3.1. Avant Châtelet.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

générale fut développée par E. Lutz (1937) et A. Weil (1936), qui étudièrent la structure du groupe topologique $E(k)$ lorsque k est un corps p-adique (ce qu'on peut transcrire aujourd'hui au moyen des groupes formels et des modèles de Néron). Châtelet attira l'attention sur le fait que la méthode d'E. Lutz permet la détermination effective des points exceptionnels lorsque le corps de base k est un corps de nombres quelconque. Dans une note de 1940, Châtelet observe que les résultats de Lutz permettent de borner uniformément la torsion des courbes elliptiques définies sur un corps de nombres k et d'invariant j fixé (il suffit de se placer sur une complétion p-adique de k; à k-isomorphisme près, il n'y a alors qu'un nombre fini de courbes elliptiques d'invariant j donné, et pour chacune d'elles le groupe de torsion est fini). C'est un problème ouvert de savoir si la condition sur j peut être omise (dans le cas $k = \mathbf{Q}$, c'est un théorème de Mazur que l'ordre du groupe de torsion est au plus 16).

3. Surfaces cubiques

C'est la partie de l'œuvre de Châtelet qui a joué un grand rôle dans mes recherches personnelles.

Sauf mention du contraire, les surfaces cubiques ici considérées sont supposées absolument irréductibles et non coniques. Le corps de base k est pris de caractéristique zéro.

3.1. Avant Châtelet.

De 1940 à 1944, Mordell et B. Segre s'intéressent aux surfaces cubiques. Ils montrent que si une telle surface X définie sur k possède un point rationnel non singulier, alors il existe une application rationnelle dominante définie sur k d'un plan projectif sur X. En particulier les points rationnels sont denses pour la topologie de Zariski. B. Segre montre en 1944 qu'une surface cubique singulière X qui possède un point rationnel non singulier est k-rationnelle (k-birationnelle au plan projectif) sauf si X possède exactement deux points singuliers conjugués. En 1951, ce même Segre étudie les surfaces cubiques non singulières. On dit qu'une telle surface contient un S_n si elle contient un ensemble globalement défini sur k de n droites gauches deux à deux. Segre montre que si X est k-rationnelle, alors X contient nécessairement un S_1, un S_2, un S_3 ou un S_6 (comme le montrèrent indépendamment en 1970 Swinnerton-Dyer et Iskovskih, X contient en fait un S_2, un S_3 ou un S_6). En 1951, Segre donne aussi les premiers exemples

de surfaces cubiques X qui possèdent un point rationnel non-singulier mais qui ne sont pas k-rationnelles. En 1953, Selmer établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques diagonales

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dt^3 = 0\,, \qquad ab/cd \in k^{*3}\,.$$

En 1955, Skolem établit le principe de Hasse pour les surfaces cubiques singulières.

3.2. La contribution de Châtelet [1953] [1954*a*] [1954*b*] [1958] [1959*b*] [1966].

Tout d'abord, Châtelet montra qu'une surface cubique non singulière qui contient un S_3 ou un S_6 satisfait le principe de Hasse. Ce résultat généralise le résultat de Selmer mentionné ci-dessus. La clé de la démonstration est que si X contient un S_6, alors X est k-birationnelle à une surface de Severi-Brauer. Les notes de 1953 et 1954 contiennent des équations concrètes pour des surfaces satisfaisant les dites conditions.

Dans [1954*b*], Châtelet se demande comment décrire l'ensemble $X(k)$ des points rationnels d'une surface cubique X lorsque k est un corps de nombres et que X n'est pas k-rationnelle, ce qui exclut une représentation paramétrique essentiellement biunivoque. On pourrait a priori chercher un nombre fini de paramétrisations multivoques $\varphi_i : X_i \to X$ avec $X(k) = \bigcup_i \varphi_i(X_i(k))$ et chaque X_i k-birationnel au plan projectif $\mathbf{P}^2_k$. Châtelet remarque que cela semble très difficile (en 1967, Manin montrera que c'est en général impossible). Aussi Châtelet fait-il la suggestion très originale suivante: chercher de telles paramétrisations, mais avec X_i k-birationnel à $\mathbf{P}^n_k$ pour un entier $n > 2$. Il prend alors comme exemple la surface X d'équation

$$N_{K/k}(x + \omega y + \omega^2 z) = 1$$

avec $K = k(\omega)$ extension cubique non cyclique du corps de nombres k. Ici $X(k) = K^{*1}$ est le groupe des éléments de K^* de norme 1. Si L/k est la clôture galoisienne de K/k, $G = \mathrm{Gal}\,(L/k) = \langle s, t \rangle$ avec $s^3 = t^2 = 1$, Châtelet montre que l'application

$$\varphi : L^* \to K^{*1}$$
$$x \mapsto (s(x)/x) \cdot (t(s(x))/x))$$

a un conoyau fini. La démonstration utilise des factorisations fort réminiscentes de la démonstration du théorème de Mordell-Weil faible. En