Géométrie élémentaire et mathématiques modernes

Autor(en): **Poncet-Montange, Daniel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Actes de la Société jurassienne d'émulation**

Band (Jahr): **77 (1974)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-557330

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Géométrie élémentaire et mathématiques modernes

par Daniel Poncet-Montange

Les mathématiques enseignées aujourd'hui ne sont plus celles d'hier. Pour s'en convaincre, il suffit de feuilleter le manuel d'un de nos enfants : symboles étranges, mots nouveaux, mais aussi présentation attrayante et illustrations suggestives ; le fait est là sous nos yeux, l'enseignement des mathématiques a changé.

Certes, tout ne va pas sans heurt et le lecteur a encore présent à l'esprit la querelle qui opposa partisans des mathématiques modernes et défenseurs des mathématiques traditionnelles. Mais tout le monde semble avoir reconnu maintenant le bien-fondé de la réforme des programmes de mathématiques. Enfin ! dirons-nous, car la conception moderne s'est dégagée il y a plusieurs dizaines d'années et il est heureux que nos élèves bénéficient des fruits du progrès mathématique.

Cependant la réforme ne semble pas avoir résolu de manière satisfaisante le problème de l'enseignement de la géométrie. Aussi est-ce ce point que nous allons examiner plus particulièrement pour tenter de montrer que l'on peut enseigner une géométrie simple en accord avec la conception moderne des mathématiques.

D'hier à aujourd'hui

Les mathématiques classiques apparaissent à juste titre comme la juxtaposition d'une multitude de disciplines que chaque spécialiste s'efforce de développer de manière autonome [1]. Pièce par pièce s'édifie

[1] Cet aspect des choses se retrouve aujourd'hui encore dans certains enseignements où la géométrie est morcellée en spécialités indépendantes (géométrie analytique, géométrie pure, trigonométrie, etc.).

ainsi un imposant et respectable monument dont l'aspect hétéroclite n'échappe pas toutefois au mathématicien qui s'efforce dès la fin du XVIII[e] siècle de découvrir des structures communes sous ce foisonnement de théories.

Pour mieux montrer en quoi consiste cette recherche, prenons un exemple aujourd'hui familier à tous les élèves, celui des nombres et des vecteurs [2]. A première vue voici deux êtres mathématiques de nature essentiellement distincte. Pourtant, il suffit d'additionner les premiers et de mettre bout à bout les seconds pour découvrir des analogies frappantes : 1°) le vecteur nul se comporte comme le nombre zéro ; 2°) comme tout nombre, un vecteur possède un opposé ; 3°) l'associativité de l'addition des nombres traduite par l'égalité $(a + b) + c = a + (b + c)$ a son équivalent chez les vecteurs comme le montre une construction simple. Ainsi l'addition des nombres et l'addition des vecteurs obéissent donc aux mêmes règles ; le mathématicien dit qu'il s'agit de deux exemples d'une même structure : la structure de *groupe* [3]. Il lui suffit alors de connaître les propriétés de la structure de groupe pour connaître à l'avance les propriétés de tous les groupes particuliers.

Le mathématicien s'efforce donc de rechercher les grandes structures que dissimule l'habillage des termes propres à chaque théorie. Au lieu d'étudier les théories dans leurs particularités, il s'attache, au prix d'un effort d'abstraction, à l'étude de la structure qui les sous-entend pour en projeter d'un coup tous les résultats.

Pendant que s'élabore ce puissant travail, le flot des idées nouvelles ne cesse d'apporter son contingent de notions de plus en plus difficiles à représenter : les nombres négatifs, les nombres imaginaires, les fonctions, les espaces à n dimensions. Certes, le mathématicien parvient malgré tout à donner une interprétation sensible de ces notions aussi bizarres qu'indispensables, mais la chose est de plus en plus ardue. Aussi, commence-t-il à poser le problème du rapport des mathématiques et du réel. Puisque l'interprétation des résultats nouveaux devient délicate, ne convient-il pas de distinguer alors le monde mathématique du monde sensible ? D'accorder droit de cité à des objets engendrés et définis par des propriétés posées a priori ? D'étudier ensuite leurs relations indépendamment de toutes

[2] Le lecteur peut s'en tenir à la représentation traditionnelle du vecteur figuré par une flèche. Nous préciserons cette notion par la suite.

[3] Cette structure est reconnue dès le milieu du XIX[e] siècle.

références au monde réel ? Ainsi sont jetées les bases de la méthode axiomatique moderne qu'Hilbert en 1899 illustre magistralement en énonçant pour la première fois une liste complète d'axiomes d'où il déduit toute la géométrie euclidienne.

L'architecture des mathématiques mise à nu, ses méthodes et son objet précisés, il ne restait plus qu'à assurer ses fondements. C'est Cantor qui fut à l'origine de la question. A peine a-t-il en effet élaboré sa théorie des ensembles qu'à la fin du XIX^{e} siècle apparaissent les premiers paradoxes[4] qui jettent le doute sur les résultats les mieux établis. Sans nous attarder sur ce problème, disons que grâce à un traitement axiomatique de la théorie des ensembles, on parvient à faire disparaître ces fameux paradoxes. On aboutit à une formalisation du langage mathématique où les termes de base de la théorie sont définis sans référence au monde sensible : ce sont des assemblages de signes conventionnels obéissant à des règles bien précises.

Nous arrivons ainsi à la conception actuelle des mathématiques telle qu'elle est exposée dans les ouvrages du célèbre Bourbaki[5] : tout repose sur la théorie des ensembles, langage universel qui décrit les grandes structures mathématiques où se développent les théories les plus diverses.

L'initiation au langage des ensembles

Puisque actuellement, toutes les mathématiques découlent de la théorie des ensembles, par application des règles du raisonnement déductif, il n'est pas étonnant de voir les manuels scolaires consacrer leurs premières pages à l'étude du vocabulaire des ensembles et à un rappel des méthodes de démonstration.

Il ne s'agit en aucun cas de plonger l'élève, comme on le dit trop souvent, dans la théorie des ensembles qui reste réservée aux spécialistes. Il doit savoir simplement employer les termes primitifs

[4] Citons comme exemple physique d'ensemble paradoxal élément de lui-même, l'ouvrage d'une bibliothèque intitulé « catalogue » qui se cite lui-même puisque par définition il dresse la liste de tous les ouvrages. Le paradoxe de J. Richard (1905) plus mathématique, propose un ensemble qui contient un élément qui ne lui appartient pas : l'ensemble des entiers définis par moins de seize mots de la langue française ; il contient en effet celui qui, défini par la phrase « le plus petit entier non définissable en moins de seize mots français » ne lui appartient donc pas.

[5] Pseudonyme sous lequel se cache une équipe périodiquement rajeunie d'éminents mathématiciens contemporains.

de la théorie tels qu'ensemble, élément, relation et forger avec eux les notions de base qu'il utilisera jusque dans l'enseignement supérieur. Dès ce moment, il paraît indispensable de lui apprendre à distinguer le domaine mathématique du domaine sensible, en s'efforçant de citer de préférence des exemples mathématiques sans toutefois mésestimer la puissance de suggestion de l'image familière qui peut aider à assimiler la notion mathématique abstraite [6].

Cependant on doit regretter qu'un excès de formalisme conduise certains ouvrages scolaires à abuser des symboles et à les rendre proprement illisibles [7]. Il est piquant de constater à ce sujet que même les livres les plus modernes de l'enseignement supérieur se satisfont fort bien d'un minimum de symboles sans sacrifier ni à la rigueur ni à la clarté.

Relevons enfin que le vocabulaire des ensembles est fait pour être utilisé et qu'il serait dommage de ne pas l'employer ; on sait par exemple qu'il fait merveille en analyse combinatoire pour préciser en langage moderne les notions de combinaisons, d'arrangements, encore toutes auréolées de références sensibles.

Quant à la logique, elle occupe presque partout une place largement suffisante même si certains voudraient imposer à l'élève un véritable cours de logique contraire au but de l'enseignement gymnasial qui est de pratiquer le raisonnement plutôt que d'étudier ses structures.

Une fois en possession de ces outils de base, l'élève est prêt à aborder les grands chapitres des mathématiques. Compte tenu de la somme des connaissances que doit posséder le bachelier d'aujourd'hui (le programme du baccalauréat comprend maintenant une partie des matières qui s'étudiaient, il y a 15 ans, en première année

[6] Nous pensons qu'il est regrettable toutefois de voir de nombreux manuels, après un louable effort de rigueur et de clarté, mélanger sans précaution des ensembles de nombres et des ensembles d'animaux. L'objet mathématique est susceptible d'une définition précise alors que l'objet physique échappe par nature au mathématicien.

[7] Voici un exemple authentique de définition proposé à des candidats au baccalauréat :

$\forall \varphi,\ \varphi \in \{(x_0\,;\,\Delta x), \ldots\}\,;\ \forall x_0,\ x_0 \in \mathrm{D}\,;\ \forall \Delta x,\ \Delta x \in \mathbb{R}\,;$

$$x_0 + \Delta x \in \mathrm{I}_{(a,\,a)}\,(x_0) \subset \mathrm{D}$$

$\exists^* \Delta y,\ \Delta y \in \mathbb{R}$

$\varphi = (x_0\,;\,\Delta x) \qquad \Delta y$

L

d'enseignement supérieur), il est indispensable de choisir parmi les méthodes d'exposition celles qui sont les plus efficaces et si possible les plus générales. On voit apparaître ici l'importance du choix des axiomes de départ des théories : les axiomes doivent être assez riches pour éviter de fastidieuses démonstrations remontant à la théorie des ensembles, en nombre suffisamment restreint pour être d'un emploi aisé, et reposer enfin sur un support intuitif simple. Comme nous allons le voir, c'est précisément à ce niveau que se pose, semble-t-il, le problème de l'enseignement de la géométrie.

2000 ans de géométrie

C'est dans ses *Eléments de Géométrie* qu'Euclide développe pour la première fois les conséquences d'un système d'axiomes (appelés alors postulats ou demandes, suivant leur degré d'évidence). Certes, sa théorie est encore bien imparfaite et plusieurs axiomes intuitifs sont utilisés à l'insu de l'auteur dans certaines démonstrations. Néanmoins, il est remarquable que dès cette époque, Euclide ressente la nécessité d'une telle rigueur dans le raisonnement et d'une telle solidité dans les fondements.

De fait, pendant 2000 ans, c'est sa conception de la géométrie qui prédomine.

A la fin du siècle dernier, comme nous l'avons déjà noté, Hilbert fonde la méthode axiomatique moderne. Complétant les axiomes énoncés par Euclide, il montre en effet que les mots employés (point, droite, plan) n'ont pas d'importance en eux-mêmes et que seules comptent les relations qui les unissent. A l'heure actuelle, ces travaux ne présentent plus qu'un intérêt historique depuis que l'on s'est aperçu que la géométrie est un chapitre de l'*algèbre linéaire,* branche fondamentale des mathématiques d'aujourd'hui, riche d'applications physiques et basée sur des notions simples et intuitives.

La géométrie à l'école

Actuellement la géométrie est successivement présentée sous deux formes. La première est réservée aux plus jeunes élèves ; elle consiste, après une reconnaissance physique de l'espace où nous vivons, à introduire de façon soi-disant naturelle, les axiomes d'Hilbert-Euclide, puis les vecteurs. Elle conduit à des définitions com-

pliquées, artificielles et d'un maniement peut aisé [8]. De plus, malgré leur consécration historique, ces axiomes n'apparaissent pas dans l'espace avec la nette et belle évidence qu'on veut bien leur accorder : en effet, nous pensons que l'enfant voit dans l'espace ce qu'on veut bien qu'il voie et si la plupart du temps il n'y voit rien, c'est peut-être qu'il n'y a rien à voir [9].

La seconde est proposée aux candidats au baccalauréat sous la forme du modèle mathématique d'un espace homogène, forme idéalisée de l'espace physique qui nous entoure. Il ne nous est pas possible d'en exposer ici le développement. (Nous renvoyons le lecteur courageux aux manuels des classes du baccalauréat.) Disons simplement qu'après avoir étudié la structure d'*espace vectoriel* on échafaude une deuxième structure, *l'espace affine*, qui permet d'exprimer dans un langage différent des résultats analogues évitant de faire référence à tout point particulier. Cette construction pesante [10], mathématiquement irréprochable, fait l'objet de critiques d'autant plus justifiées que la seule structure d'espace vectoriel permet de construire la géométrie de manière bien plus simple comme nous allons tenter de l'expliquer.

Une géométrie plus simple [11]

L'espace physique qui nous entoure peut être considéré comme formé d'une infinité de points, chaque point jouant le même rôle.

[8] Voici la définition d'une droite proposée à des élèves de quatorze ans : Un ensemble D d'éléments appelés points est une droite réelle, s'il existe une famille de bijections de D sur l'ensemble des nombres réels, appelées graduations de D vérifiant l'axiome suivant :

Pour deux graduations quelconques g et g' de la même droite réelle D, il existe deux nombres réels a et b, tels que pour tout point M de D

$$g'(M) = a.\, g(M) + b$$

le nombre réel g (M) est appelé abscisse dans la graduation g du point M.

[9] Les bons élèves en géométrie seraient peut-être ceux qui, comprenant vite qu'il n'y a rien à voir dans l'espace physique, se placeraient d'emblée dans le domaine mathématique grâce à leur aptitude à abstraire la situation. Quant aux autres, ceux qui s'efforcent comme on les y invite trop souvent, de constater autour d'eux ce qui n'est pas, ils seraient irrémédiablement affublés de l'infamante étiquette de « ne-voit-pas-dans-l'espace ».

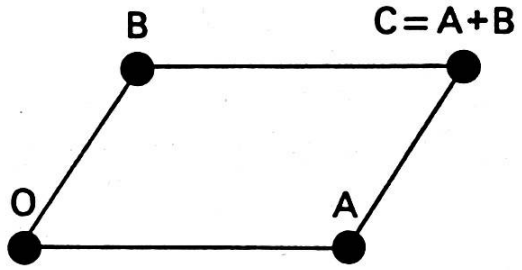
[10] La notion d'espace affine est même qualifiée dans certains livres d'enseignement supérieur de monstrueuse, peu importante, trop abstraite.

[11] Pour les développements mathématiques, consulter les ouvrages de Dieudonné, Donnedu et Manzoni cités en fin d'article.

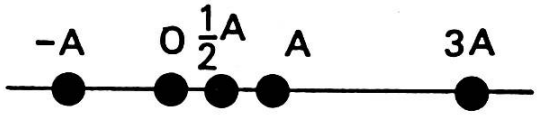
Pour structurer cet espace, il suffit d'en privilégier un point particulier O que nous appelons origine. En effet, on peut alors définir physiquement deux opérations :

— la *somme* de deux points : la somme du point A et du point B est le point C, noté A + B tel que OC et AB aient même milieu ;

— le *produit* d'un nombre par un point : voir les exemples de la figure correspondante.



Somme de 2 points :
$C = A + B$



Exemples de produit d'un point par un nombre

Des constructions simples à la portée d'un jeune élève montrent que les deux opérations ainsi définies possèdent des propriétés précises qu'il est sans intérêt d'énoncer ici.

Ces constatations expérimentales permettent d'introduire aisément la notion d'*espace vectoriel :* un *espace vectoriel* est un ensemble d'éléments mathématiques quelconques appelés *vecteurs* sur lequel on a défini une addition et une multiplication par un nombre réel qui vérifient un certain nombre de propriétés. (Correspondant à celles évoquées ci-dessus.)

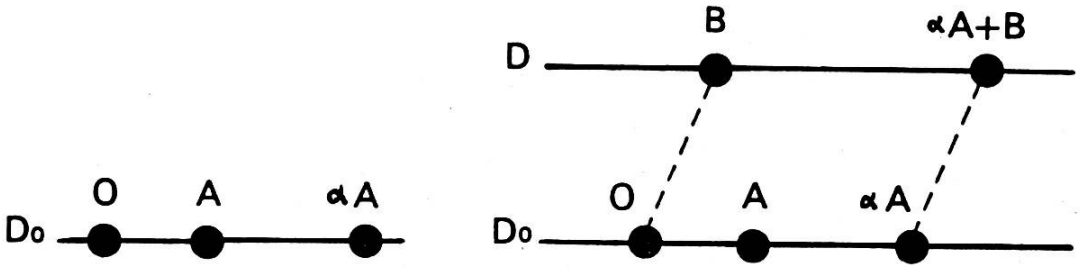
L'étude expérimentale qui précède montre que l'espace physique fournit une image simple de ce qu'est un espace vectoriel, dès que l'on y a choisi une origine O ; un vecteur mathématique est alors représenté par un point physique ; l'origine O figure un vecteur mathématique particulier appelé vecteur nul.

Plaçons-nous désormais dans le domaine purement mathématique et montrons par exemple comment la notion de droite apparaît de manière simple et naturelle dans le cadre de l'espace vectoriel[12]. (Les dessins servent uniquement à concrétiser momentanément les notions mathématiques correspondantes ; le mot point est synonyme de vecteur.)

[12] Ces lignes font partie d'un cours que nous proposons à des élèves de 16 ans.

« On appelle *droite vectorielle* Do passant par le point A, l'ensemble des points de la forme d φ ou φ est un nombre quelconque.

On appelle *droite* D passant par le point B et de direction Do l'ensemble des points de la forme φ A + B".



Droite Do passant par A Droite D passant par B de direction Do

Cet extrait met bien en évidence le principe qui régit ici la construction de la définition d'un concept mathématique. On définit d'abord le concept particulier où l'origine joue un rôle spécial (droite passant par O), puis par *translation* on passe au concept général (droite quelconque). La définition, quant à elle, est suggérée par la représentation physique du concept, représentation qui se dessine d'autant mieux que les vecteurs mathématiques correspondent justement aux points physiques, véritables grains d'espace.

Si le lecteur se reporte à la définition correspondante (voir note [7]) infligée à de jeunes élèves dans le cadre de la construction d'Hilbert-Euclide, il jugera sans peine de l'intérêt de la présentation moderne ici esquissée qui substitue la notion claire et limpide aux lourdes et complexes constructions héritées d'un autre âge.

Géométrie et physique

La dualité vecteur-point physique que nous avons utilisée est étrangère aux mathématiques, mais constitue un puissant soutien pédagogique, puisqu'elle permet de construire naturellement les définitions de base de la géométrie. Cependant, le lecteur ne peut manquer d'opposer deux objections. La première est que la structure d'espace vectoriel privilégie un vecteur particulier (le vecteur nul) alors que notre espace physique fait jouer le même rôle à tous ses points. A cette objection de nature physique nous répondrons que, d'une part, dans un calcul l'espace est toujours rapporté à une origine et que, d'autre part, l'homogénéité spatiale étant en réalité purement

locale, il n'y a pas d'inconvénient à utiliser une structure mathématique pour ainsi dire centrée sur un élément particulier.

La seconde objection concerne plus précisément l'assimilation du vecteur mathématique au point physique ; selon une présentation plus classique, la notion d'espace vectoriel est introduite non pas en combinant des points physiques, mais des flèches. Ainsi deux flèches « équipollentes » (physiquement parallèles, de même sens, de même longueur) représentent le même vecteur mathématique. Inversement un vecteur mathématique a une infinité de flèches représentatives. Ce procédé conduit fâcheusement à représenter l'unité par la multitude. Nous estimons quant à nous qu'il est préférable de représenter *un* élément de l'espace vectoriel par *un* élément de l'espace physique, c'est-à-dire par *un* point.

La flèche a de plus l'inconvénient de mettre en évidence sa longueur, et de suggérer ainsi qu'un nombre est naturellement attaché à tout vecteur mathématique. Cette notion, tout à fait étrangère à celle d'espace vectoriel, n'apparaît que si on définit un *produit scalaire* qui structure l'espace vectoriel en espace *euclidien*. Un produit scalaire étant choisi, on peut définir alors la longueur d'un vecteur et développer les notions que l'on appelle *métriques* (distance, perpendiculaire, angle).

Dans ce cas, pour représenter un vecteur, considéré comme élément d'un espace euclidien, il est tout indiqué de relier d'un trait le point représentatif du vecteur au point origine O. On fait ainsi apparaître la longueur physique du vecteur, entièrement déterminée par le choix d'une unité. C'est cette représentation qu'utilise avec raison le physicien lorsqu'il figure une force par une flèche. Il montre ainsi, sans toujours le dire explicitement, que pour lui une force est un élément d'un espace vectoriel euclidien.

Ayant ainsi justifié son support physique original, nous souhaitons avoir convaincu le lecteur des avantages de cette présentation de la géométrie. A l'inverse de l'axiomatique d'Hilbert-Euclide, elle ne requiert en effet aucune connaissance *a priori* de l'espace qu'elle se propose de décrire et s'interprète simplement grâce au support intuitif naturel que constitue le point physique.

C'est ce qui nous conduit à penser qu'elle pourrait avantageusement remplacer les poussiéreuses et laborieuses méthodes héritées d'un autre âge et se substituer à cette monstrueuse construction moderne qu'est l'espace affine pour réconcilier ainsi de nombreux élèves avec les mathématiques tout en les familiarisant le plus tôt possible avec la structure fondamentale qu'est l'algèbre linéaire.

LIVRES CONSULTÉS

BACHELARD, G. : *Le nouvel esprit scientifique*, 12e édition, Paris (P.U.F.), 1973.

BARUK, S. : *Echec et maths*, Paris (Seuil), 1973.

BOURBAKI, N. : *Théorie des ensembles*, Paris (Hermann), 1970.

DIEUDONNÉ, J. : *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, 3e édition, Paris (Hermann), 1968.

DONNEDU, A. : *Compléments de géométrie algébrique*, Paris (Dunod), 1966.

MANZONI, R. : *Présentation mcderne de quelques notions de mathématiques*, 2 volumes, Paris (Vuibert), 1971.