresse à n brins. Deux semi-tresses à n brins seront dites isotopes s'il existe une isotopie de la bande $[0, 1] \times \mathbf{R}^2$ fixe sur le bord qui envoie l'une sur l'autre.

Soient L et L' deux semi-tresses à n brins. En recollant les deux bandes l'une au-dessus de l'autre (celle contenant L étant au-dessus), on obtient une nouvelle semi-tresse. Cette semi-tresse sera appelée produit de L par L' et notée LL'.

PROPOSITION 6-1. *L'ensemble des classes d'isotopie de semi-tresses à n brins est un monoïde unitaire pour le produit. Ce monoïde contient le groupe des tresses B_n comme sous-monoïde. Il sera noté $\hat{B}_n$.*

Remarque. Contrairement au groupe B_n, le monoïde $\hat{B}_n$ est très gros, même pour n petit. Ainsi $\hat{B}_0$ est isomorphe au monoïde des classes d'isotopie d'entrelacs orientés, la loi de composition étant la somme disjointe.

Exemple de semi-tresse à 2 brins:



Comme précédemment, on posera

$$A = k[c]/_{1+\beta-\alpha c} = \mathbf{Z}[\alpha, \beta, \beta^{-1}, c]/_{1+\beta-\alpha c}\,.$$

THÉORÈME 6-2. *Il existe pour tout $n > 0$ une unique représentation ρ du monoïde $\hat{B}_n$ dans l'algèbre de Hecke $H_n \underset{k}{\otimes} A$, possédant les propriétés suivantes:*

— *ρ étend la représentation canonique de B_n dans H_n,*

— *si L_+, L_- et L_0 sont trois semi-tresses à n brins obtenues à partir d'une semi-tresse par modifications au voisinage d'un croisement (avec les mêmes notations que dans le cas des entrelacs), on a*

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0\,.$$

Démonstration. Elle occupera tout le reste du paragraphe.

i) Construction de ρ.

Soit K le corps de fraction de A. Soit ε l'application canonique de H_n dans A, composée de la trace de H_n dans Λ et de l'application quotient de Λ dans A qui envoie chaque classe c_i en c.

LEMME 6-3. L'application qui à u et v de H_n associe $\varepsilon(uv)$ induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur le K-espace vectoriel $H_n \otimes K$.

Démonstration. Posons, pour tout u et v de H_n, $\langle u, v\rangle$ l'élément $\varepsilon(uv)$ de A. Il est clair que le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique. Si l'on quotiente k, A, H_n et Λ par les relations

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = -1\,,$$

k devient $\mathbf{Z}$, Λ devient l'anneau $\mathbf{Z}[c_1, c_2, \ldots]$, A devient $\mathbf{Z}[c]$ et H_n devient $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. Si σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, sa classe dans Λ est le monôme $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \ldots$, où p_i représente le nombre d'orbites de σ à i éléments. En effet, si σ est un cycle d'ordre n, il est conjugué à la permutation $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{n-1}$ et sa classe dans Λ est c_n. Si σ est formé de cycles d'ordres q_i, σ est conjugué à une permutation $\tau_1\tau_2 \ldots$ où les τ_i sont des cycles d'ordres q_i et sa classe est le produit des classes c_{q_i}.

Il en résulte que la classe de σ dans $\mathbf{Z}[c]$ est égale à c^m, m étant le nombre d'orbites de σ. Et le produit scalaire $\langle\sigma, \tau\rangle$ de deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ est égal à c^m, m étant le nombre d'orbites de $\sigma\tau$. Soit Δ le déterminant de ce produit scalaire calculé dans la base $\mathfrak{S}_n$ de $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$. On a

$$\Delta = \sum_f [f] \prod_\sigma c^{m(\sigma f(\sigma))}\,,$$

le produit portant sur toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$ et la somme sur toutes les bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même. Le symbole $[f]$ désigne la signature de f et $m(\tau)$ désigne le nombre d'orbites de τ.

Comme $m(\tau)$ est majoré par n, quelle que soit la permutation τ, le degré de Δ est majoré par $nn!$. D'autre part, le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est la somme des nombres $[f]$, f parcourant l'ensemble des bijections de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même telles que $\sigma f(\sigma)$ ait n orbites quel que soit σ, c'est-à-dire telles que $\sigma f(\sigma)$ soit l'identité quel que soit σ. Cet ensemble de bijections est donc réduit à un élément et le coefficient de $c^{nn!}$ dans Δ est non nul. Il en résulte que Δ est non nul. Or Δ est la classe du déterminant de la forme bilinéaire symétrique $\langle\ ,\ \rangle$ dans le quotient $\mathbf{Z}[c]$ de A. On en déduit que le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ est non dégénéré dans K.

Soit L une semi-tresse à n brins. Pour toute tresse σ de B_n on peut refermer la semi-tresse $L\sigma$ et l'on obtient un entrelacs orienté E_σ. On notera $F(\sigma)$ le polynôme de Jones-Conway de E_σ.

LEMME 6-4. *L'application F s'étend en une application linéaire, toujours notée F, de l'algèbre H_n dans l'anneau A.*

Démonstration. On étend linéairement F à l'algèbre de groupe $k[B_n]$. Soient σ et τ deux tresses et $i < n$ un entier. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$F(\sigma\sigma_i^2\tau) - \alpha F(\sigma\sigma_i\tau) + \beta F(\sigma\tau) = 0$$

et F se factorise à travers l'algèbre H_n.

Comme le produit scalaire $< \, , >$ est non dégénéré sur K, il existe un unique élément U de l'algèbre $H_n \otimes K$ tel que

$$\forall u \in H_n, \qquad cF(u) = <U, u>$$

et U ne dépend que de la classe d'isotopie de la semi-tresse L; U sera noté $\rho(L)$.

ii) Propriétés de ρ.

LEMME 6-5. *Si L est une tresse τ, $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n.*

Démonstration. Soit σ une tresse. En refermant la tresse $\tau\sigma$ on obtient l'entrelacs E_σ. On en déduit que la classe $\varepsilon(\tau\sigma)$ dans A est égale à cP_{E_σ} et l'on a

$$cF(\sigma) = <\tau, \sigma> .$$

Comme ceci a lieu pour toute tresse σ et donc pour tout élément de H_n, $\rho(\tau)$ est égal à la classe de τ dans H_n.

LEMME 6-6. *Si L est une semi-tresse à n brins et σ une tresse de B_n, on a*

$$\rho(L\sigma) = \rho(L)\rho(\sigma) .$$

Démonstration. Soit τ une tresse de B_n. Le produit scalaire $<\rho(L\sigma), \tau>$ est égal au produit de c par le polynôme de Jones-Conway de l'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma\tau$. Il en résulte que $<\rho(L\sigma), \tau>$ est égal à $<\rho(L), \sigma\tau>$

c'est-à-dire à $<\rho(L)\sigma, \tau>$. Comme ceci a lieu pour toute tresse τ, $\rho(L\sigma)$ est égal à $\rho(L)\rho(\sigma)$.

LEMME 6-7. *Soient* L_+, L_- *et* L_0 *trois semi-tresses obtenues par modification d'une semi-tresse près d'un croisement. Le croisement étant de signe positif pour* L_+ *et négatif pour* L_- *et ayant disparu dans* L_0. *Alors on a*

$$\rho(L_+) + \beta\rho(L_-) - \alpha\rho(L_0) = 0 .$$

Démonstration. Soit σ une tresse. Alors les trois entrelacs obtenus en fermant $L_+\sigma$, $L_-\sigma$ et $L_0\sigma$ sont obtenus d'un entrelacs par modifications au voisinage d'un croisement. D'après les propriétés du polynôme de Jones-Conway, on a

$$<\rho(L_+), \sigma> + \beta<\rho(L_-), \sigma> - \alpha<\rho(L_0), \sigma> = 0$$

et l'on en déduit la formule cherchée.

iii) Unicité de ρ.

Soit L une semi-tresse représentée par une projection régulière sur une bande $[0, 1] \times \mathbf{R}$ du plan. Notons $C_1, C_2, ..., C_n$ les composantes connexes de L qui partent de la partie supérieure de la bande en les numérotant de façon que les points supérieurs des composantes soient placés de la gauche vers la droite. On notera E l'entrelacs formé des composantes fermées de L. On dira que L est ascendante si E est en dessous de chaque C_i et si, en parcourant C_1 puis C_2 et ainsi de suite jusqu'à C_n, chaque fois que l'on croise une portion de courbe déjà vue, on la croise par dessus. Il est clair que si L est ascendante, l'union des C_i est dénouée et L est isotope à la somme disjointe d'une tresse et d'un entrelacs. Si L est une semi-tresse il suffit de modifier les positions dessus-dessous de certains croisements et l'on obtient une semi-tresse ascendante.

LEMME 6-8. *Pour toute semi-tresse* L *à* n *brins,* $\rho(L)$ *appartient à* $H_n \otimes A$.

LEMME 6-9. *Soit* ρ' *une application de* $\widehat{B}_n$ *dans* $H_n \otimes A$ *qui vérifie les propriétés du théorème 6-1. Alors pour toute semi-tresse* L, $\rho'(L)$ *est égal à* $\rho(L)$.

LEMME 6-10. *Soient* L *et* L' *deux semi-tresses à* n *brins. Alors on a*

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L') .$$

Démonstrations. Ces lemmes vont être démontrés par récurrence sur le nombre de croisements de L. Supposons donc que les lemmes sont vérifiés pour toute semi-tresse ayant au plus $m - 1$ croisements. Soit L une semi-tresse ayant m croisements. Si l'on modifie un croisement de L (par modification dessus-dessous) on obtient une nouvelle semi-tresse L_1. Soit L_0 la semi-tresse obtenue en supprimant le croisement. D'après le lemme 6-7, on a

$$\rho(L) + \beta\rho(L_1) = \alpha\rho(L_0) \qquad \text{ou} \qquad \beta\rho(L) + \rho(L_1) = \alpha\rho(L_0)$$

suivant le signe du croisement considéré. Comme L_0 a $m - 1$ croisements, $\rho(L_0)$ appartient à $H_n \otimes A$, $\rho'(L_0)$ est égal à $\rho(L_0)$ et $\rho(L_0L')$ est égal à $\rho(L_0)\rho(L')$. On en déduit que $\rho(L)$ appartient à $H_n \otimes A$ si et seulement si $\rho(L_1)$ appartient à $H_n \otimes A$, que ρ' et ρ sont égaux en L si et seulement si ils sont égaux en L_1 et que $\rho(LL')$ est égal à $\rho(L)\rho(L')$ si et seulement si $\rho(L_1L')$ est égal à $\rho(L_1)\rho(L')$.

Pour montrer les propriétés cherchées on peut supposer, quitte à modifier les croisements non ascendants de L, que L est ascendant. La semi-tresse L est alors isotope à l'union disjointe d'une tresse τ et d'un entrelacs E.

Soit σ une tresse. L'entrelacs obtenu en fermant $L\sigma$ est l'union disjointe de E et de l'entrelacs obtenu en fermant τ. On a donc

$$< \rho(L), \sigma > \; = \; < \tau, \sigma > cP_E$$

ce qui implique que $\rho(L)$ est égal à $\rho(\tau)cP_E$ et par suite appartient à $H_n \otimes A$.

D'autre part, pour tout entrelacs orienté E', on peut considérer l'image par ρ' de l'union disjointe de τ et de E'. On construit ainsi un invariant polynomial d'entrelacs qui vérifie les propriétés du polynôme de Jones-Conway, sauf la propriété de valoir 1 sur l'entrelacs trivial. D'après l'unicité du polynôme de Jones-Conway, on a

$$\rho'(\tau \bigcup E') = \rho(\tau)cP_E\,.$$

Comme il en est de même pour ρ, ρ et ρ' prennent la même valeur en L.

Enfin, on remarque que LL' est isotope à l'union disjointe de ε et de $\tau L'$. On a donc pour toute tresse σ

$$< \rho(LL'), \sigma > \; = \; < \rho(L'), \sigma\tau > cP_E\,,$$

ce qui implique

$$\rho(LL') = \rho(\tau)\rho(L')cP_E\,.$$

Comme ceci a lieu quel que soit L', on a

$$\rho(L) = \rho(\tau) c P_E$$

et l'on a

$$\rho(LL') = \rho(L)\rho(L') .$$

Les lemmes sont alors démontrés, ce qui prouve que ρ est une représentation de $\hat{B}_n$ dans $H_n \otimes A$ qui prolonge la représentation canonique de B_n dans H_n, qu'elle vérifie la formule voulue sur les semi-tresses L_+, L_- et L_0, et que c'est la seule représentation vérifiant ces propriétés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXANDER, J. W. A lemma on a system of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9* (1923), 93-95.

[2] —— A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 19* (1933), 272-275.

[3] BIRMAN, J. S. *Braids, links and mapping class group.* Annals of Math. Studies n° 82. Princeton Univ. Press. Princeton, N.J. (1976).

[4] BIRMAN, J. S. and H. WENZL. Braids, links, polynomials and a new algebra. Preprint 1986.

[5] BRANDT, R. D., W. B. R. LICKORISH and K. C. MILLETT. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math. 84* (1986), 563-573.

[6] FREYD, P., D. YETTER, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. C. MILLETT and A. OCNEANU. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. AMS 12* (1985), 239-246.

[7] de la HARPE, P., M. KERVAIRE and C. WEBER. On the Jones polynomial. *L'Ens. Math. 32* (1986), 271-335.

[8] HOSTE, J. A new polynomial for knots and links. *Pac. J. of Math. 124* (1986), 295-320.

[9] JONES, V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bulletin AMS 12* (1985), 103-111.

[10] —— A new knot polynomial and von Neumann algebras. *Notices AMS 33* (1986), 219-225.

[11] —— Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Annals of Math. 126* (1987), 389-414.

[12] KAUFFMAN, L. State models and the Jones polynomial. *Topology 26* (1987), 395-407.

[13] —— An invariant of regular isotopy. Preprint.